

Metoda sítí (konečných diferencí) pro PDE

I. Úvod

- většina PDE neumíme řešit analyticky
 - nelinearity
 - i lineární rovnice mají často komplik. obraj. či počáteční podmínky
 - nebo závislosti koeficientů (např. S.R. ... $V(x)$)
- řešení se hledá v neobecném tvaru funkce pro počítač numericky → konečná reprezentace
 - rozklad do baze (kladná) → SPEKTRÁLNÍ METODY Tabulku + kody které vhoďte
 - rozklad do baze polynomů (počítáček) → konečné elementy (prvky)
 - ~~rozklad~~ reprezentace veličiny str. bodu. na jistém objemu → metoda koneč. objemů
 - reprezentace pomocí náhodných souborů .. MC metody
 - nejprůhlednější: reprezent. bodů vyznačených v boděch → SÍŤ
- o navíc možno kombinovat .. např. níz. reprezent. v x a v t

ÚLOHA pro PDE:

sabnuje nejen rovnici, ale i přísl. obraj./počat. podmínky
 modelové příklady:

[P1] počáteční úloha pro rovnici vedení tepla (difúze, SR)

→ hledáme funkci $u(\vec{x}, t)$, která:

- splňuje rovnici $\partial_t u = \overset{D}{\Delta_x} u + S$ na $\vec{x} \in \mathbb{R}^n, t > 0$ ↗ D měří $\in \mathbb{C}$
- počat. podm: $u(\vec{x}, 0) = f(\vec{x})$ na $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ ↖ $D=1$ bývá
- okraj. podm: $u(\vec{x}, t) = 0$ na $\vec{x} \in \partial \Omega, t > 0$

kde $S(\vec{x}, t), f(\vec{x})$ jsou předem dané funkce

[P2] okrajová úloha pro Poissonovu rovnici (potenciál daného rozl. náboje)

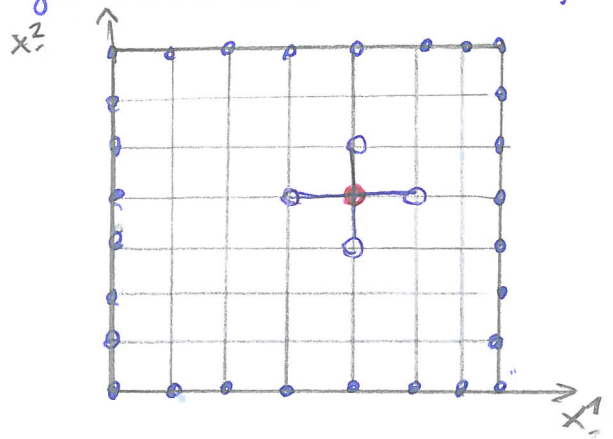
→ hledáme funkci $u(\vec{x})$, která:

- splňuje rovnici $-\Delta_x u = f(\vec{x})$ na $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$
- okraj. podm $u(\vec{x}, t) = 0$ na $\vec{x} \in \partial \Omega$

Reprezentace funkce na síti:

P2: - parametrizace:

pro jednoduchost $\vec{x} \in \mathbb{R}^2$; $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ nepr. obdélník



SIT: $(x_i^1, x_j^2) \equiv \vec{x}_{ij}$

$x_i^1 = j_1 h^1$; $j_1 = 0, 1, \dots, N$

$x_j^2 = j_2 h^2$; $j_2 = 0, 1, \dots, N$

Reprezentace řešení:

$u(x_i^1, x_j^2) \approx v_{ij}$

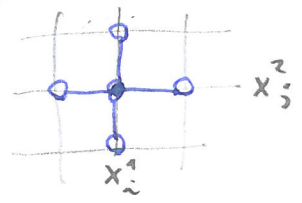
+ pravá strana ... f_{ij}

• Reprezentace kraj. podmínky: $v_{ij} = 0$ pro $\vec{x}_{ij} \in \partial\Omega$

• Reprezentace rovnice (konečné diference):

$-\Delta_x u = f \rightarrow \frac{u_{i-1,j} - 2u_{ij} + u_{i+1,j}}{h^2} + \frac{u_{i,j-1} - 2u_{ij} + u_{i,j+1}}{h^2} = f_{ij}$

šablona metody (stencil):



Řešení úlohy: nalézt u_{ij} -- kolik kolik vnitřních bodů

rovnice \leftrightarrow šablona -- počet \leftrightarrow kolik kolik vnitř. bodů ✓

\rightarrow soustava lin. rovnic -- podrobně poději ... iterační metody pro úzké matice

pozn: 1D .. ještě jednodušší



\rightarrow řešení soustavy rovnic s 3-diag. maticí -- složitost N

Konvergence: nádi bytem, aby $v_{ij} \rightarrow u(\vec{x}_{ij})$ po $h \rightarrow 0$

-- lokální diskretizační chyba ... nahrazení $\Delta_x u \approx \frac{u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}}{h^2}$

... chyba $O(h^2)$

• nejdříve se budeme podrobněji věnovat počátečnímu úlohu \rightarrow problém stability

• Počáteční a kraj. úloha \rightarrow souvislosti

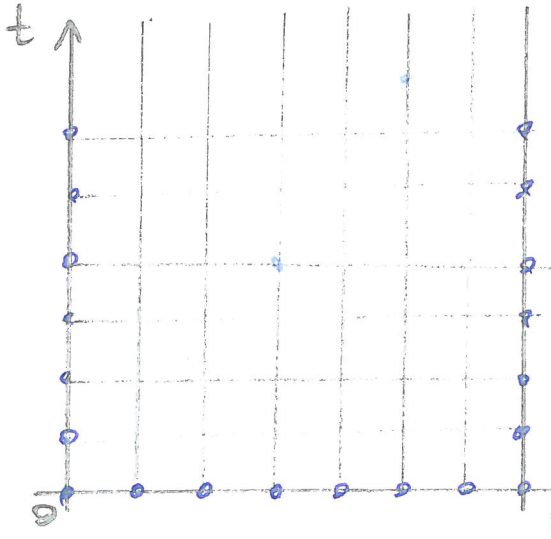
• kraj = limita poč. $v \rightarrow \infty$... a toho využijeme některé metody řešení

• počít ... kraj úlohy často třeba řešit pro provedení čas. evolu (implicit metody)

• metoda přímek: prostorová diskretizace PDE zanechá (method of lines) $v_{ij}(t)$ -- + použijeme standard metod.

P1 - polučování

pro jednoduchost jedna prostor $x \in \mathbb{R}$ a jedna čas $t \in (0, \infty)$ pro $(0, 1) \subset \mathbb{R}$



SIT: (x_i, t_m) $x_i = h i$ $i = 0, 1, \dots, N$
 $t_m = k m$ $m = 0, 1, \dots$

prostorový a časový krok: h a k

Reprezentace řešení:

$u(x_i, t_m) \approx v_i^m$... číslo v^m
 ... vektor bodů
 $(v_0^m, v_1^m, \dots, v_N^m)^T$

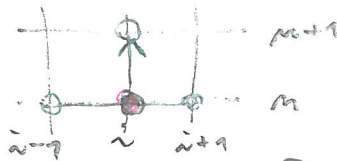
Reprezentace poč. a okraj podmínek: $v_i^0 = f_i$

$v_0^m = v_N^m = 0$

Reprezentace PDE:

- Explicitní Euler: $\frac{v_i^{m+1} - v_i^m}{k} = \frac{v_{i+1}^m - 2v_i^m + v_{i-1}^m}{h^2} + S_i^m$ (EE)

šablona:

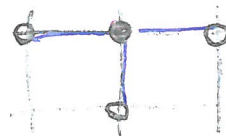


diskretizační chyba: $O(k)$; $O(h^2)$

- Implicitní Euler: $\frac{v_i^{m+1} - v_i^m}{k} = \frac{v_{i+1}^{m+1} - 2v_i^{m+1} + v_{i-1}^{m+1}}{h^2} + S_i^{m+1}$ (IE)

diskr. chyba ... stejná

šablona:



... nebo řešit soust. rovnic:

def matice $T_{N-1} \equiv \begin{pmatrix} 2 & -1 & & & 0 \\ -1 & 2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & -1 & 2 \end{pmatrix}$

... pozit. definitní

... rozměr matice je $N-1$
 = počet vnitř. bodů
 (pro Dirichlet. okraj. podm.)

(EE): $v^{m+1} = v^m - \frac{k}{h^2} T_{N-1} v^m + k S^m = (I - \frac{k}{h^2} T_{N-1}) v^m + k S^m$

(IE): $(I + \frac{k}{h^2} T_{N-1}) v^{m+1} = v^m + k S^{m+1}$

tridiagonální soust rovnic (okraj. úloha)

Numerické testování (P1 - parabolování)

nejdříve pozn (o řešení rovnice vedení tepla)

připomenutí: Fundamentální řešení pro $u_t(x,t) = u_{xx}(x,t)$

na $x \in (-\infty, \infty)$ je lokálně $u(x,t) = \phi(x,t)$

splňující poč. podmínku $u(x,t=0+) = \delta(x)$

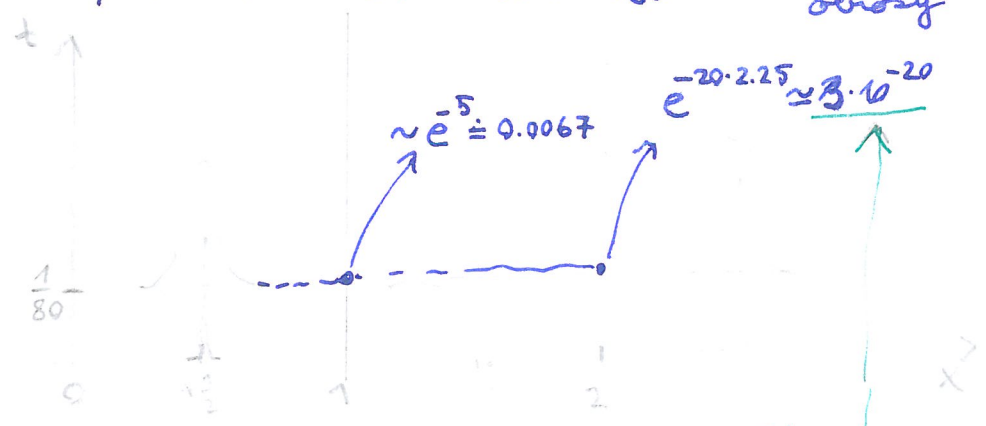
potom obecné řešení s poč. podmínkou $u(x,t=0+) = g(x)$

je $u(x,t) = \int g(y) \phi(x-y,t) dy$

Fundamentální řešení je známe: $\phi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-x^2/4t}$

Pro testování naší úlohy na $x \in (0,1)$ showbujeme

řešení jako $u(x,t) = \phi(x - \frac{1}{2}, t + \frac{1}{80}) \cdot \sqrt{\frac{4\pi}{80}} + \text{scadlové obrazy}$



t_0 $u(x,0) = e^{-20(x-\frac{1}{2})^2} - e^{-20(x-\frac{3}{2})^2} - e^{-20(x+\frac{1}{2})^2} + \dots$ na $x \in (0,1)$

poč. podmínka $u_t = u_{xx}$

Dirichletovy podmínky $u(0,t) = u(1,t) = 0$

$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{\tau}} [e^{-20(x-\frac{1}{2})^2/\tau} - \dots] ; \tau = 1 + 80t$

Numerický test: reprodukovat numericky metodou (EE) a (IE)

- pro $N=25$ (t_j $h=0.04$) a pro: (a) $k=\Delta t=0.00075$ } (EE)
- (b) $k=\Delta t=0.001$
- (c) $k=\Delta t=0.005$ → (IE)

výsledek: num. strana ... (a) vypadá rozumně
 (b) náhodná oscilace
 (c) rozumně

7. Parabolic Partial Differential Equations

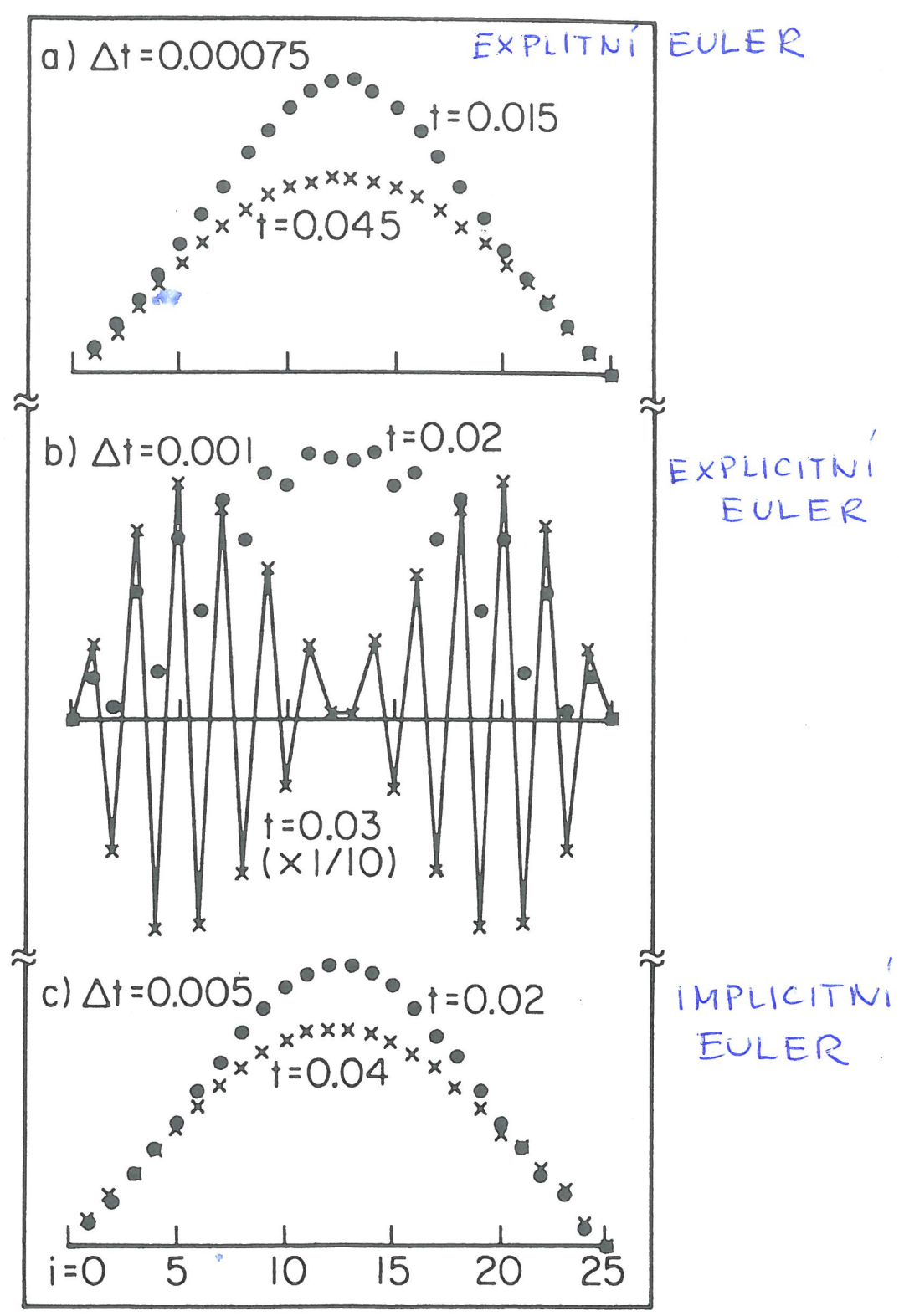


Figure 7.1 Results for the one-dimensional diffusion of a gaussian; a fixed lattice spacing $h = 0.04$ is used in all calculations. a) and b) result from the explicit algo-

Diskuse výsledků:

co se může pokazit: • podmíněnost ok.. anáre ϕ
dobře podmíněné (souv. na poč. podmín.)
- závisí na směru času

• chyba metody (diskretizací):

menší h a $k = \Delta t$
zhorší \uparrow \uparrow zlepší, ale nespojitě

• stabilita \checkmark \rightarrow ANALÝZA:

(EE): $V^{n+1} = (I - \frac{\Delta t}{h^2} T_{N-1}) V^n$

(IE): $V^{n+1} = (I + \frac{\Delta t}{h^2} T_{N-1}) V^n$

vl. čísla a vektory T_{N-1} :

$\Leftrightarrow \begin{matrix} 0 & 1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 1 & \\ & & & & 0 \end{matrix} \begin{matrix} N-1 & N \\ & \\ & \\ & \\ & \end{matrix} \quad T \vec{\phi} = \lambda \vec{\phi}$

$\Leftrightarrow 2\phi_j - \phi_{j+1} - \phi_{j-1} = \lambda \phi_j$

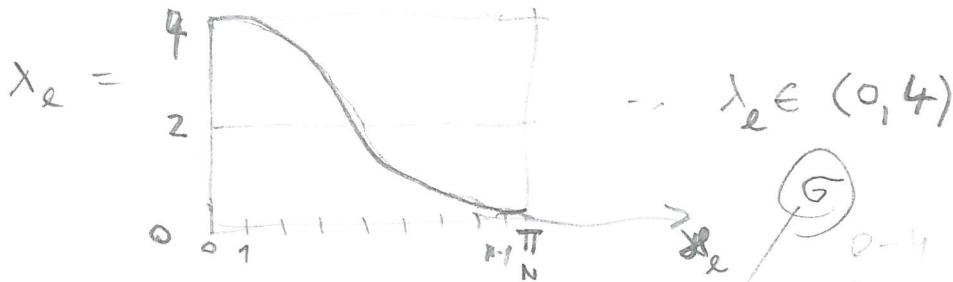
\rightarrow řešení $\phi_j = e^{i\mathcal{L}j}$ ($= \mathcal{L}j$) + okraj. podm. $\phi_{j=0} = \phi_{j=N} = 0$

$\phi_{j+1} + (\lambda - 2)\phi_j + \phi_{j-1} = 0 \Leftrightarrow \lambda = 2 - 2\cos \mathcal{L}$
 $+ \phi_j$ a $e^{i\mathcal{L}j} - e^{-i\mathcal{L}j}$ a $\sin \mathcal{L}j$
 $\sin \mathcal{L}N = 0$

$\Leftrightarrow \mathcal{L}N = \pi \cdot \mathcal{L} \quad \mathcal{L} = 1, 2, \dots, N-1 \rightarrow \mathcal{L}_l = \frac{\pi l}{N}$

... řešení $\sin \frac{\mathcal{L}\pi l}{N}$; $\mathcal{L} = N$ už není řeš. a pak se opakuje

t ; vl. č.




faktor zesílení:

$g(\mathcal{L}) = I - \frac{\Delta t}{h^2} \lambda = I - \frac{\Delta t}{h^2} (2 - \cos \mathcal{L})$

stabilita $|g(\mathcal{L})| \leq 1 \Leftrightarrow 1 - 4 \frac{\Delta t}{h^2} \geq -1 \Leftrightarrow \Delta t \geq 4 \frac{\Delta t}{h^2}$

$\rightarrow \Delta t \leq \frac{1}{2} h^2 \quad (\frac{1}{2} 0.0016 = 0.0008)$

① Opakování: Úvod do kon. dif. $\frac{\partial u}{\partial t} = A u$ A... (diferenciální) oper.
 .. poč. úloha \rightarrow okraj. podm. u... funkce
 přibližné řešení na síti: $U_i^A \approx u(x_i, t^n)$ $x_i = ih$
 $t^n = nk$

diferenciální schema ... vztah mezi sítí a souřad. U_i^A
 šablona 
 EE IE CN

chyba a řád metody ... okraj. podmínky
 zmínit problém z minulou $f''' = 0$

Konečné diference pro prostor. proměnné

- ... nahrazení operátorem A -- koneč. diferencemi
- ... obecně nahrazení + derivací diferenc. formulami

zatím jsme používali: $u_f(x_i) = \frac{1}{2}(f_{i+1} + f_{i-1}) + O(h^2)$
 $u'(x_i) = \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{h} + O(h^2) = \frac{u_i - u_{i-1}}{h} + O(h^2)$
 $= \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{h} + O(h^2) \quad \begin{matrix} \rightarrow \Delta u_{i-1} \\ = \frac{\Delta u_{i-1}}{h} \end{matrix}$
 $u''(x_i) = \frac{f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}}{h^2} + O(h^2) = \frac{\Delta^2 u_{i-1}}{h^2}$

přesnější formule ... pomocí diferenc. operátorů na gridu
 ... vit pozn \approx L.S.

Metoda neurčitých koeficientů:

Př: 5-bodová centráln. aprox. 2. derivace: $u''(x_i)$ pomocí $u_{i-2}, u_{i-1}, u_i, u_{i+1}, u_{i+2}$
 ... $u_{i+1} = u_i + h u' + \frac{1}{2} h^2 u'' + \dots$ podobně

+ hledání koef: $u'' \approx C_{-2} u_{i-2} + C_{-1} u_{i-1} + C_0 u_i + C_1 u_{i+1} + C_2 u_{i+2}$

aby koef u'' byl 1 a vymizely koef. u $u(x_i), u', u''', u''''$

$\rightarrow u''(x_i) = \frac{1}{h^2} \left(-\frac{1}{2} u_{i-2} + \frac{4}{3} u_{i-1} - \frac{5}{2} u_i + \frac{4}{3} u_{i+1} - \frac{1}{2} u_{i+2} \right)$

Derivace interpol. poly: (i neekvid. gridy)

.. PR 3. bod. vzorec pro 2 derivaci x_0, x_1, x_2

$P_2(x) = u_0 \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} + \dots$ (cyklické) \rightarrow PR

$\rightarrow P_2''(x) = \frac{2u_0}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} + \dots$ (cykl.) ne spec. př. ekvid. gridy:
 $= \frac{2u_0}{(-h)(-2h)} + \frac{2u_1}{(-h)h} + \frac{2u_2}{2h \cdot h} = \frac{u_0 - 2u_1 - u_2}{h^2}$

② Obecně Fornberg "Generation of Fin. Diff. Formulas on Arb. Spaced Grids"
 Math. of Comput. 51 (1988) 699

→ obecné rekurzivní formule pro koef. C_{mj}^m

$$\frac{d^m}{dx^m} u(x) \approx \sum_{j=0}^{m-1} C_{mj}^m f(x_j)$$

+ udělal lepší tabulku

→ diskrétní derivace prvního řádu: $u'_i = \frac{u_i - u_{i-1}}{h} + O(h^2)$

diskrétní derivace druhého řádu: $u''_i = \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} + O(h^2)$

dále $u_i = \frac{1}{2} (u_{i+\frac{1}{2}} + u_{i-\frac{1}{2}}) + O(h^2)$ + 5 bod. formule

$$u_i = \frac{u_{i+\frac{1}{2}} - u_{i-\frac{1}{2}}}{h} + O(h^2)$$

dále nerovnoměrné: $u'_i = \frac{u_{i+1} - u_i}{h} + O(h)$

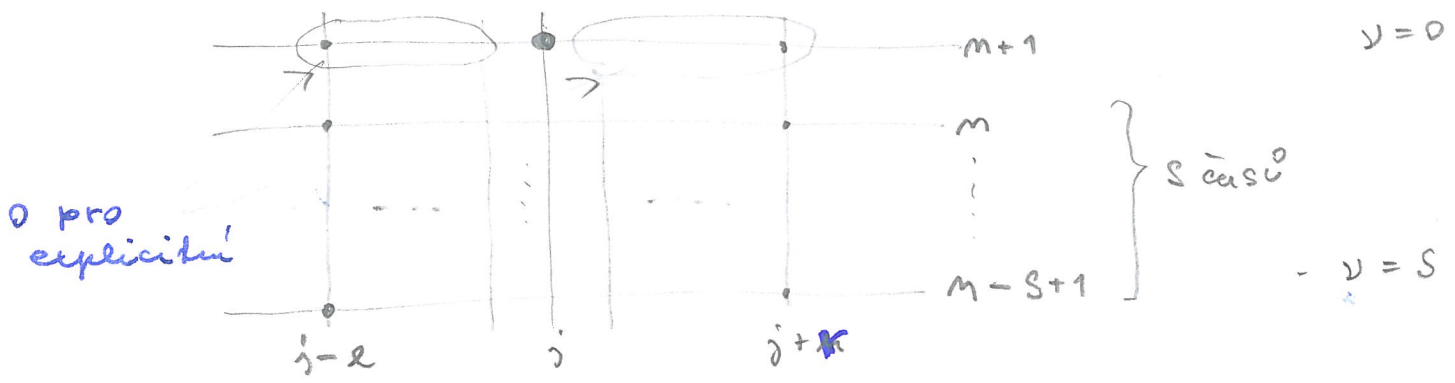
Obecná formulace metody koneč. diferencí

diskretizace prostor. proměnné → metoda přímek
 ≡ soustava obyč. difro

+ lin. multikrok. formule → finální dif. schema

Def: S -krok. lin. dif. formule $\sum_{\nu=0}^S \sum_{\mu=-L}^R \alpha_{\mu\nu} v_{j+\mu}^{m+1-\nu} = 0$

o měřitelích $d_{\mu\nu}$; $\alpha_{00} \neq 0$ a měřitelé $d_{-L,\nu}, d_{R,\nu} \neq 0$



vektorová verze: u ... chápáno jako vektor
 $d_{\mu\nu}$ jako matice a podmínka $\alpha \neq 0$ jako $d_{l,0} \neq 0$

PR: vlnová rovnice a advekce
 + Leap-frog metoda

3

Pozn: o implicitních metodách

... nutno invertovat velké soust. rovnice ... řešení má N^d volně
množice N^d

.. nahra větš. řídké

Přehled metod ... kopii tabulky z Trefethera

pozn: - Gauss elim. $\rightarrow N^3$

- banded ... kečlování na detailech

- Jacobia SOR řešena poději a CG a multigrid
... ϵ předpraní přesně.

Fourierova analýza kromě dif. schémat

obecně psán. úloha: $\frac{\partial u}{\partial t} = Au \quad 0 \leq t \leq T \quad u(0) = u_0$

kde $A: B \rightarrow B$ je lin. oper. na Banach. prostoru s normou $\|\cdot\|$

a $u(t), u_0 \in B$ + předp. dobr. podmíněnost $\exists!$ řeš. $u(t) \forall t_0$
a $u(t)$ náv. opojitě na u_0

... A většinou diferenciální oper.

okraj. podmínky ... matice současně def B

Formulace dif. schématu ... nejdříve explicitní t-krok. formule

$$v_j^{n+1} = S_k v_j^n$$

$S = S_k$... náv. na čas. kroku k

a jde o line. oper. na $\bar{B} \rightarrow \bar{B}$

pozn. o dif. schématech:

- transl. invariante (náv. okraj. podm. \rightarrow pozn. poději)

ale na $x \in (-\infty, \infty) \dots \bar{B} = L^2$

- prostor approx. dif. formulí lze dále jako konvoluce

$Sv = a * v \Rightarrow$ ve Fourier transf. jen násobení

$$\widehat{Sv}(\xi) = \widehat{a * v} = \hat{a}(\xi) \hat{v}(\xi)$$

+ Parsevalova rovnost zaručuje ekv. normy v přímém a Four. prost.

Faktor zesílení (amplification factor) $g(\xi) = \hat{a}(\xi)$

platí: $\|S\| \equiv \sup \frac{\|Sv\|}{\|v\|} = \max_{\xi} g(\xi)$

$$\rightarrow \|v^n\| \leq \|S\|^n \|v^0\|$$

Prakticky: Faktor zesílení sítě lze darovat (monochromatického) test. řešením: $v_j^n = g^n e^{i\xi j h}$
do dif. schématu

5) Oblebná: Implicitní metoda

... matice zesílení $B(\xi) = \hat{b}(\xi)^{-1} \hat{a}(\xi)$

a platí $\|B^m\| \leq \|B\|_{\infty}^m \|I\|$

$\|B\|_{\infty} = \text{majr. vl. č.}$

PR: rovná rovnice: $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$

1. volba žebříků $x \rightarrow u_{tt} = u_{xx}$

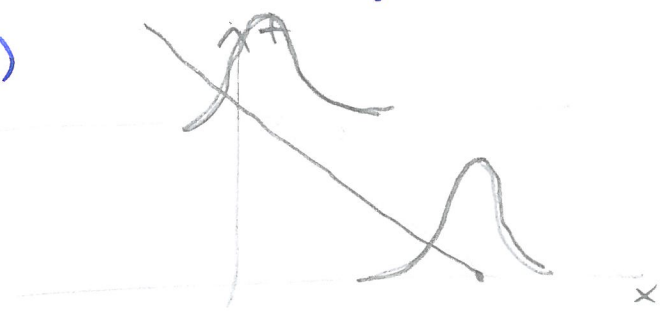
2. uspořádání vektorů: $\begin{pmatrix} u = u_x \\ v = u_t \end{pmatrix} \rightarrow$

~~$\Delta_t = \Delta_x$~~ ... vl. č. $\Delta_x = \Delta_t$... konzistence

- tj. def $u = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \dots \partial_t u = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} u_x$

PR: jednodušší verze ... advekce (unášení): $u_t = u_x$

... řešení $u(x, t) = f(x+t)$



... obvyklá schémata: $\lambda \equiv k/h$

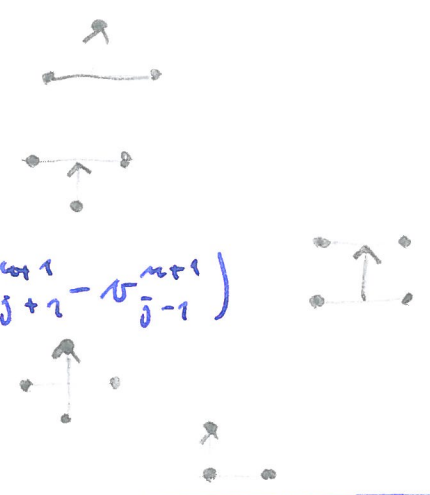
EE: $u_j^{n+1} = u_j^n + \frac{1}{2} \lambda (u_{j+1}^n - u_{j-1}^n)$

IE: $u_j^{n+1} = u_j^n + \frac{1}{2} \lambda (u_{j+1}^{n+1} - u_{j-1}^{n+1})$

CN: $u_j^{n+1} = u_j^n + \frac{1}{4} \lambda (u_{j+1}^n - u_{j-1}^n + u_{j+1}^{n+1} - u_{j-1}^{n+1})$

LF: $u_j^{n+1} = u_j^{n-1} + \lambda (u_{j+1}^n - u_{j-1}^n)$

Upwind: $u_j^{n+1} = u_j^n + \lambda (u_{j+1}^n - u_j^n)$



LF: LF metoda pro advekci: $-\frac{\lambda}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \frac{\lambda}{2} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$

LF metoda pro vln. č. $\begin{pmatrix} I \\ I \end{pmatrix}$

$-\frac{\lambda}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \frac{\lambda}{2} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$

Přesnost, stabilita a konvergence schématu

6

Připomenout: Počát. úloha: $\partial_t u_x(t) = A u(t) \quad t \in \langle 0, T \rangle$

$$u(0) = u_0$$

+ předp: dobře podmíněná úloha tj $\exists!$ řeš. spoj. náv. na poč. datel

jednu krok. metodu def: $S_k: B \rightarrow B$

tj

$$v^{n+1} = S_k v^n$$

$$t_j \quad v^n = S_k^n v^0$$

... uložili jsme, že salvuje vícebod a implicit. formule

~~Def: konvergence~~

Konvergence a závislost na h, k :

obecně máme chybu nerámíštes na sobě pro h a k

... mají $CV \dots O(h^2), O(k^2)$

v dalším bodě předpokládá, že $h = h(k)$

tj; mají $\lambda \equiv \frac{k}{h} = \text{koust}$ tj; $h \equiv h(k) = k/\lambda$.. automaticky $h \rightarrow 0$ když $k \rightarrow 0$

nebo $h = \sqrt{k/\sigma}$ tj; $\sigma = \frac{k}{h^2} = \text{koust.}$

{ volíme pro EE, FE ... $O(k), O(k^2)$ }

Def: Řád metody a konzistence

$\{S_k\}_{k \rightarrow 0}$ má řád přesnosti p , když

$$\|u(t+k) - S_k u(t)\| = O(k^{p+1}) \quad \text{pro } k \rightarrow 0$$

$\forall t \in \langle 0, T \rangle$, kde $u(t)$ je libovolná dost hladká řeš. poč. problému

Metoda je konzist. když je řádu přesnosti $p > 0$

Def: konvergence

$\{S_k\}$ je konvergentní pokud $\lim_{\substack{k \rightarrow 0 \\ nk=t}} \|S_k^n u(0) - u(t)\| = 0$

$\forall t \in \langle 0, T \rangle$; kde $u(t)$ je řeš. poč. probl pro libovol. data u_0 .

Princip: ověření konzistence je snadné, ověření konvergence obtížné.

PR: Řád a konzistence metody Laxe a Këndroffa pro $u_t = u_x$

motivace: najít metodu 2.ř. (Laxenou) pro \rightarrow

pomoc. body



tj formula:
$$v_j^{n+1} = v_j^n + \frac{k}{h} (v_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - v_{j-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}})$$

$$v_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} (v_j^n + v_{j+1}^n) + \frac{1}{2} \frac{k}{h} (v_{j+1}^n - v_j^n)$$

$$v_{j-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} (v_{j-1}^n + v_j^n) + \frac{1}{2} \frac{k}{h} (v_j^n - v_{j-1}^n)$$

$$\rightarrow v_j^{n+1} = v_j^n + \frac{k}{2h} (v_{j+1}^n - v_{j-1}^n) + \frac{k^2}{2h^2} (v_{j+1}^n - 2v_j^n + v_{j-1}^n) \equiv S_k v^n$$

Rád metody: $\|u(t+k) - S_k u(t)\|$

.. Taylor $u(x,t+k) = u + k u_t + \frac{1}{2} k^2 u_{tt} + \dots$ (hodnoty a derivace v (x_j, t^n))
 $u(x \pm \frac{k}{\lambda}, t) = u \pm \frac{k}{\lambda} u_x + \frac{1}{2} \frac{k^2}{\lambda^2} u_{xx} + \dots$
 + u je řeš. problém tj; $u_x = u_t$ a $u_{xx} = \partial_x u_t = \partial_t u_x = u_{tt}$

tj; prvá strana: $u + \frac{1}{2} \frac{k^2}{\lambda^2} (2 \frac{k}{\lambda} u_x + O(k^3)) + \frac{\lambda^2}{2} [\frac{k^2}{\lambda^2} u_{tt} + O(k^4)]$

$$= u + k u_t + \frac{k^2}{2} u_{tt} + O(k^3) \checkmark$$

Def: Stabilita:

$\{S_k\}$ je stabilní pokud pro nějaké $C > 0$: $\|S_k^n\| \leq C$
 $\forall n, k: 0 \leq nk \leq T$

tj; $\|v^n\| = \|S_k^n v^0\| \leq C \|v^0\| \quad \forall v^0 \text{ a } \forall n, k$

Fundamentální věta:

LAXOVA VĚTA O EKVIVALENCI (konverg. a stabilita)

Nechť $\{S_k\}$ je konzist. aproximace dobře položené lineární počáteční úlohy. Pak $\{S_k\}$ je konvergentní \Leftrightarrow je stabilní.

tj u lineárních rovnic je (ne)stabilita jediné co může polovíc konvergence

tj \forall která stačí ověřit rád metody a stabilitu

Navic bonus:

GLOBALNÍ PŘESNOST:

konvergentní metoda mádu přesnosti p aplikovaná na dobře položené problém + dost hladká při. pedu \Rightarrow

$$\|v(t) - u(t)\| = O(k^p) \text{ na } k \rightarrow 0$$

stejně $\forall t \in (0, T)$.

Pozn:

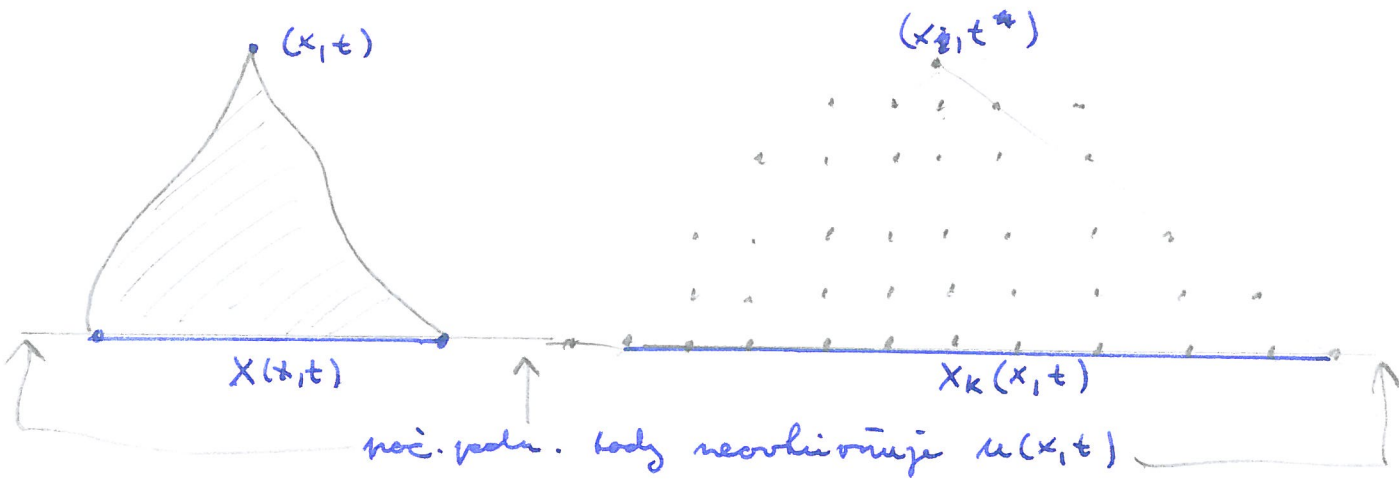
- Takto přešlup sábirí. na $h = h(k)$
... stabilita a tedy konv. numer. náv. na
- Teorie nerovinných parabol / hyperbol. problémů .. je postavená
jiná dobrá podmínka rovn ... vztah je $\partial_t u = -\partial_{xx} u$

CFL Podmínka

- ... nutná podmínka konvergence
- ... CFL \equiv Courant, Friedrichs, Lax γ -- 1928 .. před počítačem!
- ... standardně pro hyperbolické problémy typu $u_t = v u_x$
vlna se šíří rychlostí v .. numerický "signál" se musí šířit
rychleji t ; $\gamma = v \cdot \frac{\Delta t}{\Delta x} \leq C$... C závisí na DDR a volbě
 $C \approx 1$

Přesněji:

Matematická a numerická oblast závislosti



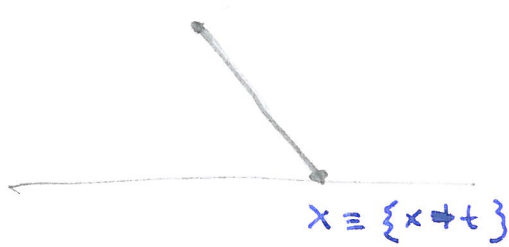
Př: $u_t = u_{xx}$; $u_t = i u_{xx}$

• -- Parabolické problémy, signál se šíří nekonečně rychle
 $X(x_i, t) = \mathbb{R} \quad \forall t > 0$ (i když závislost exp. slabá)

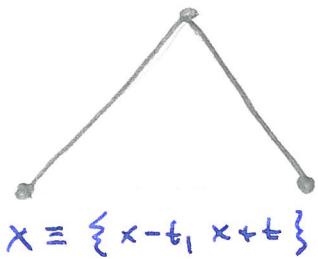
• -- Hyperbolické problémy

$u_t = u_x$, $u_t = u_x + u$, $u_{tt} = u_{xx}$, $u_t = (\frac{1}{2} u^2)_x$
 $X(x_i, t)$ konečná oblast omezená charakteristikami.

Např: $u_t = u_x$



$u_{tt} = u_{xx}$



Pr: numerická oblasť závislosti:

EE ... viz výše. IE ... $X_k = \mathbb{R}$... závisí na viem.

... závisí rovněž na funkci $h = h(k)$

vojna: EE Δ $\sigma = \frac{k}{\Delta t} = \text{konst}$ tj $h = \sqrt{\frac{k}{\sigma}}$

tj $X_k(x, t) = x \pm n \cdot h = x \pm \frac{t}{k} \cdot \sqrt{\frac{k}{\sigma}} = x \pm t \sqrt{\frac{1}{\sigma k}} \rightarrow \mathbb{R}$
pro $k \rightarrow 0$

obecně: CFL podmínka (nutná podmínka konvergence)
 $X(x, t) \subseteq X_0(x, t)$

geniálně jednoduché a. důležitá veličina (sjevné)

výhoda: platí pro nelineární problémy!

Důsledky:

- pro lineární problémy je CFL rovněž nutnou podmínkou stability (LAX: stabilita \Leftrightarrow konvergence \Leftarrow pro konzist. probl. nelin.)
- Parabolický problém ... $X(x, t) = \mathbb{R}$
 kdy explicitní metoda může být konvergentní jen tehdy
 je-li $k = O(h)$ $h \rightarrow 0$
 - tj. parabol. problémy řeší ... explicitně nebo implicitně nel.
 - nemusí platit pro nelineární jry
 - a parci ... ~~explicitně~~ Δt ... může selhat pro menší Δt .
- velmi jednoduchá podmínka + platí pro nelineární rovnice, ale
 bolhužel jen nutná podmínka.

von Neumann analýza stability

... aplikace fourierovy analýzy a faktori sesílení

Věta: (von Neumann podm. pro skalár 1-krok)

lineární, skalární jednod. dif. rovnice s konst. koeficienty
je stabilní (v L_h^2 normě) \Leftrightarrow

faktory sesílení splňují $|g_k(\xi)| \leq 1 + O(k)$

pro $k \rightarrow 0$, zejména $\forall \xi \in \langle -\pi/h, \pi/h \rangle$

pozn k faktoru $O(k)$... platí $(1 + \frac{1}{n})^n = e$

$(1 + \frac{c}{n})^n = e^c$

Drůlk lady:

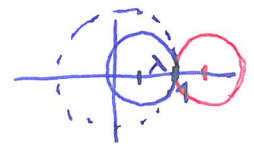
$\mu_t = \mu_x$

(i) upwind: $v_j^{n+1} = S_k v_j^n = v_j^n + \lambda (v_{j+1}^n - v_j^n)$

$\xi \in \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle$

$v_j^n = g^n e^{i\xi j h} \rightarrow g(\xi) = 1 + \lambda (e^{i\xi h} - 1)$

Downwind $g(\xi) = 1 + \lambda (1 - e^{-i\xi h})$



(ii) Lax-Wendroff:

$v_j^{n+1} = S_k v_j^n = v_j^n + \frac{1}{2} \lambda (\sigma_{j+1}^n - \sigma_{j-1}^n) + \frac{1}{2} \lambda^2 (\sigma_{j+1}^n - 2\sigma_j^n + \sigma_{j-1}^n)$

$\rightarrow g(\xi) = 1 + i\lambda \sin \xi h - 2\lambda^2 \sin^2 \frac{\xi h}{2}$

$\mu_t = \mu_{xx}$

(i) Euler: $v_j^{n+1} = v_j^n + \sigma (\sigma_{j+1}^n - 2\sigma_j^n + \sigma_{j-1}^n)$

$\sigma = \frac{k}{h^2}$

$\rightarrow g(\xi) = 1 - 4\sigma \sin^2 \frac{\xi h}{2}$

CN: $v_j^{n+1} - v_j^n = \frac{1}{2} \sigma (\sigma_{j+1}^n - 2\sigma_j^n + \sigma_{j-1}^n) + \frac{1}{2} \sigma (\sigma_{j+1}^{n+1} - 2\sigma_j^{n+1} + \sigma_{j-1}^{n+1})$

$v_j^n = g^n e^{i\xi j h} \rightarrow g(\xi) = \frac{1 - 2\sigma \sin^2 \frac{\xi h}{2}}{1 + 2\sigma \sin^2 \frac{\xi h}{2}}$

PRÍSTÍ ROK: systematictěji rozebrat jednotlivá schémata

\rightarrow zvláště hypb. rovnice .. nestabilita Eulera + LAKova náprava

.. a domněnad Trefethena

Von-Neumannova analýza stability pro vícešk. a vektor. formule (11)

připomenutí:

Stabilita: ... formule $v^{n+1} = S_k v^n$ je stabilní pokud $\exists C$:
 $\|S_k^n\| \leq C \quad \forall n, k \quad 0 \leq nk \leq T$

→ Laxova věta ... konsist. formule dobře podm. úlohy: konverg \Leftrightarrow stabilní

+ Fourier analýza: $\hat{b}(\xi) \hat{v}^{n+1}(\xi) = \hat{a}(\xi) \hat{v}^n(\xi)$
 $\uparrow \neq 1$ pro implicitní; pro vektor formuli a, b... matice

→ matice resilejší $\hat{v}^{n+1}(\xi) = \hat{G}(\xi) \hat{v}^n(\xi)$; $\hat{G}(\xi) = \hat{b}(\xi)^{-1} \hat{a}(\xi)$

Stabilita $\rightarrow \|G_k(\xi)\| \leq C$ pro nějaké C a $\forall k, m: 0 \leq km \leq T$

Problém nenormální matice ... $[A, A^+] \neq 0$

normální matice ... lze diagonalizovat $\|G\| = \text{nejv. vl. č.} = \rho(G)$

obecně $\rho(G)^m \leq \|G^m\| \leq \|G\|^m$

Věta: S_k lineární formule s konst. koef. bal

(a) $\rho(G_k(\xi)) \leq 1 + O(k)$ je nutná podm. stability (von Neumann)

(b) $\|G_k(\xi)\| \leq 1 + O(k)$ je postač. podm. stability

zjednodušeně ... ověřují se \forall vl. č. $G_k(\xi)$, že jsou menší než 1

problém ... měřena není $\rho(G)$ a $\|G\|$ pro nenormální matice.

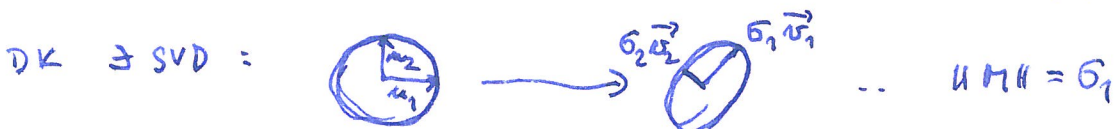
PR: matice $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$... vl. č. $(\lambda-1)^2 = 0 \Rightarrow \lambda = 1$ 2 nás. vl. č. ale jen 1 vl. v.!

$\rightarrow \rho(M) = 1$

$\|M\|$? $\|M\| = \sup_{\|x\|=1} \|Mx\|$ $x = \begin{pmatrix} \sin \varphi \\ \cos \varphi \end{pmatrix}$

$Mx = \begin{pmatrix} \sin \varphi + \cos \varphi \\ \cos \varphi \end{pmatrix}$; $\|Mx\|^2 = \cos^2 + \sin^2 + 2 \sin \cos + \cos^2 \leq \sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}} \approx 1.62$

→ jiný pohled SVD $M = V \Sigma U^T$... $\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_2 \end{pmatrix}$ $\sigma_{1,2} = \sqrt{\frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}}$



→ omezenost (stabilita) daná σ_1 ; von Neumann ... λ_1 normální matice $\lambda_1 = \sigma_1$

Pozn: pseudospektrum ... viz Trefethen

$\lambda \in \mathbb{C}$ je ϵ -pseudo vl. č. A pokud $[(i) \Leftrightarrow (ii)]$

(i) $\|(\lambda - A)^{-1}\| \geq \epsilon^{-1}$

(ii) λ je vl. č. $A + E$ pro nějakou maticu $E \in \mathbb{C}^{n \times n}$; $\|E\| \leq \epsilon$

$\{\forall \lambda\} \rightarrow \Lambda_\epsilon(A)$

VĚTA: S_k je stabilní $\| \cdot \|_2 \Leftrightarrow \rho_\epsilon(G_k(\xi)) \leq 1 + O(\epsilon) + O(k)$
pro $\epsilon \rightarrow 0$ a $k \rightarrow 0$ (stejně jako vzhledem $\xi \in (-\frac{\pi}{h}, \frac{\pi}{h})$)

Numerická disperze a disipace

Pro jednoduché lin PDE máme ~~obecně~~ disperzní relaci $\omega = \omega(\xi)$

- PR: $u_t = u_x \dots \omega = \xi$... $\left. \begin{array}{l} \text{... maticí ...} \\ \text{... disipací ...} \end{array} \right\} \text{solna}$ $u(x,t) = e^{i(\omega t + \xi x)}$
- $u_{tt} = u_{xx} \dots \omega^2 = \xi^2$ t; $\omega = \pm \xi$
- $u_t = u_{xx} \dots i\omega = -\xi^2$... disipativní chování $v e^{-\omega t}$
- $u_t = i u_{xx} \dots \omega = -\xi^2$ solna

Numerická dif.-schemata ... rovnice lze splnit $v_j^n = e^{i(\xi j h + \omega n k)}$
 \Rightarrow disperzní relace schematu (dif. formule)

PR: • Leap-Frog pro $u_x = u_t$: $\sin \omega k = \lambda \sin \xi h$
 \rightarrow nejvíc. n. v k a h reprodukce $\omega = \xi$
odlehlejší má jak malé h a k pro dif.-předu. dané frog.

• jiné příklady $u_t = u_{xx}$ CN $\rightarrow i \tan \frac{\omega k}{2} = -2\sigma \sin^2 \frac{\xi h}{2}$
- opět + nejvíc. n. - apax. správ. kvadr. disperzi

Terminologie: $\text{Im } \omega = 0$ -- nedisipativní
 $\text{Im } \omega > 0 \neq \xi \neq 0$ -- disipativní

PR: stabilita Leap-Frog: $v_j^{n+1} = v_j^{n-1} + \lambda(v_{j+1}^n - v_{j-1}^n)$; def $v_j^n \equiv \begin{pmatrix} v_j^n \\ v_{j-1}^n \end{pmatrix}$

$\rightarrow v_j^{n+1} = \begin{pmatrix} -\lambda & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} v_{j-1}^n + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} v_j^n + \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} v_{j+1}^n$

$\rightarrow G(\xi) = \begin{pmatrix} 2i\lambda \sin \xi h & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ pro $\lambda < 1$ je $\|G(\xi)\| \leq C$
ale pro $\lambda = 1$ není př: $G(\frac{\pi}{2h}) = \begin{pmatrix} 2i & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

... $\lambda = i$ 2 nás. vl. č.

res. ve tvaru vlny: $v_j^n = z^n x^j = e^{i\omega k n + i\zeta h j}$

STABILITA OKRAJ. PODM.
(Trefethen)

leftgoing and rightgoing solution of fin. diff. formula $\xi_L(\omega)$ $\xi_R(\omega)$

OKRAJ. PODM.: ... hledání řešení ve tvaru $v_j^n = e^{i\omega t} (d_L e^{i\xi_L k} + d_R e^{i\xi_R k})$

far. rych $-\frac{\omega}{\zeta}$; grup. $-\frac{d\omega}{d\zeta}$

koef odrazu: $R(\omega) = \frac{d_R}{d_L}$

levá okraj. podmínka stability \Leftrightarrow žádné řešení s $d_L = 0$

pozor $d_L = 0$ znamená porušení w normování $R = \infty$

... malá nestabilita
(nebezpečná
vzrostlo odlišně)

PK: leap-Frog pro $m_x = m_x$ tj

$$\frac{u_j^{n+1} - v_j^{n-1}}{2k} = \frac{u_{j+1}^n - v_{j-1}^n}{2h}$$

disperze: $u_j^{n+1} - v_j^{n-1} = \lambda (v_{j+1}^n - v_{j-1}^n)$

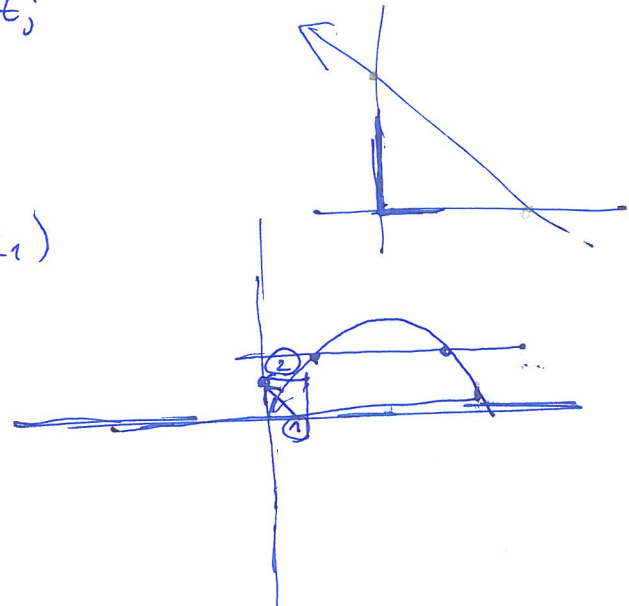
$\sin \omega k = \lambda \sin \zeta h$

$h > k$

pro $k=h$... $\sin \omega = \sin \zeta$

tj $\omega = \zeta \rightarrow$

$\omega = \pi - \zeta$



tj řešení ve tvaru: $v_j^n = e^{i\omega t} (d_L e^{-i\omega t} + d_R e^{+i\omega t})$
 $= d_R + d_L e^{i\omega t}$

možnosti: ① $v_0^{n+1} = v_1^n$ $v_j^n = e^{i\omega k n} (d_L e^{-i\omega h j} + d_R e^{+i\omega h j})$

$e^{i\omega k n} (d_L + d_R) = d_L e^{-i\omega h n} + d_R e^{+i\omega h n}$

pro $d_L = 0$: $d_R (e^{i\omega} - e^{-i\omega}) = 0$... má řešení
 ... nestabilní

② $v_0^{n+1} = v_1^{n+1}$... $d_L + d_R = d_L e^{-i\omega} + d_R e^{+i\omega}$

$d_L = 0 \Rightarrow d_R (1 - e^{i\omega}) = 0 \Rightarrow d_R = 0$

Numerické řešení okrajových úloh

a. Iterační metody řešení soustav lineárních

lineární

$$u_k = L(u) \cdot u$$

implicitní ~~$u^{m+1} = u^m$~~

$$\begin{aligned} \frac{v^{m+1} - v^m}{k} &= \cancel{L(u^{m+1})} \cdot L(u^m) \cdot A \cdot (v^m - v^m) + O(k) \\ &= L(u^m) \cdot A \cdot v^{m+1} \\ &= L(u^m) \cdot A \cdot v^{m+1} + O(k) \end{aligned}$$

$$\rightarrow v^{m+1} = v^m + O(k)$$

+ iterace ... metody typu prediktor - korektor.

$$(1 - kL(u^m))v^{m+1} = v^m + O(k^2)$$