

Úloha 1: Excitace provázaných oscilátorů.

Termín odevzdání: 15. března 2025

Dva nezávislé lineární harmonické oscilátory jsou naladěné na shodnou frekvenci ω . Na počátku je systém v základním stavu $|\psi_0\rangle = |0\rangle_1|0\rangle_2$. Systému jako celku nyní dodáme energii $N\hbar\omega$ mechanismem, který je jinak účinný v případě každého oscilátoru.¹ Dostaneme tak nerovnoměrnou lineární kombinaci stavů

$$|\psi_N\rangle = \sum_{k=0}^N a^k b^{N-k} |k\rangle_1 |N-k\rangle_2.$$

Zde amplituda pravděpodobnosti k -té excitace prvního oscilátoru je úměrná a^k , zatímco amplituda pravděpodobnosti k -té excitace druhého oscilátoru je úměrná b^k . Předpokládejte, že parametry a a b jsou komplexní čísla, pro která platí $0 < |b| < |a| < 1$.

1. Normalizujte stav ψ_N . (1 bod)
2. Napište operátor hustoty pro systém ve stavu ψ_N . Jedná se o čistý stav? (1 bod)
3. Najděte redukovaný operátor hustoty $\hat{\rho}_r$ pro podsystem odpovídající jen prvnímu oscilátoru. (3 body)
4. Spočítejte *čistotu* stavu, $\gamma = \text{Tr } \hat{\rho}_r^2$, odpovídajícího redukovanému operátoru hustoty $\hat{\rho}_r$ z předchozího bodu. Jedná se o čistý stav? (2 body)
5. Speciálně pro případ $N = 1$ určete pomocí $\hat{\rho}_r$ střední energii podsystemu $\langle \hat{H}_1 \rangle$. Zde $\hat{H}_1 = \hbar\omega(\hat{N}_1 + \frac{1}{2})$ a $\hat{N}_1$ je operátor stupně excitace prvního oscilátoru. (2 body)
6. Když se omezíme na $N = 1$, jsou dosažitelné stavy harmonického oscilátoru jen $|0\rangle$ a $|1\rangle$. Napište $\hat{\rho}_r$ v této bázi jako matici ρ_r a určete složky polarizačního vektoru $\mathbf{p}$ v rozkladu ρ_r do Pauliho matic, $\rho_r = \frac{1}{2}(I + \mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\sigma})$. (1 bod)

Pomůcka: Může se vám hodit vzorec pro částečný součet geometrické řady

$$\sum_{k=0}^n q^k = \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}.$$

¹Např. bychom mohli nabité oscilátory vybudit elektromagnetickým polem, přičemž každý z oscilátorů má jiný náboj.