Abych byl konzist. s předch. měl bych změnit u → v

Numerické řešení okrajových úloh (kon. dif.)
a Iterační metody řešení soustav lin. rc.

(zmínit shooting × relax. metody)

Úvod a motivace:

PŘ: modelová úloha: Poisson $+\Delta u = S$ na Ω

+ okraj. podm... např. Dirichlet $u = f$ na $\partial\Omega$

v 2D: $(+\partial_{xx} + \partial_{yy})\, u(x,y) = S(x,y)$

pozn: • úlohy tohoto typu často dostáváme jako stac. řešení pro ~~počát. úlohy~~

Parabol. poč. úlohy: $-i\partial_t u = Lu + S$ (i) L je pozit. definit. oper.

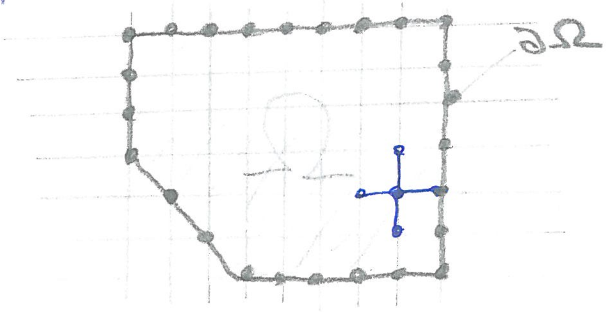
$-\partial_t u = Lu + S$ (ii) např. $-\Delta = L$

Hyperbol. poč. úlohy: $\partial_{tt} u = Lu + S$ (iii)

Pro disipativní úlohy (ii) navíc ~~...~~ $u \to$ řeš. okr. úl. pro $t \to \infty$

• úlohy tohoto typu rovněž předst. 1 krok implicitních formulí pro počát. úlohy.

PŘ: (pokrač.) Reprezentace úlohy na síti



$$+\Delta u = \frac{-2u_{ij} + u_{i+1j} + u_{i-1j}}{h^2} + \frac{-2u_{ij} + u_{ij+1} + u_{ij-1}}{h^2} + O(h^2)$$

$$= S_{ij}$$

Soustava rovnic $Ax = b$

Poč. neznámých = počet vnitř. bodů

.. hraniční body $u = f$ přispějí k b

Problém .. řešení ~~N~~ rovnic pro n neznámých ... n^3 operací

př. 2D problém $N \times N = 100 \times 100$ bodů $= n$. ... složitost $\sim 10^{12}$ operací versus 1 GHz $\approx 10^9$ oper/s

Iterační metody:

PŘ: Jacobi ... $u_{ij} = \frac{1}{4}\left[u_{i+1j} + u_{i-1j} + u_{ij+1} + u_{ij-1} - h^2 S_{ij}\right]$

iterace $u^{(n+1)}_{ij} = \frac{1}{4}\left[u^{(n)}_{i+1j} + u^{(n)}_{i-1j} + u^{(n)}_{ij+1} + u^{(n)}_{ij-1} - h^2 S_{ij}\right]$ (*) → Relaxace

kde $u^{(0)}_{ij}$ je libovol. vč. odhad splň. okraj. podmínku

Proč by to mělo fungovat?

• Náhled 1: (*) lze chápat jako čas. vývoj pro $-\partial_t u = -\Delta u + S$ pomocí EE

podrobněji 1D: $u^{n+1}_j = u^n_j + \frac{\Delta t}{h^2}\left[u^n_{j+1} + u^n_{j-1} - 2u^n_j\right] - \Delta t\, S_j$ max. stabilní krok $\frac{\Delta t}{h^2} \le \frac{1}{2}$

b) $u_j^{n+1} = \frac{1}{2}\left[u_{j+1}^n + u_{j-1}^n\right] + \frac{1}{2}h^2 S_j^n$ **Relaxace 1D**

přesné řešení problému $-\partial_t u = Lu + S$

zapsané jako $u(t) = u_S + u_0(t)$, kde

u_S: $Lu_S + S = 0$ ... partikulární pro nehomogen.

$u_0(t)$: $-\partial_t u = Lu$ ... obec. pro homog. $|u\rangle = \sum_\lambda e^{-\lambda t}|\lambda\rangle\langle\lambda|u_0(0)\rangle$

kde jsme využili rozkladu $\longrightarrow 0$ pro $t \to \infty$

$L = \sum_\lambda |\lambda\rangle\langle\lambda|\,\lambda$ kde $\lambda > 0$ pro pozit. definit. symetrický operátor

to že jsme zvolili velké Δt nevadí ... pokazí jen $u_0(t)$

důležitá jen stabilita zaručující $u_0(t) \to 0$

stejně projde ve 2D

- Náhled 2: dá se DK, že každá iterace snižuje energii:

$$E[u] \equiv \int_\Omega dV \left\{\frac{1}{2}(\nabla u)^2 + Su\right\} \quad - \delta E = 0 \Rightarrow \Delta u + S = 0$$

$$\simeq \frac{1}{2}\sum_{ij}\left[(u_{ij} - u_{i-1j})^2 + (u_{ij} - u_{ij-1})^2\right] + h^2 \sum_{ij} S_{ij} u_{ij}$$

Obecná teorie iteračních metod

řešíme soustavu $Ax = b$

najdeme posloupnost $x_0, x_1, x_2 \dots x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x = A^{-1}b$

OBECNĚ: $A = M - K$; M je regulární

$$Ax = Mx - Kx = b \longrightarrow x = M^{-1}Kx + M^{-1}b = Rx + C$$

dále: $x^{(n+1)} = Rx^{(n)} + C$

konzistence metody: rovnici $x = Rx + C$ řeší jen $x = A^{-1}b$

konvergence metody: $x^{(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{} x = A^{-1}b$

Motivace postupu K je řídká matice a M snadno invertovatelná

$\longrightarrow$ jeden krok metody je rychlý

Různé metody ... volba K a M tak, aby
- snadná inverze
- rychlá konvergence

... do jisté míry protichůdné požadavky ... balance

PŘ (procvičování): Jakobiho metoda pro Poissona

1D: $\Delta u = S$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & & 0 \\ -1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -S_1 \\ -S_2 \\ \vdots \\ -S_N \end{pmatrix} h^2 \longrightarrow (L+D+U)x = b$$

$A = L + D + U \equiv (\ldots) + (\ldots) + (\ldots)$

$$x = \underbrace{-D^{-1}(L+U)}_{R_J} x + D^{-1} b$$

v našem př. $R_J = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & & 1 & 0 \end{pmatrix} \ldots$

konvergence? ... spektrum R_J ... hledání vl. v. ve tvaru $u_j = e^{ij\xi}$

+ okraj. podm. $\Rightarrow$ $u_j \simeq N \sin(j\xi)$ $\quad \xi = 1\cdot\frac{\pi}{N+1}, 2\cdot\frac{\pi}{N+1}, \ldots, N\cdot\frac{\pi}{N+1}$

vl. č. $\quad \lambda_j = \cos \xi$ $\quad \hookrightarrow$ diskretizace int. $\xi \in (0, \pi)$

největší vl. č. $\quad \lambda_N = \cos \pi \frac{1}{N+1} < 1$

$\lambda_N \simeq 1 - \frac{1}{2}\left(\pi \frac{1}{N+1}\right)^2$

Počet iterací pro konvergenci? chyba $\sim E_0 \lambda^n \sim 10^{-p}$

tj. pro přesnost na p deset. míst $\sim n = \frac{p \ln 10}{-\ln \lambda} \simeq \frac{p \ln 10}{\frac{1}{2}\frac{\pi^2}{N^2}} \sim O(N^2)$

2D:

$$\left(\begin{array}{cc|cc|c} 4 & -1 \quad 0 & -1 & 0 & \ldots \\ -1 & 4 \; \ddots & & \ddots & \\ 0 & \ddots \; 4 & 0 & -1 & \\ \hline -1 & 0 & 4 & -1 \quad 0 & \\ & \ddots & -1 & \ddots & \ddots \\ 0 & -1 & 0 & \ddots \; 4 & \\ \hline \vdots & & \ddots & & 4 \end{array}\right) \begin{pmatrix} u_{11} \\ u_{21} \\ \vdots \\ u_{N1} \\ u_{12} \\ \vdots \\ u_{N2} \\ \vdots \\ u_{NN} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -h^2 S_{11} \\ \vdots \\ -h^2 S_{N1} \\ \vdots \\ \vdots \\ -h^2 S_{NN} \end{pmatrix}$$

$u_{ij}^{(n+1)} = \frac{1}{4}[\ldots] - \frac{1}{4}h^2 S$

... opět $x = \underbrace{-D^{-1}(L+U)}_{R_J} x + D^{-1} b$

$$R_J = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} \begin{array}{cc|cc} 0 \; +1 & +1 & & \\ +1 \; \ddots & \ddots \; +1 & & \\ \hline +1 & 0 \; +1 & & \\ & +1 \; \ddots & \ddots & \\ \hline 0 & & \ddots & \ddots \end{array} \end{pmatrix}$$

vl. v. ... $u_{ij} = N \sin(\xi_1 j) \sin(\xi_2 j) \Leftarrow R = \frac{1}{2}(R_x + R_y)$

$\lambda = \frac{1}{2}(\lambda_x + \lambda_y) \ldots$ největší $\lambda = \frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{N+1} + \cos\frac{\pi}{N+1}\right) \simeq 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{N+1}\right)^2$

... s dimenzí problému neroste počet iterací (roste náročnost 1 iterace)

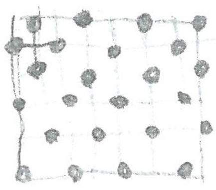
Další metody: Gauss-Sidel $\quad u_j^{n+1} = \frac{1}{2}\left[u_{j+1}^{n} + u_{j-1}^{n+1}\right] - \frac{1}{2}h^2 S_j$

obecně $\quad (L+D+U)x = b$

$(L+D)x = -Ux + b \longrightarrow$ Ekvivalentní iterace $x^{n+1} = \underbrace{-(L+D)^{-1}U}_{R_{GS}} x + (L+D)^{-1} b$

ve 2D stejně, ale záleží na pořadí v němž naskládáme u_{ij} do vektoru • přirozené pořadí (výše): $u_{ij}^{n+1} = \frac{1}{2}\left[u_{ij+1}^{n} + u_{ij-1}^{n+1} + u_{i+1j}^{n} + u_{i-1j}^{n+1}\right] - \frac{h^2 S}{2}$

• šachovnicové pořadí:



nejdřív ∀ černé body (např. po sloupcích) potom ∀ červené body

4

následná superrelaxace .. SOR(ω) : successive overrelaxation

$$u_{ij}^{(n+1)} = (1-\omega)\, u_{ij}^{(n)} + \omega \frac{1}{4}\left[u_{i+1j}^{(n)} + u_{ij+1}^{(n)} + u_{i-1j}^{(n+1)} + u_{ij-1}^{(n+1)}\right] + \frac{\omega}{4} h^2 S_{ij}$$

obecně $D x^{(n+1)} = (1-\omega) D x^{(n)} - \omega L x^{(n+1)} - \omega U x^{(n)} + \omega b$

$$\to x^{(n+1)} = \underbrace{(D+\omega L)^{-1}\left[(1-\omega)D - \omega U\right]}_{R_{SOR}} x^{(n)} + \omega (D+\omega L)^{-1} b$$

výhoda .. 1 parametr navíc .. můžeme optimalizovat.

konvergence ? .. nutná podmínka :

$$\det R_{SOR} = \det\left[(D+\omega L)^{-1}\right] \det\left[(1-\omega)D - \omega U\right] = (1-\omega)^n = \prod_i \lambda_i$$

dolní Δ ... horní Δ matice

$\Rightarrow \rho(R_{SOR}) = \max \lambda_i \geq |\omega - 1| \quad \Rightarrow \quad \omega \in \langle 0, 2 \rangle$ postač. podm. ?

Terminologie: Relaxační metody .. klas. relaxace $\omega = 1$ (Gass-Seidel) $\begin{cases} \omega > 1 & \text{superrelaxace} \\ \omega < 1 & \text{underrelax.} \end{cases}$

Obecná teorie konvergence ~~pr~~ iter. metod:

Věta: konzistentní metoda $x^{(n+1)} = R x^{(n)} + c$ konverguje k řešení $Ax = b$ pro $\forall$ počáteční $x^{(0)}$ a $\forall b$ právě když $\rho(R) < 1$. ?

$\rho(R)$ = spektrální poloměr

pozn: důkaz viz Demmel

nástrak: přesné řešení : $x = Rx + c$ (konzistence)

$$\Rightarrow \quad (x^{n+1} - x) = R(x^n - x)$$

tj $\|x_{(n+1)} - x\| \leq \|R\| \cdot \|x_{(n)} - x\| \leq \|R\|^{n+1} \|x^{(0)} - x\|$

... konverguje pokud $\|R\| < 1$

+ dá se DK že $\forall \|\cdot\|$ platí $\rho(R) < \|R\|$, ale dá se pro $\forall \varepsilon > 0$ najít vhodná norma $\|R\|_* \leq \rho(R) + \varepsilon$

tj. metoda konverguje pokud $\rho(R) < 1$ (ve smyslu vhodné normy)

rychlost konvergence kontroluje výraz $r(R) = -\log_{10} \rho(R)$
= kolik desetinných míst přibude jednou iterací

konvergence Jacobiho, GS a SOR

Věta: Pokud A je silně řádkově diagonálně dominantní $\left(|a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}|\right)$, pak G-S i Jakobi konvergují a navíc $\|R_{GS}\|_\infty \leq \|R_J\|_\infty < 1$

Věta: Pokud A je symetrická a pozit. definitní matice pak $\rho(R_{SOR}) < 1 \quad \forall\, \omega \in (0,2)$ a tedy SOR konverguje.

Pro $\omega = 1 \rightarrow$ GS, která tedy rovněž konverguje.

Pozn: A je pozit. definit. ~~sym~~ matice $\Leftrightarrow \forall x \neq 0: \; x^T A x > 0$

OBECNĚ se dají konstruovat (nesymetrické) matice pro něž GS konverg. a Jacobi ne a naopak.

Dá se DK:

Pokud $\rho(R_J)$ je spektrální poloměr Jacobiho metody pak optimální $\omega = \dfrac{2}{1 + \sqrt{1 - \rho(R_J)^2}}$

a pro tuto volbu je $\rho(R_{SOR}) = \left(\dfrac{\rho(R_J)}{1 + \sqrt{1 - \rho(R_J)^2}} \right)^2$

PŘ: 2D Poisson: $\rho(R_J) \simeq 1 - \dfrac{\pi^2}{2N^2}$ pro $N \rightarrow \infty$

$\Rightarrow \quad \omega \simeq \dfrac{2}{1 + \frac{\pi}{N}} \quad \longrightarrow \quad \rho(R_{SOR}) = 1 - \dfrac{2\pi}{N}$ ... konverg. po $O(N)$ krocích

(srovn. .. Jacobi $O(N^2)$)

+ Čebyševovo urychlení Demmel ?
(to jsme nestihli)

+ přehled metod (asympt. složitost úlohy pro různé met.)

Met. / Dim	A^{-1}	A^{-1} band	Cykl. redukt.	Jacobi GS	SOR	Multigrid
1D	$O(N^3)$	$O(N)$		$O(N^3)$	$O(N^2)$	$O(N)$
2D	$O(N^6)$	$O(N^4)$	$O(N^2)$	$O(N^4)$	$O(N^3)$	$O(N^2)$
3D	$O(N^9)$	$O(N^7)$	?	$O(N^5)$	$O(N^4)$	$O(N^3)$

$\log_2 N$

Multigridové metody

- základní myšlenka:
  relaxační metody fungují jako docela dobré "hladiče", které rychle potlačí vysoké frekvence. Pomalá konvergence Jacobiho je daná nejnižšími frekvencemi → čím horší čím jemnější síť → využít hrubší sítě ke korekci.
- lze použít pro libovol. sys. $Ax=b$, ale primárně pro PDE.

Podrobnější analýza – Jacobiho metoda jako hlazení (weighted Jacobi)

připomenutí .. Poisson 1D: $u_j^{n+1} = \frac{1}{2}\left[u_{j+1}^{n} + u_{j-1}^{n}\right] - \frac{1}{2}h^2 S_j$

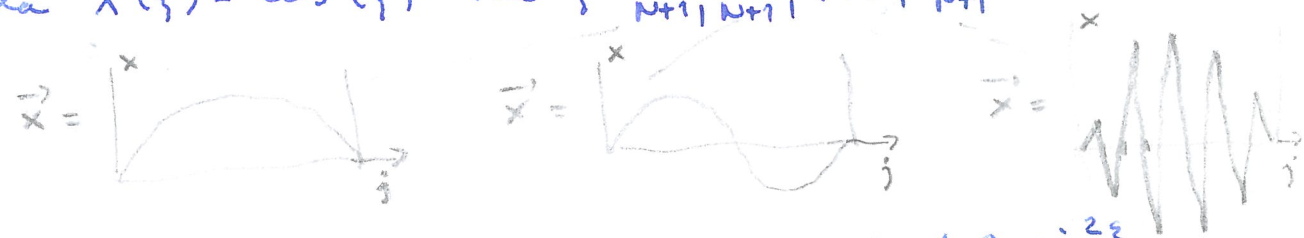
⟺ Jacobiho metoda .. jiný zápis: $x^{(n+1)} = \underbrace{-D^{-1}(L+U)}_{R_J}x^{(n)} + D^{-1}b$

1 Iterace Jacobiho $x^{(n+1)} = \phi^{\omega}(x^{(n)}, b)$

zobecnění Jacobi-ω $x^{(n+1)} = (1-\omega)x^{(n)} + \omega\left\{R_J x^{(n)} + D^{-1}b\right\}$

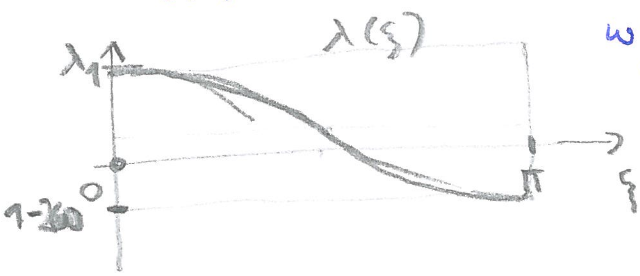
připomenutí z minula: vl. vektory R_J .. $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_j \\ \vdots \\ x_N \end{pmatrix}$ .. $x_j = \sin \xi j$

vl. čísla $\lambda(\xi) = \cos(\xi)$ kde $\xi = \frac{\pi}{N+1}, \frac{2\pi}{N+1}, \dots, \frac{N\pi}{N+1}$



⇒ vl. č. $R_{J(\omega)} = (1-\omega)I + R_J\cdot\omega = 1-\omega+\omega\cos\xi = 1-2\omega\sin^2\frac{\xi}{2}$

tj.:



$\omega = 1$ (Jacobi) ... optimálně hladí střední frekvence (proto je G-S rychlejší → sluší si nasadit jednu iteraci J a G-S pro: )

Optimální hlazení vysokých freq: $\omega = \frac{1}{2}$ (underrelax.)
(∀ freq. $\xi > \frac{\pi}{2}$ mají $\lambda < \frac{1}{2}$)
nebo $\omega = \frac{2}{3}$ .. (∀ freq $\xi > \frac{\pi}{2}$ mají $\lambda < \frac{1}{3}$)

Bez ohledu na ω: konvergence pro nízké freq. špatná
(Pozn: všimněla si, že Jacobi(ω): $\omega \in (0,1)$ .. pro SOR bylo $\omega \in (0,2)$)

Korekce pomocí hrubší sítě (gridu)

Iterační metoda jako korekce řešení:

hledáme řešení $Ax = b$

známe jeho aproximaci $\bar{x}$ korekce? $\Delta x \equiv x - \bar{x}$

spočtený defekt: $d \equiv A\bar{x} - b = A\bar{x} - Ax = -A\Delta x$ tj $\Delta x = -A^{-1} d$

tj korigované řešení: $x = \bar{x} + \Delta x = \bar{x} - A^{-1} d = \bar{x} - A^{-1}(A\bar{x} - b)$

... obsahuje A^{-1}, ale vynásobenou malým d → můžeme si dovolit malou chybu

Jacobi: $A^{-1} \simeq D^{-1}$ vyšl. "chyba 2. řádu"

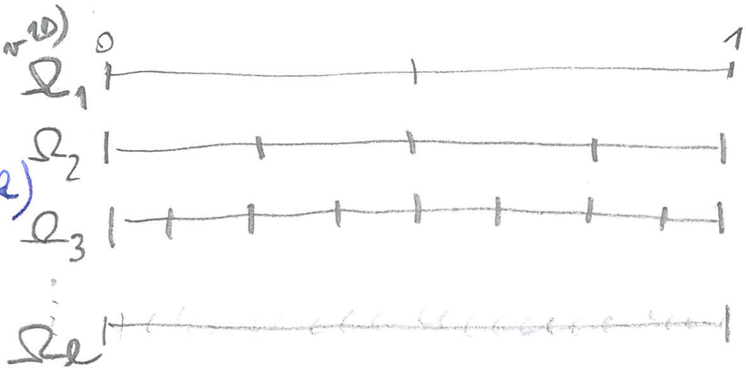
G-S: $A^{-1} \simeq (D+L)^{-1}$ ↑ podrobná analýza nutná!!

vícegridové metody $A_h^{-1} \simeq$ "A_{2h}^{-1}"

trik: musíme se naučit skákat mezi gridy — přechody mezi sítěmi

Značení: (PŘ: $(0,1)$ v 1D)

Hierarchie sítí: (vždy 2^ℓ; ℓ = level)



$N_1 = 1$ $h_1 = \frac{1}{2}$

$N_2 = 3$ $h_2 = \frac{1}{4}$

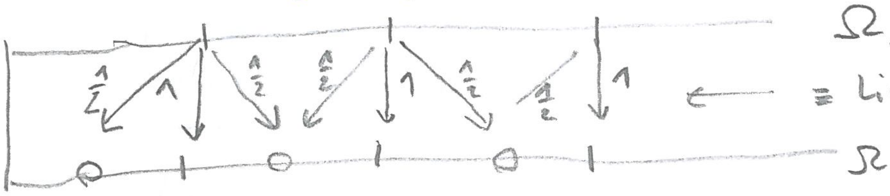
$N_3 = 7$ $h_3 = \frac{1}{8}$

$N_\ell = 2^\ell - 1$ $h_\ell = \frac{1}{2^\ell}$

Matice soustavy: A_ℓ (na úrovni ℓ)

Skákání mezi sítěmi:

- Nahoru (Prolongation, Interpolation): $P^\ell_{\ell-1} x^{\ell-1} = x^\ell$ z vektoru na $\Omega_{\ell-1}$ udělá vekt. na Ω_ℓ



≡ Lineární interpolace

$$P^\ell_{\ell-1} = \begin{pmatrix} \frac12 & & \\ 1 & & 0 \\ \frac12 & \frac12 & \\ & 1 & \\ & \frac12 & \frac12 \\ & & 1 \\ 0 & & \frac12 & \ddots \end{pmatrix}$$

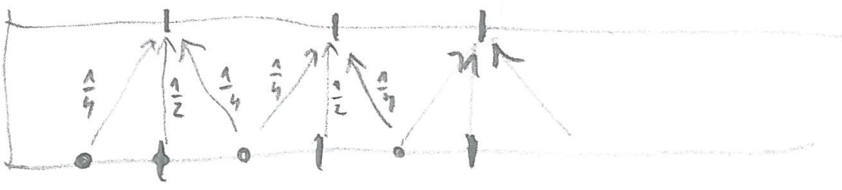
= matice $N_\ell \times N_{\ell-1}$

- Dolů (Restrikce): $R^{\ell-1}_\ell x^\ell = x^{\ell-1}$

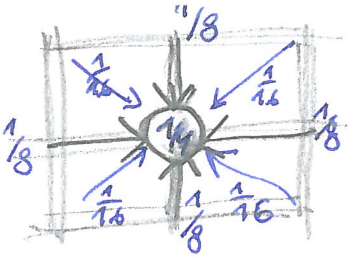
šlo by prostě vybírat.

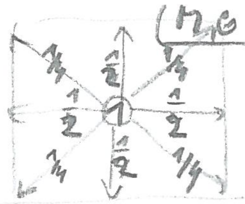
výhodnější $R^{\ell-1}_\ell = \frac12 (P^\ell_{\ell-1})^T = \begin{pmatrix} \frac14 & \frac12 & \frac14 & & & 0 \\ & & \frac14 & \frac12 & \frac14 & \ddots \\ 0 & & & & & \end{pmatrix}$

tj



... provádí už jisté hlazení + snazší analýza metody

• ve 2D: Restrikce: 

$P = 4R^T$ 

(MG 3)

Korekce pomocí hrubšího gridu:

$$x^{(n+1)} = x^{(n)} - P A_{2h}^{-1} R \left(A_h x^{(n)} - b\right)$$

nebo podrobněji: ~~xxxxxxx~~ $x^\ell \to x^\ell - P^\ell_{\ell-1} A^{-1}_{\ell-1} R^{\ell-1}_\ell \left(A_\ell x^\ell - b^\ell\right)$

… iterační metoda $x^\ell \to \left[I^\ell - P^\ell_{\ell-1} A^{-1}_{\ell-1} R^{\ell-1}_\ell A_\ell\right] x^\ell + P^\ell_{\ell-1} A^{-1}_{\ell-1} R^{\ell-1}_\ell b^\ell$

$$\equiv \phi_\ell^K (x^\ell, b^\ell)$$

Lemma:

ϕ_ℓ^K je konzistentní iterační metoda, ale nekonverguje:

• konzistence: $A_\ell x^\ell = b^\ell \Rightarrow x^\ell = \phi^K_\ell(x^\ell, b^\ell)$ .. pevný bod

• konvergence: nechť $v \in \ker R^{\ell-1}_\ell$ (např. $-1\ +1\ -1\ +1\ -1\ +1 \dots$)

$\Rightarrow R^K \equiv \left[I - P\bar{A}^{-1}R\right]A$ ~~má vl. vektor~~ zachová normu → $\bar{A}^{-1} v$ odp. vl. hodnotě $\lambda = 1$ .. nekonverguje

ale $\forall \lambda \leq 1$

… pomůže hlazení:

Jednoduchý V-cykl (dvougrid metoda):

$$x^\ell \to \phi^\omega_\ell \circ \phi^K_\ell \circ \phi^\omega_\ell x^\ell \quad \text{tj.} \quad \phi^\omega_\ell\left(\phi^K_\ell\left(\phi^\omega_\ell(x^\ell, b), b\right), b\right).$$

Lemma ↑ je konvergentní pro Poissona

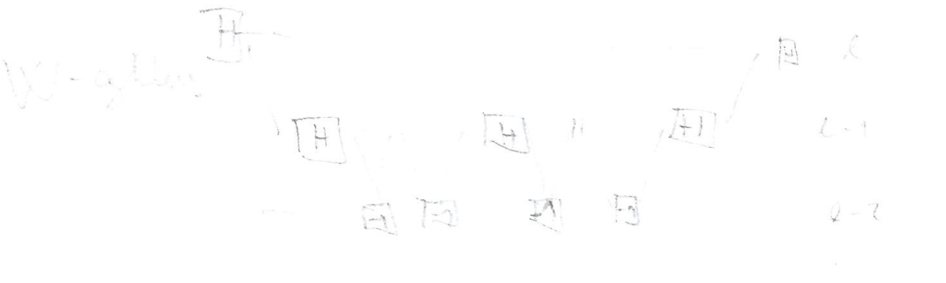
Dá se dk ~~xxxx~~ že matice metody má vl. č. 1/9 (pro $\omega = \frac{2}{3}$ nebo 0)

obecně lze zvolit větší počet hlazení:

$$(\phi^\omega_\ell)^{n_1} \circ \phi^K_\ell \circ (\phi^\omega_\ell)^{n_2}$$

+ Rekurze

operací $\Sigma \sim O(n)$



+ Konstrukce poč. vektoru $\bar{x}$: