Lekce VI – Rozptylové veličiny v okolí $E=0$ a v okolí rezonance

① Nízkoenergetické chování rozptylových veličin

Jostova funkce: $\mathcal{J}_\ell(p) = 1 + \frac{1}{p}\int_0^\infty \hat{h}^{(+)}_\ell(pr)\, U(r)\, \phi_{\ell p}(r)\, dr$

chování pro $p \to 0$: $\phi_{\ell p} \sim j_\ell(pr) \sim \frac{(pr)^{\ell+1}}{(2\ell+1)!!}\left[1+O(p^2)\right]$

$$\hat{h}^{(+)}(pr) = n_\ell + i j_\ell \sim \frac{(2\ell+1)!!}{(pr)^\ell} + i\,\frac{(pr)^{\ell+1}}{(2\ell+1)!!}$$

$$\Rightarrow \quad \mathcal{J}_\ell(p) = 1 + A + Bp^2 + \dots + iCp^{2\ell+1}\left(1+O(p^2)\right) \qquad \text{(JO)}$$

$$= |\mathcal{J}_\ell(p)|\left(\cos\delta_\ell - i\sin\delta_\ell\right) \quad \to \quad \frac{\cos\delta}{\sin\delta} = -\frac{\mathrm{Re}\,\mathcal{J}}{\mathrm{Im}\,\mathcal{J}}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{p^{2\ell+1}\cot g\,\delta_\ell = -\frac{1}{a_\ell} + \frac{1}{2} r_\ell\, p^2 + \dots} \qquad (\to)$$

mimochodem k-matice ... $= \mathrm{tg}\,\delta_\ell$

kde jsme definovali rozptylovou délku a_ℓ (scattering length) a efektivní poloměr r_ℓ

- pozn: Předpokládali jsme analytičnost $\mathcal{J}_\ell(p)$ v okolí počátku → závisí na $U(r)$ ... ok pro exp. ubývající

→ podrobnější analýza: ... dlouhodosahový $U(r) \sim r^{-s}$

→ a_ℓ je dobře def. pro $2\ell+3 < s$

r_ℓ pro $2\ell+5 < s$

tj pro $s \leq 4$ musí být rozvoj $(\to)$ zobecněn

- pozn: polarizační potenciál $U(r) \sim r^{-4}$ (interakce nabité částice s indukovaným dipólem) + short range

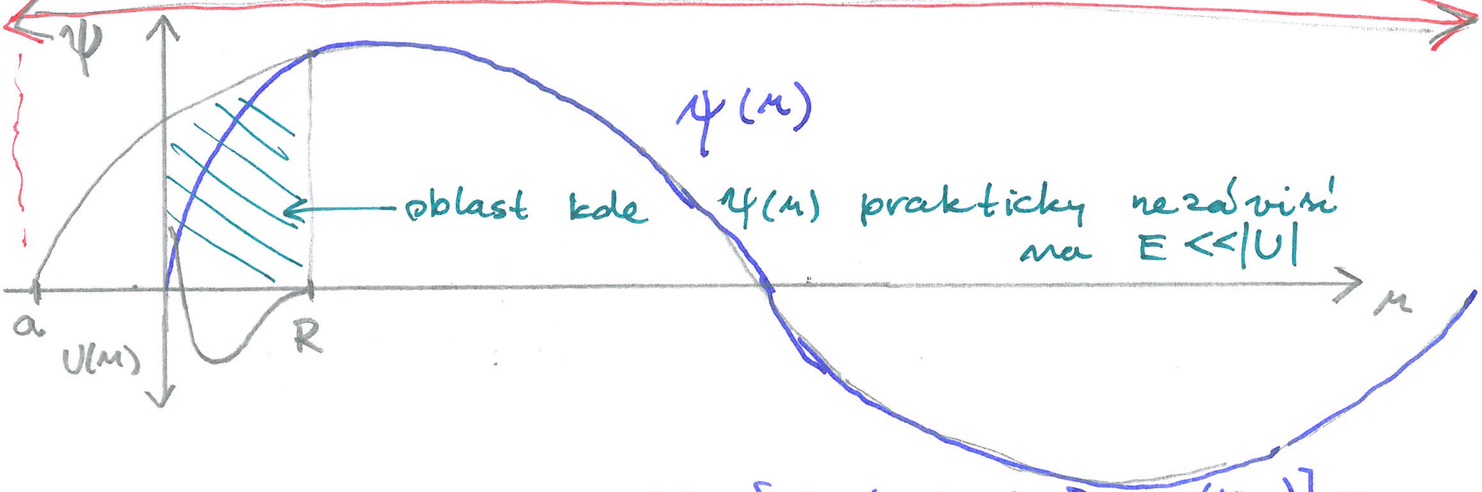
dá se ukázat: pro $\ell = 0$: $p\cot g\,\delta_0 = -\frac{1}{a_0} + bp + cp^2\ln p + O(p^2)$

- dipólový potenciál $U(r) \sim r^{-2}$
  → musí se modifikovat samotný rozvoj do parc. vln
  ... neceločíselná ℓ ... závisí na síle dipólu
- Coulomb. ... není ani dobře def δ_ℓ ... člen $\sim \ln(pr)$ ve fázi

... omezíme se ke krátkodosah U ...

interpretace rozptylové délky:

$E \to 0 \Rightarrow$ de Broglie $\lambda = \frac{h}{p} \to \infty$ λ



.. platí: $\psi_\ell(r) \xrightarrow[r\to\infty]{} C(p)\left[\sin(pr) + \mathrm{tg}\,\delta \cos(pr)\right]$

pro $E\to 0$ je nejdůležitější s-vlna ... $\boxed{\mathrm{tg}\,\delta_\ell \simeq -a_0 p}$

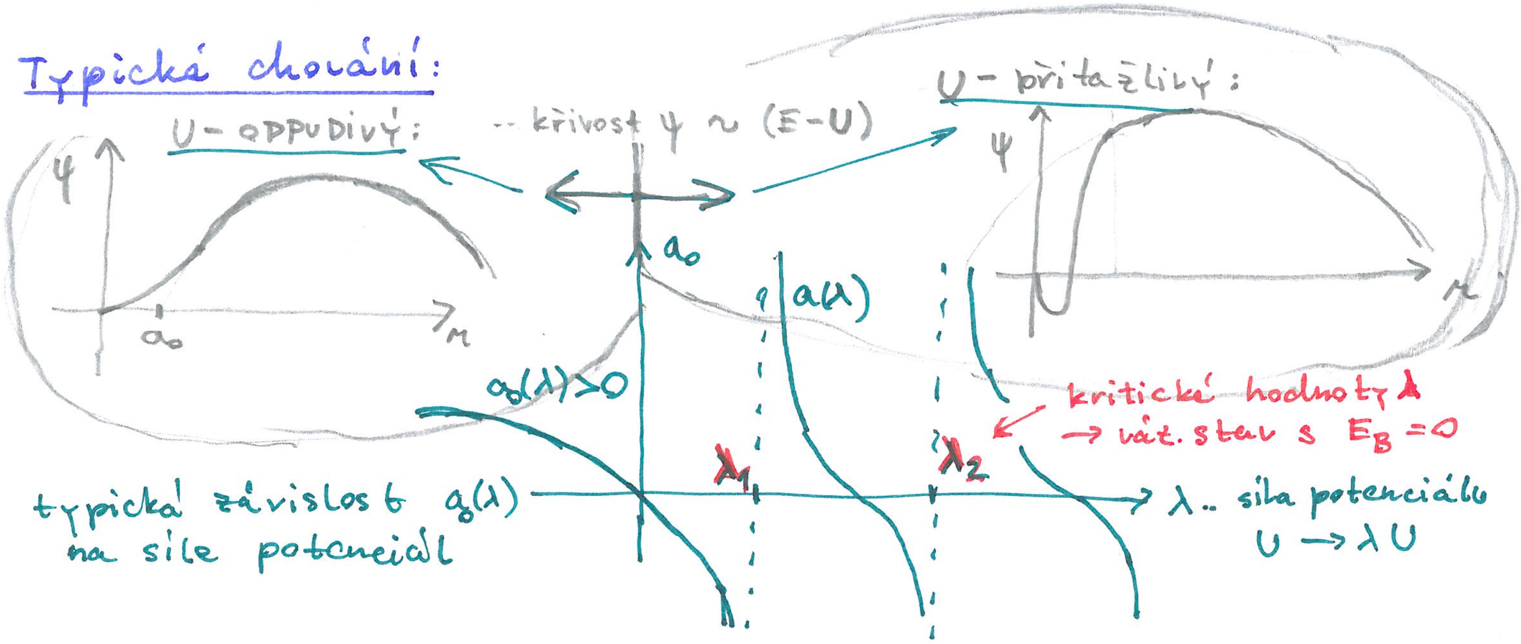
($\ell(\ell+1)/r^2$ nepustí $\ell>0$ do interakční obl. $r<R$)

tj $\psi_{\ell=0}(r) \longrightarrow \tilde{C}(k)\sin\left(p(r-a_0)\right)$

tj ... pro $E\to 0$ lze interakci nahradit počát. podmínkou!

... částice vidí potenciál $U(r)$; $r\in\langle 0,R)$ pro $\lambda\to\infty$ jako bodový

Typické chování:



Účinný průřez:

.. $\delta \sim k^{2\ell+1}$ ... $E\to 0$ .. jen s-vlna:

$$\sigma_0 = \frac{4\pi}{p^2}(\sin\delta_0)^2 = \frac{4\pi}{p^2}\frac{(\sin\delta_0)^2}{(\sin\delta_0)^2+(\cos\delta_0)^2} = \frac{4\pi}{p^2}\frac{1}{1+(\underbrace{\mathrm{cotg}\,\delta_0}_{-\frac{1}{pa}})^2}$$

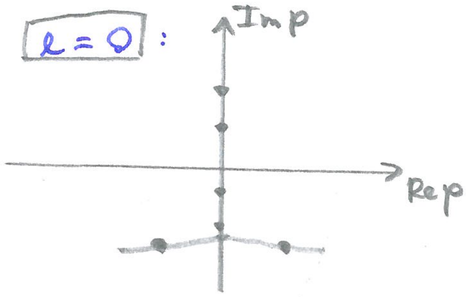
$$\simeq \frac{4\pi}{p^2}(pa)^2 = 4\pi a^2$$

diverguje pro váz. stav s nulovou energií

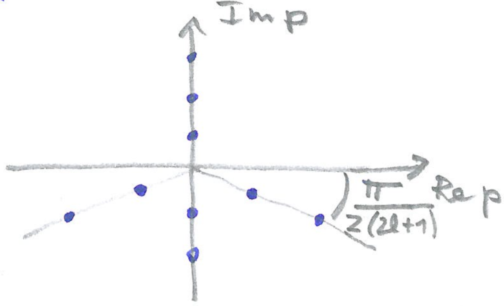
Nuly Jostovy funkce v okolí poč. $p=0$

$(J0) \rightarrow \quad \mathcal{J}_\ell(p) \simeq \mathcal{J}_\ell(0) + Bp^2 + iCp^{2\ell+1} = 0$

$\Rightarrow$ $\boxed{\ell=0}$:



$\boxed{\ell>0}$



... může být jednoduchý pól v $p=0$

... nesmí být jedn. pól $p=0$, $\rightarrow$ dvojitý

Rezonance – nuly Jostovy funkce poblíž. reál. osy

$\mathcal{J}_\ell(\tilde{p})=0 \quad \rightarrow \quad \mathcal{J}_\ell(p) = \mathcal{J}_\ell' \cdot (p-\tilde{p})$ ... v okolí $\tilde{p} = p_R - ip_I$

$p_R, p_I > 0$

s-matice: $S(p) = \dfrac{\mathcal{J}_\ell(-p)}{\mathcal{J}_\ell(p)}$ ... $p \in \mathbb{R}$ je poblíž $\tilde{p}$ $\Rightarrow -p$ je poblíž $-\tilde{p}^*$

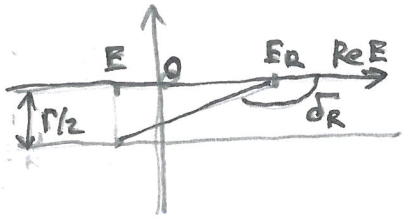
.. rozvoj S v okolí E_R .... $E = \dfrac{p^2}{2m}$ ... $\tilde{E} = \dfrac{\tilde{p}^2}{2m} = E_R - \dfrac{i}{2}\Gamma$

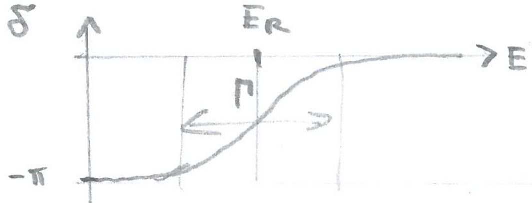
$$S(E) \simeq \frac{E-E_R-\frac{i}{2}\Gamma}{E-E_R+\frac{i}{2}\Gamma} \cdot e^{2i\delta_{bg}}$$

... pozadí ... příspěvek $\dfrac{\mathcal{J}_\ell'^*}{\mathcal{J}_\ell'} = e^{2i\delta_{bg}}$

1) zanedbání $\delta_{bg} \simeq 0$ ... Breit-Wignerova formule

$$S = \frac{E-E_R-\frac{i}{2}\Gamma}{E-E_R+\frac{i}{2}\Gamma} = e^{2i\delta_R} \rightarrow \delta_R(E) = \operatorname{arctg}\frac{\Gamma/2}{E_R-E}$$

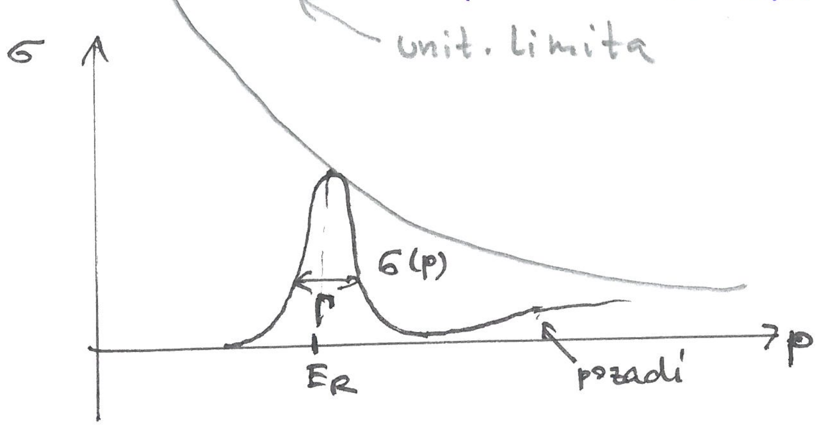




účinný průřez: $\sigma_\ell = \dfrac{4\pi}{p^2}(2\ell+1)\sin^2\delta_R = \dfrac{4\pi}{p^2}(2\ell+1)\left|\frac{1}{2}(S_\ell-1)\right|^2$

$$\frac{4\pi}{p^2}(2\ell+1) \quad = \frac{4\pi}{p^2}(2\ell+1)\frac{\Gamma^2/4}{(E-E_R)^2+\Gamma^2/4}$$

unit. limita



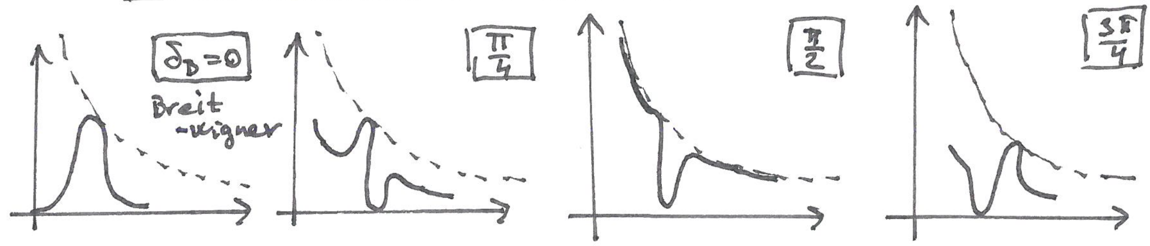
2) vliv pozadí → Fano-formule

$$\sigma_l = \frac{4\pi}{p^2}(2l+1)\left|\frac{1}{2}\left(\frac{\varepsilon - i}{\varepsilon + i}\, e^{2i\delta_{Bg}} - 1\right)\right|^2 \quad \text{.. kde} \quad \varepsilon = \frac{E - E_R}{\Gamma/2}$$

$$= \dots \quad \rightarrow \quad \boxed{\sigma_l = \frac{4\pi}{p^2}(2l+1)\sin^2\delta_{Bg}\cdot\frac{(\varepsilon+q)^2}{\varepsilon^2+1}}$$

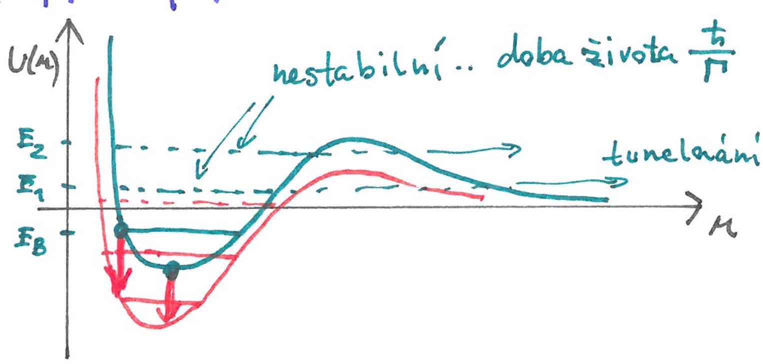
quality factor $q = -\mathrm{cotg}\,\delta_{Bg}$

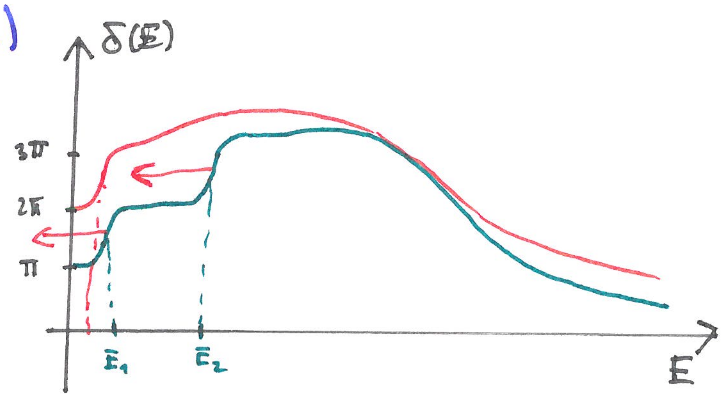
Fano-shape:



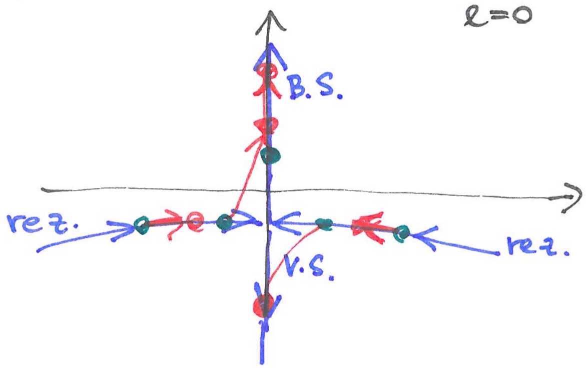
Typické trajektorie pólů S-matice

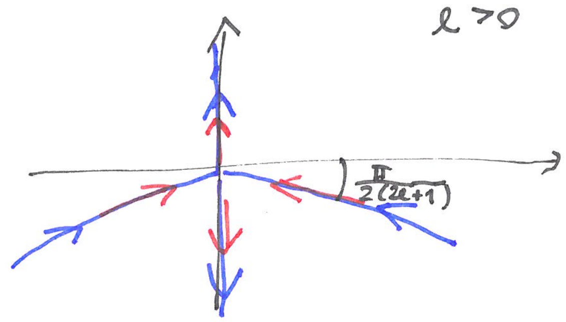
typický potenciál (shape rezonance)





trajektorie pólů v $p \in \mathbb{C}$:





• pozn: Metody hledání rezonancí:
- přímé řešení pro $p \in \mathbb{C}$
- komplexní škálování
- fitování $\sigma_l(E)$ .. Fano formule
- Projekční formalismus

• pozn: dá se analyzovat doba zdržení vlnového balíku v interakční oblasti ... $\sim \frac{\hbar}{\Gamma}$ ... $\sim \frac{d\delta_l(E)}{dE}$

... viz Formánkova učebnice