

## Úloha 4: Dva elektrony v trojtečce.

Termín odevzdání: 13. května

Rád bych, abyste si promysleli důsledky symetrizačního postulátu na jednoduchém systému. Uvažujme tedy kvantovou trojtečku, jejíž stavový prostor  $\mathcal{H}_T$  je daný lineárním obalem tří vektorů  $\{|1\rangle, |2\rangle, |3\rangle\}$ . Pro elektron v trojtečce, který má navíc spin  $1/2$  je stavový prostor  $\mathcal{H}^{(1)} = \mathcal{H}_T \otimes \mathbb{C}^2$ .

1. Jak vypadá stavový vektor  $|\psi_1\rangle$  popisující jeden elektron se spinovým stavem  $|+\rangle$  v tečce  $|1\rangle$  a druhý se spinem  $|-\rangle$  v tečce  $|2\rangle$ . (1 bod)
2. Jak vypadá stavový vektor pro dva elektrony ve stejných tečkách jako v předchozí úloze, ale tentokrát oba se spinem  $|+\rangle$ . (1 bod)
3. Uvažujte hamiltonián pro jeden elektron (bez spinu) v trojtečce

$$\hat{h} = \beta\hbar \sum_{n \neq m} |n\rangle\langle m|.$$

Najděte jeho spektrum. (2 body)

4. Nyní budeme předpokládat, že hamiltonián  $\hat{H}$  pro dva (neinteragující) elektrony v trojtečce je dán součtem hamiltoniánu  $\hat{h}$  pro každý elektron a nezávisí na spinu

$$\hat{H} = (\hat{h} \otimes \hat{I} + \hat{I} \otimes \hat{h}) \otimes \hat{I}_{spin}.$$

Najděte jeho vlastní hodnoty a jejich stupeň degenerace. (2body)

5. Rozmyslete, že evoluční operátor odpovídající hamiltoniánu výše lze psát jako  $\exp(-i\hat{h}t/\hbar) \otimes \exp(-i\hat{h}t/\hbar) \otimes \hat{I}_{spin}$ . Najděte časový vývoj stavů  $|\psi_1(t)\rangle$  a  $|\psi_2(t)\rangle$  z prvního bodu a vypočítejte pro ně střední hodnoty operátorů

$$\hat{p}_1 = (|1\rangle\langle 1| \otimes \hat{I} + \hat{I} \otimes |1\rangle\langle 1|) \otimes \hat{I}_{spin}$$

(pravděpodobnost nalézt nějaký elektron v tečce 1) a

$$\hat{p}_2 = |1\rangle\langle 1| \otimes |1\rangle\langle 1| \otimes \hat{I}_{spin}$$

(pravděpodobnost nalézt oba elektrony v tečce 1). (4 body)

Pokuste se řešit tuto úlohu bez použití formalismu druhého kvantování.