

Úloha 2: Interagující částice se spinem

Termín odevzdání: 31. března

Uvažujte systém složený ze dvou částic se spinem 1/2 jejichž interakce je popsána Hamiltoniánem

$$\hat{H} = \frac{1}{2}\hbar\omega \left(q^2 - \frac{d^2}{dq^2} \right) + \hbar\lambda q^2 \vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2, \quad (1)$$

kde $q = x\sqrt{m\omega/\hbar}$ je bezrozměrná vzdálenost částic, $\vec{\sigma}_1$ a $\vec{\sigma}_2$ jsou (až na faktor $\hbar/2$) spinové operátory těchto dvou částic a $\omega \gg \lambda > 0$ jsou reálné parametry. Najděte spektrum tohoto systému. Podrobněji

1. Ve spinovém prostoru najděte vlastní vektory $|sm_s\rangle$ kvadrátu a z-tové složky celkového spinu systému. (1bod)
2. Vlastní vektory systému hledejte ve tvaru $|\psi\rangle_q \otimes |sm_s\rangle$. Najděte dvě nejnižší vlastní hodnoty energie a všechny vlastní vektory příslušné těmto energiím. (5bodů)
3. Systém je připraven ve stavu $e^{-q^2/2}|+\rangle_1|-\rangle_2$, kde $|+\rangle_1$ a $|-\rangle_2$ jsou vlastní vektory spinu $\frac{\hbar}{2}\sigma_z$ pro částici 1 a 2 odpovídající hodnotám $\pm\hbar/2$. Jaká je pravděpodobnost nalézt takto připravený systém po měření energie ve stavu odpovídajícímu základnímu a prvnímu excitovanému stavu? (4body)