

Úloha 2: Kvantový rotor se spinem 1/2

Termín odevzdání: 8. duben

Pohyb kvantové částice vázaný na sféru o poloměru 1 je popsán kvadraticky integrovatelnou vlnovou funkcí $\psi(\theta, \varphi)$. Moment hybnosti této částice je pak dán operátorem orbitálního momentu hybnosti $\vec{L} = (\hat{L}_x, \hat{L}_y, \hat{L}_z)$ jenž jsme studovali minulý semestr a jehož pomocí jsme odvodili sférické harmoniky $Y_{lm}(\theta, \varphi)$. Uvažujme navíc, že částice má spin 1/2.

1. Najděte všechny stavy tohoto systému s celkovým momentem hybnosti $\hat{J} = \hat{L} + \hat{S}$ rovným 1/2, tj. vlastní hodnota operátoru \hat{J}^2 je $\frac{3}{4}\hbar^2$. (5 bodů)
2. Vezměme lineární obal všech stavů z předchozí úlohy. Jaké nejmenší vlastní hodnoty v něm může nabývat operátor $\vec{J} \cdot \vec{S}$ (2 body)
3. Ze stavů na nichž je tento skalární součin nejmenší vyberte ten s největší střední hodnotou x-složky spinu $\langle s_x \rangle$ a spočtete hustotu pravděpodobnosti výskytu částice v daném místě na sféře $\rho(\theta, \phi)$ pro tento stav. (3 body)

Pozn: Použijte teorii sčítání momentu hybnosti z přednášky.

Bonusová úloha (easter egg): Pokuste se namalovat vlnové funkce z řešení úlohy na Velikonoční vejce a uploadujte foto. (0 bodů jen pro legraci)