

# Úloha 1: Kvantové matematické kyvadlo

*Termín odevzdání: 25. březen*

Matematické kyvadlo je rotor umístěný v poli konstantní síly. V kvantové mechanice jej popíšeme na prostoru kvadraticky integrovatelných funkcí  $\psi(\varphi)$  na intervalu  $\varphi \in (0, 2\pi)$ , přičemž hamiltonián je daný součtem kinetické a potenciální energie

$$\hat{H} = \hat{T} + \hat{V} = \frac{\hbar^2}{2I} \left[ -\frac{d^2}{d\varphi^2} + \lambda \cos \varphi \right].$$

Konstanta  $I > 0$  je moment setrvačnosti kyvadla a bezrozměrná konstanta  $\lambda > 0$  určuje velikost působící síly.

1. Najděte stacionární stavy volného rotoru  $\hat{H}_0 = \hat{T}$  a jejich energie. (2 body)
2. Uvažujte potenciál  $\hat{V}$  jako poruchu pro malou hodnotu  $\lambda$  a najděte korekce energie prvních dvou hladin do druhého řádu. Když roztřídíte stacionární stavy  $\hat{H}_0$  na sudé a liché funkce, můžete používat nedegenerovanou poruchovou teorii, zvláště v prostoru sudých funkcí a v prostoru lichých funkcí. (3 body)
3. Spočtěte nejnižší tři energie pomocí variačního principu s variačním prostorem daným lineárním obalem prvních tří stavů (s nejnižší energií) neporušeného  $\hat{H}_0$ . (4body)
4. Porovnejte výsledky obou přístupů pro  $\lambda^2 = 0.21$ . (1bod)

*Pozn:* Kvantové matematické kyvadlo by mohlo být realizováno jako molekula s nenulovým dipólovým momentem v elektrickém poli s fixovanou osou rotace.