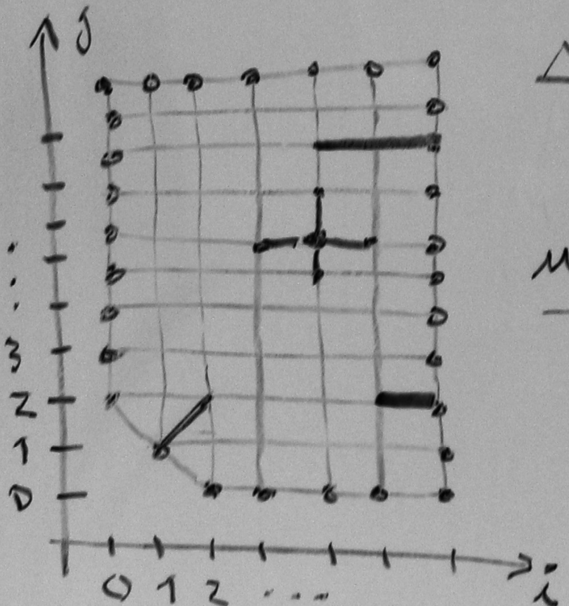
Řešení okrajových úloh metodou sítí



$$\Delta u = S$$

$$\partial_{xx} u + \partial_{yy} u = S \qquad u_{ij} = u(x_i, y_j)$$

$$\frac{u_{i+1j} - 2u_{ij} + u_{i-1j}}{h^2} + \frac{u_{ij+1} - 2u_{ij} + u_{ij-1}}{h^2} = S_{ij}$$

→ PDE na vnitřku Ω

→ okrajová podmínka na $\partial\Omega$

Dirichlet ... přímo $u_{ij} = f_{ij}$ (DÚNO $= 0$)

Neumann ... $\partial_n u = 0$ na $\partial\Omega$

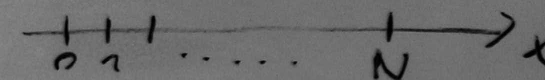
diskretizace např. → $\frac{u_{ij} - u_{i-1j}}{h} = 0$ nebo $\frac{u_{i+1j+1} - u_{ij}}{\sqrt{2}\, h} = 0$

$O(h)$

$O(h^2)$ → nebo vzorce vyšš. řádu: $\frac{3u_{ij} - 4u_{i-1j} + u_{i-2j}}{2h} = 0$

Iterační metody – hlavní myšlenka

okrajová úloha $\Delta u = S$ + okr. podm. → Diskretizace:



→ soustava $Ax = b$

matice A: $N^d \times N^d$

2D ... $\frac{u_{i+1\,j} - 2u_{ij} + u_{i-1\,j}}{h^2} + \frac{u_{i\,j+1} - 2u_{ij} + u_{i\,j-1}}{h^2} = S_{ij}$

řešení soustavy: $O(N^{3d})$ FLOPS

$$u_{ij} = \frac{1}{4}\left[u_{i+1\,j} + u_{i-1\,j} + u_{i\,j+1} + u_{i\,j-1} - h^2 S_{ij}\right] \longrightarrow O(N^6)$$

1D verze: $u_j = \frac{1}{2}\left[u_{j+1} + u_{j-1} - h^2 S_j\right] \longrightarrow O(N^3)$

3D verze $u_{ijk} = \frac{1}{8}\left[u_{i+1\,jk} + u_{i-1\,jk} + \dots - h^2 S_{ijk}\right] \longrightarrow O(N^9)$

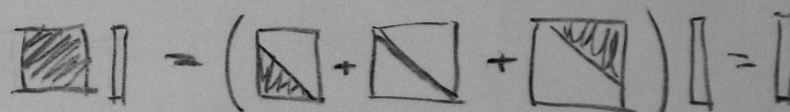
iterace ... $\downarrow$

$$u^{(m+1)} = \dots\; u^{(m)} \dots\dots$$

1 iterace $O(N^d)$ FLOPS

Jacobiho metoda

obecně $Ax = (L+D+U)x = b$



$\longrightarrow \quad x^{(n+1)} = -D^{-1}(L+U)\,x^{(n)} + D^{-1}b$ iterace

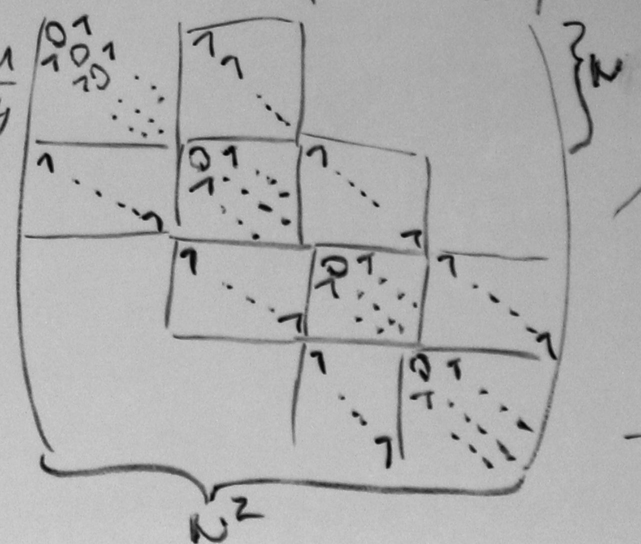
$x^{(n+1)} = R_J\, x^{(n)} + c$

Poisson 1D ... $R_J = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ 1 & 0 & 1 & \\ & 1 & \ddots & \ddots \\ & & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$ ....

spektrální poloměr (norma)

$\|R_J\| = 1 - \frac{1}{2}\frac{\pi^2}{(N+1)^2}$

2D ... $R_J = \frac{1}{4}$



stejný

řádově $O(N^2)$ iterací

$\Rightarrow$ $\times$ 1 iterace $O(N^d)$ FLOPS

$\longrightarrow$ $O(N^{d+2})$ FLOPS

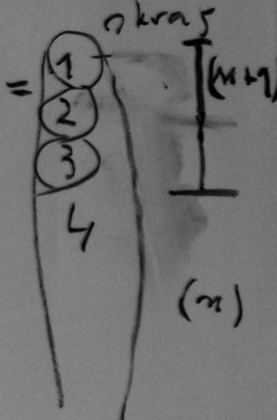
Gaussova-Sidelova metoda

$$(L+D+U)x = b$$

$$(L+D)x = -Ux + b \longleftrightarrow x^{(m+1)} = \underbrace{-(L+D)^{-1}U}_{R_{GS}}\, x^{(m)} + (L+D)^{-1} b$$

↳ trojúhelník matice ... zpětné dosazení

Př... Poisson 1D $\quad u_j^{(m+1)} = \frac{1}{2}\left[u_{j+1}^{(m)} + u_{j-1}^{(m+1)} - h^2 S_j\right]$ ... $u =$



2D ... záleží na uspořádání neznámých ... např.:

$$\begin{pmatrix} u_{11} \\ u_{12} \\ \vdots \\ u_{1N} \\ \hline u_{21} \\ u_{22} \\ \vdots \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow u_{ij}^{(m+1)} = \frac{1}{4}\left(u_{ij+1}^{(m)} + u_{ij-1}^{(m+1)} + u_{i+1j}^{(m)} + u_{i-1j}^{(m+1)}\right) - \frac{h^2 S_{ij}}{4}$$

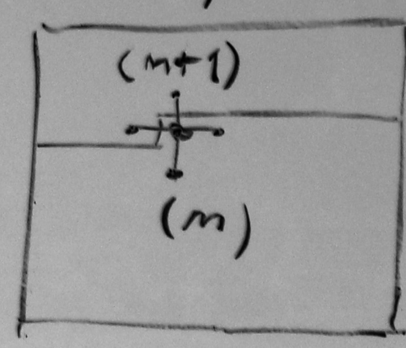
... stačí mít uloženo u_{ij}:

jiná možnost šachovnice:

$u_{ij} =$

o	x	o	x	o	x
x	o	x	o	x	o
o	x	o	x	o	x
x	o	x	o	x	o
o	x	o	x	o	x

$$x = \begin{pmatrix} o \\ \hline x \end{pmatrix}$$



Další zobecnění ... metoda SOR(ω)

successive (over)relaxation

OBECNĚ: Gauss-Sidel $\omega = 1$

$$D x^{(n+1)} = (1-\omega) D x^{(n)} - \omega\left(L x^{(n+1)} + U x^{(n)} - b\right)$$

→ stac. bod

... vážený průměr

kopie

$$\cancel{D x} - (\cancel{1} - \omega) D x = -\omega (L+U) x + \omega b$$

→ $A x = (D+L+U) x = b$

GS váhy $(1-\omega) + \omega = 1$

... konvergence ... závisí na ω → možno optimalizovat!

$$t_j \quad x^{(n+1)} = \underbrace{(D+\omega L)^{-1} \left[(1-\omega) D - \omega U\right]} x^{(n)} + \omega (D + \omega L)^{-1} b$$

prakticky ... poisson 2D:

$$u_{ij}^{(n)} = (1-\omega) u_{ij}^{(n)} + \omega \frac{1}{4}\left[u_{i+1\,j}^{(n)} + u_{i\,j+1}^{(n)} + u_{i-1\,j}^{(n+1)} + u_{i\,j-1}^{(n+1)}\right] - \frac{\omega}{4} h^2 S_{ij}$$

konvergence?

R_{SOR} ... $\|R\|$?

nutná podmínka konvergence SOR:

$$\det R_{SOR} = \det\left[(D+\omega L)^{-1}\right]\det\left[(1-\omega)D-\omega U\right]$$

$$= \frac{1}{d_{11}d_{22}\cdots d_{NN}}\cdot(1-\omega)d_{11}\cdot(1-\omega)d_{22}\cdots(1-\omega)d_{NN} = (1-\omega)^N$$

$$= \lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_N$$

$$\|R_{SOR}\| = \max|\lambda_i| \geq |1-\omega| \quad \Rightarrow \quad \omega\in(0,2)$$

Terminologie: relaxační metody:

- $\omega < 1$ relaxace
- $\omega = 1$ Gauss-Sidel
- $\omega > 1$ superrelaxace

Obecně o konvergenci relax. metod

<u>Věta</u>: konzistentní metoda $x^{(m+1)} = Rx^{(m)} + C$ konverguje

k řešení $Ax = b$ pro $\forall$ poč. podm. $x^{(0)}$ a $\forall b$

pokud $\varrho(R) < 1$. (spektrální poloměr)

DK: ... kontrahující zobrazení

rychlost konvergence $\sim \|R\|^m = \varrho(R)^m$

... tj. jednou iterací přibude $-\log_{10} \varrho(R)$

desetinných míst

konvergence Jacobi, GS, SOR

- **Věta:** Pokud A (silně) řádkově dominantní $\left(|a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}|\right)$

  pak Jacobi a GS konvergují a $\|R_{GS}\|_\infty \leq \|R_J\|_\infty < 1$

- **Věta:** A je symetrická a pozit. definitní matice

  pak $\rho(R_{SOR}) < 1 \ \forall \omega \in (0,2)$ a tedy SOR konverguje

→ Dá se DK: nechť $\rho(R_J)$ je spektr. poloměr Jacobiho met.

pak opt. $\boxed{\omega_0 = \frac{2}{1+\sqrt{1-\rho^2}}}$ a $\rho(R_{SOR}(\omega_0)) = \left(\frac{\rho(R_J)}{1+\sqrt{1-\rho(R_J)^2}}\right)^2$

PŘ: Poisson $\rho(R_J) = 1 - \frac{\pi^2}{2N^2} + \sigma(N^{-2})$

pak $\omega_0 = \frac{2}{1+\frac{\pi}{N}} \simeq 2\left(1-\frac{\pi}{N}\right) \to \rho_{SOR} = 1 - \frac{2\pi}{N}$

... konverg. po $O(N)$ iteracích

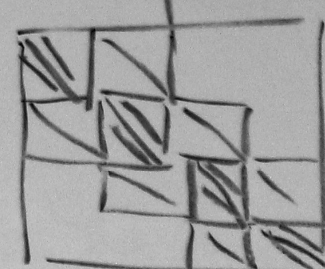
tj. $O(N^{d+1})$ FLOPs

Přehled řešení Poisson. úlohy

diskretizace

$x = x_0, x_1, \dots, x_N$

Dimenze \ metoda atd.	neznámých $u_{i,j}$ ...	matice A	přímá A^{-1}	Jacobi	optimal SOR	Band	Multigrid
1D	$O(N)$	$O(N^2)$	$O(N^3)$	$O(N^3)$	$O(N^2)$	$O(N)$ 	$O(N)\cdot k$
2D	$O(N^2)$	$O(N^4)$	$O(N^6)$	$O(N^4)$	$O(N^3)$	$O(N^4)$	$O(N^2)\cdot k$
3D	$O(N^3)$	$O(N^6)$	$O(N^9)$	$O(N^5)$	$O(N^4)$	$O(N^7)$	$O(N^3)\cdot k$
⋮	$O(N^d)$	$O(N^{2d})$	$O(N^{3d})$	$O(N^{d+2})$	$O(N^{d+1})$	↑ lze vylepšit	



... cyklická redukce atd.