

Úloha 1: Hénonův-Heilesův potenciál.

Termín odevzdání: 7. března

Pohyb částice v Hénonově-Heilesově potenciálu

$$V(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + \lambda(\frac{1}{3}y^3 - yx^2)$$

je oblíbený problém pro studium chaotického chování. Pro malé hodnoty konstanty λ můžeme druhý člen v potenciálu považovat za malou poruchu vzhledem k prvnímu členu, který je potenciálem dvourozměrného harmonického oscilátoru. Najděte strukturu stacionárních stavů a energie tohoto dvourozměrného harmonického oscilátoru a poté započtete člen úměrný λ jako malou poruchu. Konkrétně:

- Nalezněte energii základního stavu 2D harmonického oscilátoru a její korekci do prvního řádu poruchové teorie (2 body).
- Najděte opravu energie základního stavu v druhém řádu poruchové teorie (6 bodů).
- Dokažte že korekce energie všech excitovaných stavů v prvním řádu poruchové teorie jsou nulové (2 body).

Předpokládejte, že jsme zvolili takové jednotky, že hmotnost částice a úhlová frekvence jsou rovny jedné $m = \omega = \hbar = 1$. Vypočtenou hodnotu energie pro $\lambda = 1/\sqrt{80}$ porovnejte s numericky získanou přesnou hodnotou energie základního stavu $E_0 = 0.9986$.

Nápověda: 2D harmonický oscilátor můžeme chápat jako direktní součin dvou jednorozměrných harmonických oscilátorů.

Poznámky: Podobně jako pro atom vodíku v elektrickém poli, nemá vlastně Hénonův-Heilesův potenciál striktně řečeno žádné vázané stavy, protože minimum v bodě $x = y = 0$ je jen lokální a potenciál v některých směrech jde do $-\infty$. Získané korekce jsou však velmi dobrou aproximací energií dlouhožijících kvazistacionárních stavů. Doby života lze získat pomocí nestacionární poruchové teorie. Pro přesné řešení je možné použít teorii rozptylu. Samotný Hénonův-Heilesův potenciál má zajímavou trojčetnou symetrii (jde o imaginární část výrazu $(x + iy)^3$). Více se můžete dozvědět z citací níže. Numerická hodnota energie pochází z [2]. Poruchová teorie funguje velmi dobře pro energii prvních stavů, ale v případě vyšších hladin selhává protože kubické členy v potenciálu jsou důležitější pro excitované stavy.

[1] https://en.wikipedia.org/wiki/Hénon-Heiles_system

[2] M. D. Feit, J. A. Fleck and A. Steiger, *J. Comp. Phys.* **47** (1982) 412.