# Úloha 4: Nerozlišitelné částice na kroužku

*Termín odevzdání: 2. května*

Uvažujme částici pohybující se po kroužku poloměru $R$ takže stavový prostor tvoří periodické, kvadraticky integrovatelné funkce $\psi(\varphi)$ na intervalu $\varphi \in \langle 0, 2\pi \rangle$. Předpokládejme, že hamiltonián tohoto systému je

$$H = -\frac{\hbar^2}{2\mu R^2}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\varphi^2}.$$

1. Najděte stacionární stavy částice a příslušné energie.

2. Nyní uvažujte tři takové navzájem neinteragující částice a najděte vlastní stavy pro tři nejnižší energie v případě, že jsou to nerozlišitelné bosony.

3. Ve stacionární poruchové teorii započtěte pro tyto tři nejnižší energie kontaktní interakci částic $U = \lambda[\delta(\varphi_1 - \varphi_2) + \delta(\varphi_2 - \varphi_3) + \delta(\varphi_3 - \varphi_1)]$ a vypočtěte opravu energie do prvního řádu.

*Poznámka:* Tento systém lze též interpretovat jako rotor s jedním stupňem volnosti, nebo částice v jámě kvantované pomocí periodické okrajové podmínky (Born-vonKarman). Ukazuje se, že tento systém je rovněž přesně řešitelný a to dokonce pro libovolný počet bosonů, či fermionů se spinem $1/2$ pomocí tzv. Betheho ansatzu, takže je jedním z mála přesně řešitelných mnohočásticových modelů.