

### Úloha 3: Dva elektrony v trojtečce.

Termín odevzdání: 25. dubna

Promyslete si důsledky symetrizačního postulátu na jednoduchém systému. Uvažujme kvantovou trojtečku, jejíž stavový prostor  $\mathcal{H}_T$  je daný lineárním obalem tří vektorů  $\{|1\rangle, |2\rangle, |3\rangle\}$ . Pro elektron v trojtečce, který má navíc spin  $1/2$  je stavový prostor  $\mathcal{H}^{(1)} = \mathcal{H}_T \otimes \mathbb{C}^2$ .

1. Jak vypadá stavový vektor  $|\psi_1\rangle$  popisující jeden elektron se spinovým stavem  $|+\rangle$  v tečce  $|1\rangle$  a druhý se spinem  $|-\rangle$  v tečce  $|2\rangle$ . (1 bod)
2. Jak vypadá stavový vektor pro dva elektrony ve stejných tečkách jako v předchozí úloze, ale tentokrát oba se spinem  $|+\rangle$ . (1 bod)
3. Uvažujte hamiltonián pro jeden elektron (bez spinu) v trojtečce

$$\hat{h} = \beta\hbar \sum_{n \neq m} |n\rangle\langle m|.$$

Najděte jeho spektrum. (2 body)

4. Nyní budeme předpokládat, že hamiltonián  $\hat{H}$  pro dva (neinteragující) elektrony v trojtečce je dán součtem hamiltoniánu  $\hat{h}$  pro každý elektron a nezávisí na spinu

$$\hat{H} = (\hat{h} \otimes \hat{I} + \hat{I} \otimes \hat{h}) \otimes \hat{I}_{spin}.$$

Najděte jeho vlastní hodnoty a jejich stupeň degenerace. (2body)

5. Rozmyslete, že evoluční operátor odpovídající hamiltoniánu výše lze psát jako  $\exp(-i\hat{h}t/\hbar) \otimes \exp(-i\hat{h}t/\hbar) \otimes \hat{I}_{spin}$ . Najděte časový vývoj stavů  $|\psi_1(t)\rangle$  a  $|\psi_2(t)\rangle$  z prvního bodu a vypočítejte pro ně střední hodnoty operátorů

$$\hat{p}_1 = (|1\rangle\langle 1| \otimes \hat{I} + \hat{I} \otimes |1\rangle\langle 1|) \otimes \hat{I}_{spin}$$

(pravděpodobnost nalézt nějaký elektron v tečce 1) a

$$\hat{p}_2 = |1\rangle\langle 1| \otimes |1\rangle\langle 1| \otimes \hat{I}_{spin}$$

(pravděpodobnost nalézt oba elektrony v tečce 1). (4 body)

Pokuste se řešit tuto úlohu bez použití formalismu druhého kvantování.

## Úloha 4: Dva elektrony v trojtečce - II.kvantování.

Termín odevzdání: 2. května

Tato úloha navazuje na předchozí úlohu, ale použijte pro tentýž systém II. kvantování na Fockově prostoru.

Uvažujme kreační operátor  $\hat{a}_{ns}^\dagger$ , který kreira elektron se z-tovou složkou spinu  $s_z = s\hbar/2$  v kvantové tečce číslo  $n$ , kde  $s = +, -$  a  $n = 1, 2, 3$ , tj.  $|ns\rangle = \hat{a}_{ns}^\dagger|0\rangle$ .

1. Napište stavový vektor  $|\psi_1\rangle$  popisující jeden elektron se spinovým stavem  $|+\rangle$  v tečce  $|1\rangle$  a druhý se spinem  $|-\rangle$  v tečce  $|2\rangle$  a stavový vektor  $|\psi_2\rangle$  pro dva elektrony se spinem  $|+\rangle$  opět rozmístěné do teček 1 a 2. (1 bod)
2. Napište jednoelektronový hamiltonián

$$\hat{h} = \beta\hbar \sum_s \sum_{n=1}^3 \sum_{m \neq n} |ns\rangle \langle ms|$$

rozšířený na operátor  $\hat{H}$  na Fockově prostoru pomocí kreačních a anihilačních operátorů. (2 body)

3. Ukažte, že kreační operátor  $\hat{a}_1^\dagger$  má v Heisenbergově obrázku následující časovou závislost

$$\hat{a}_{1s}^{\dagger(H)}(t) = \frac{1}{3}\hat{a}_{1s}^\dagger(e^{2i\beta t} + 2e^{-i\beta t}) + \frac{1}{3}(\hat{a}_{2s}^\dagger + \hat{a}_{3s}^\dagger)(e^{2i\beta t} - e^{-i\beta t}).$$

Buď řešte Heisenbergovu pohybovou rovnici, nebo alespoň ověřte, že jde o její řešení. (3 body)

4. Napište rozšíření jednoelektronového operátoru

$$\hat{p}_1 = \sum_s |1s\rangle \langle 1s|$$

na operátor  $\hat{P}_1$  na Fockově prostoru (pravděpodobnost nalézt nějaký elektron v tečce 1) a najděte jeho střední hodnotu ve stavu  $|\psi_1\rangle$  v čase  $t$ . Výpočet je jednodušší v Heisenbergově obrázku, kde je časová závislost dvou operátorů (místo 4 ve Schrodingerově obraze) a tu znáte z bodu 3. (4 body)