Relaxační metody - opakování

$$Ax = b \quad \longleftrightarrow \quad x^{(m+1)} = R x^{(m)} + c$$

$$x^{(0)} \to x^{(1)} \to \dots \to x^{(m)} \xrightarrow{m\to\infty} x = A^{-1} b$$

- konzistence: $x^{(\infty)} = A^{-1} b$ je pevný bod $x^{(\infty)} = R x^{(\infty)} + c$
- konvergence: násobení R je kontrahující zobrazení

  $\varrho(R) \leq \|R\| < 1$

<u>PŘ:</u> Poisson 1D ... $\Delta u = S$ .... $u'' = S(x)$

$$O(h^2) + \frac{u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1}}{h^2} = S_j$$

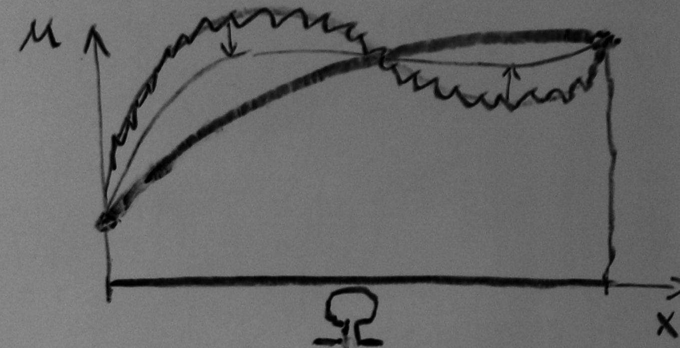
<u>Rychlost konvergence</u>

iterace

$$u_j^{(m+1)} = \frac{\omega}{2}\left[\left(u_{j+1}^{(m)} + u_{j-1}^{(m)}\right) - h^2 S_j\right] + (1-\omega)\, u_j^{(m)}$$

ω-Jacobi $\quad R_J(\omega) = (1-\omega) I + \omega R_J, \quad R_J = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ 1 & 0 & 1 & & \\ & 1 & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Základy multigridové metody



• Relaxace: analýza konvergence

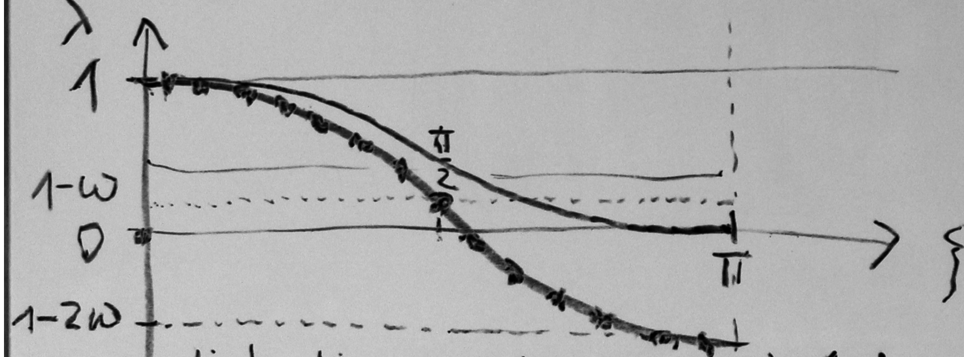
$$u_j^{(m+1)} = (1-\omega)\, u_j^{(m)} + \frac{\omega}{2}\left[\left(u_{j+1}^{(m)} + u_{j-1}^{(m)}\right) - h^2 S_j\right]$$

$$= \left[\underbrace{(1-\omega) I + \omega R_J}\right] u^{(m)} + b$$

$$R_J = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ 1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ & & 1 & 0 \end{pmatrix}$$ ... vl. č. $\lambda = \cos \xi$ pro $\boxed{x_j = \Im \sin \xi j}$

$$R_J(\omega) \longrightarrow \lambda = 1 - \omega + \omega \cos \xi = 1 - 2\omega \sin^2 \frac{\xi}{2}$$

útlum chyby závisí na frekvenci: konverguje pro $\omega \in (0,1)$



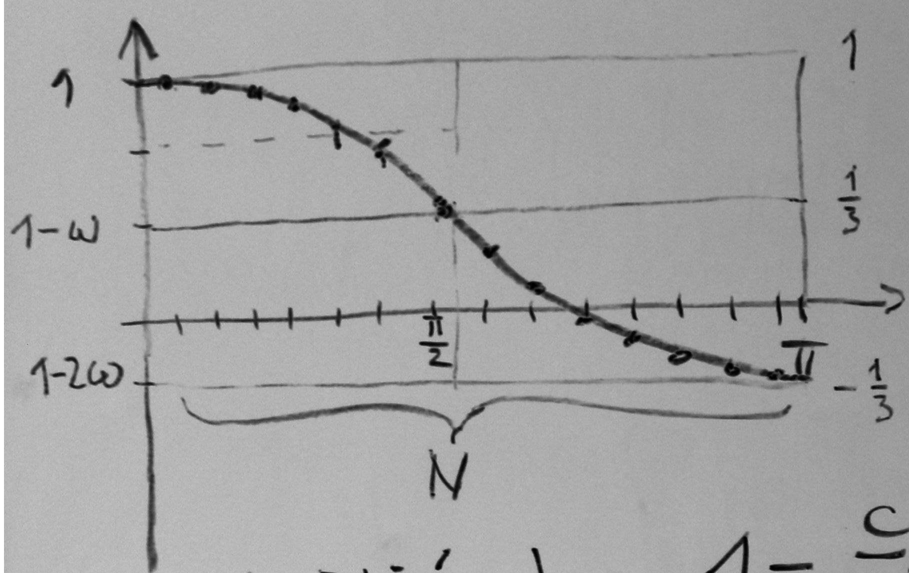
diskretizace okraj. podmínkou

optimální hlazení vysokých freq .... $\omega = 1/2$

$\xi \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$ .... $\lambda < \frac{1}{2}$

konvergenci určují nízké ξ.

Analýza konvergence



největší $\lambda \sim 1 - \frac{c}{N^2}$

-- nízké frekvence $\xi \sim \frac{1}{N}$

optimální hlazení

(útlum vysokých freq)

pro $\omega = \frac{2}{3}$

.... pro $\xi > \frac{\pi}{2}$ ... $\lambda(\xi) < \frac{1}{3}$

konvergence

... diskretizace ... okraj. podmínka

a $N \sim \frac{1}{h}$

- Náprava (částečná) ... SOR(ω) .. optimální ω

  ... $\lambda \sim 1 - \frac{c}{N}$ ... N iterací

- Multigrid ... konvergence nízkých freq na hrubším gridu ... větší h

Korekce na hrubší síti

obecná myšlenka korekce: $Ax = b$

aproximace $\bar{x}$; korekce $\Delta x = x - \bar{x}$

Reziduum: $r = A\bar{x} - b = A\bar{x} - Ax = -A\Delta x$

tj korekce $x = \bar{x} + \Delta x = \bar{x} - A^{-1} r = \bar{x} - A^{-1} \underbrace{(A\bar{x} - b)}_{\text{malé}}$

přibližná

přibližné $\overline{A^{-1}}$ ... chyba "druhého" ř.

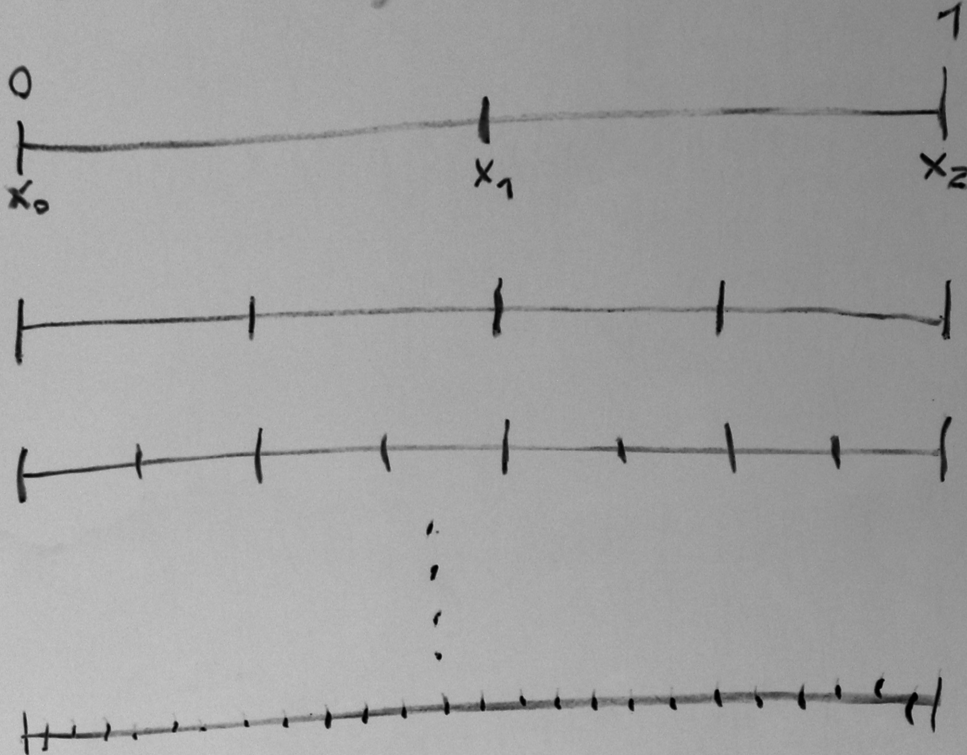
PŘ: $A^{-1} \simeq D^{-1}$ ... Jacobi

$A^{-1} \simeq (D+L)^{-1}$ ... Gauss-Sidel

Multigrid ... $A_h^{-1} \simeq$ "A_{2h}^{-1}"

Hierarchie sítí a přechody mezi úrovněmi

(na PŘ Poisson 1D) na $x \in \Omega = \langle 0,1 \rangle$



Ω_1: $N_1 = 1$ $h_1 = \frac{1}{2}$

Ω_2: $N_2 = 3$ $h_2 = \frac{1}{4}$

Ω_3: $N_3 = 7$ $h_3 = \frac{1}{8}$

$\vdots$

Ω_ℓ: $N_\ell = 2^\ell - 1$ $h_\ell = \frac{1}{2^\ell}$

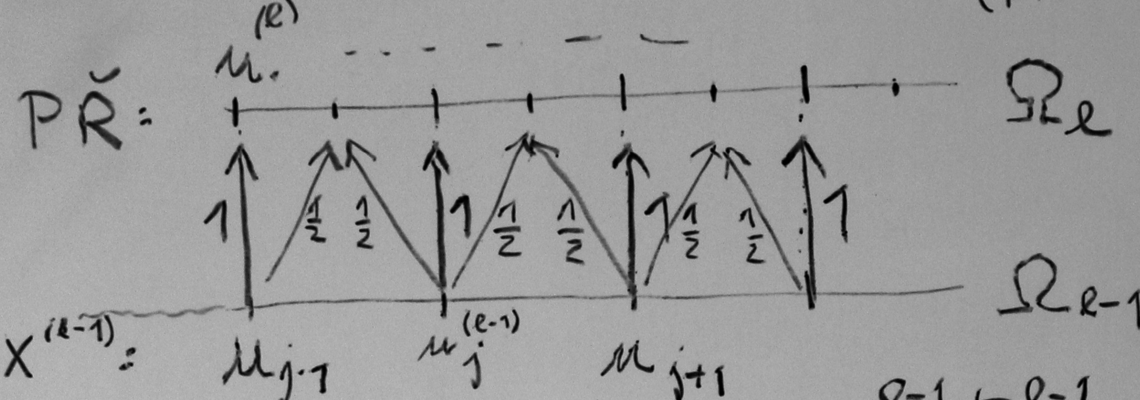
Matice soustavy na úrovni ℓ: A_ℓ

Přechody mezi úrovněmi

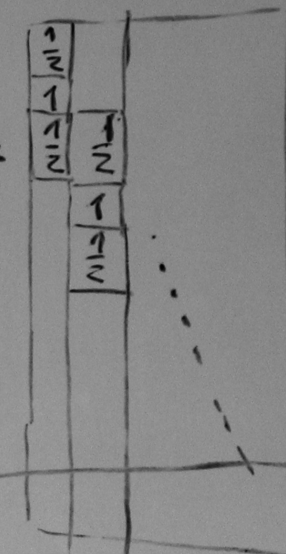
1D příklad .... řešení na úrovni ℓ : $A_\ell x^\ell = b_\ell$

- přechod nahoru $\Omega_{\ell-1} \to \Omega_\ell$ ... prolongation (prodloužení) $x^\ell = P^\ell_{\ell-1} x^{\ell-1}$

PŘ:



$P^\ell_{\ell-1} =$

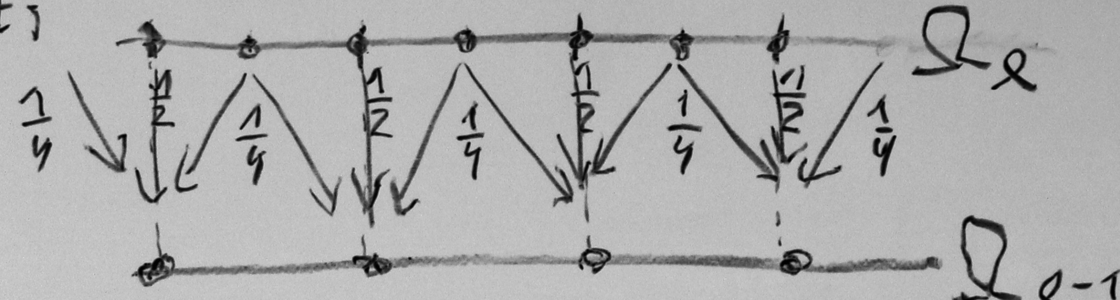


- přechod dolů ... restrikce $x^{\ell-1} = R^{\ell-1}_\ell x^\ell$

... výhodné symetricky $R = \frac{1}{2} P^T$ =

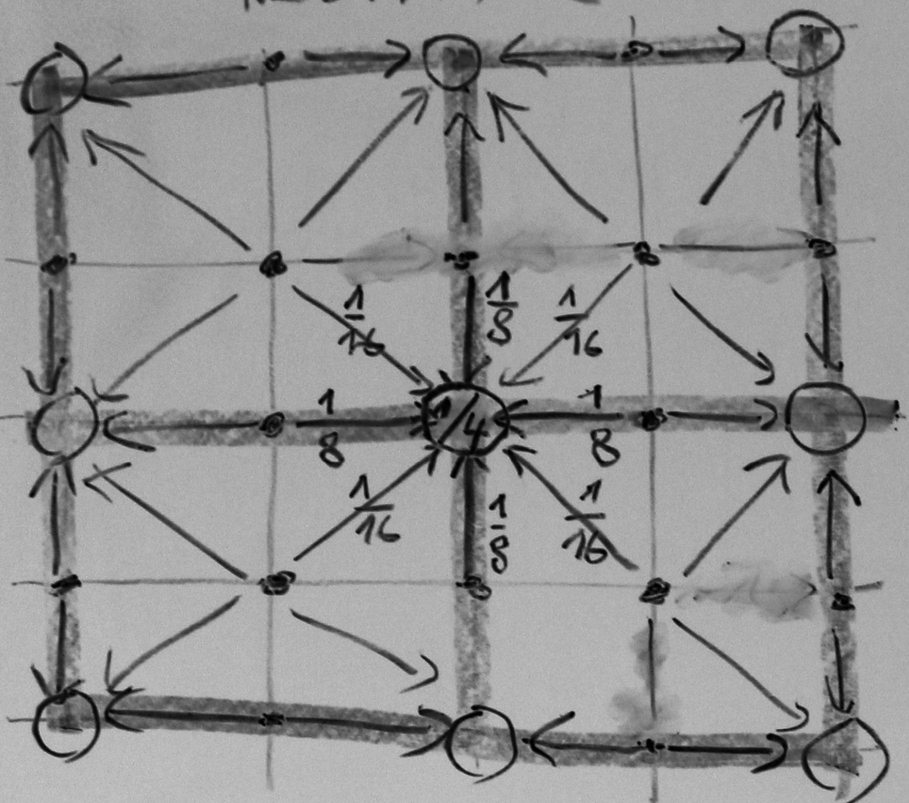
$$\begin{pmatrix} \frac14 & \frac12 & \frac14 & & & & & \\ 0 & 0 & \frac14 & \frac12 & \frac14 & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac14 & \frac12 & \frac14 & \\ & & & & & & & \ddots \end{pmatrix}$$

tj



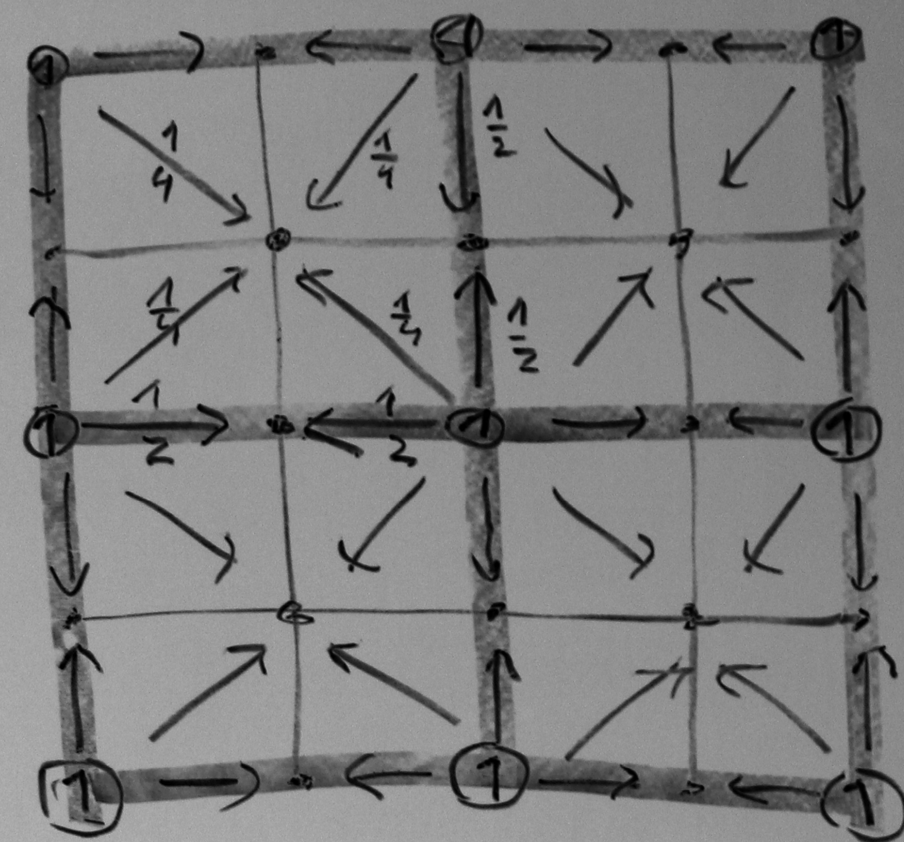
PŘ 2D:

Restrikce



$$\Omega_l \rightarrow \Omega_{l-1}$$

Prodloužení $P = 4R^T$



$$\Omega_{l-1} \rightarrow \Omega_l$$

Metoda korekce na hrubší síti:

$$x^{(m+1)} = x^{(m)} - \underbrace{\underbrace{P\, A_{2h}^{-1}\, R}_{"A_{2h}^{-1}"}\, \underbrace{(A_h x^{(m)} - b)}_{r}}_{\Delta x}$$

tj iterační metoda

$$x^{\ell} \longrightarrow \underbrace{\left[I^{\ell} - P_{\ell-1}^{\ell} A_{\ell-1}^{-1} R_{\ell}^{\ell-1} \right]}_{\mathcal{R}} x^{\ell} + \underbrace{P_{\ell-1}^{\ell} A_{\ell-1}^{-1} R_{\ell}^{\ell-1} b^{\ell}}_{c}$$

$$\equiv \phi_{\ell}^{k}(x^{\ell}, b^{\ell})$$

... neboli $\quad x^{(m+1)} = \phi_{\ell}^{k}(x^{(m)}, b^{\ell}) = \mathcal{R}\, x^{(m)} + c$

Tvrzení: korekce na hrubší síti je konzistentní metoda, ale nekonverguje

DK: • konzistence

$$X \longrightarrow x - P A_{2h}^{-1} R \, (\underbrace{A_h x - b}_{=0 \text{ pro řešení } Ax=b}) = x$$

je pevný bod

• konvergence

R je obdélníková matice $\boxed{}$ ... má netriv $\ker(R)$

tj. $\exists v : R v = 0$ (např. $v = (1, -1, 1, -1, 1, -1, \dots)$)

vektor $x = A_h^{-1} v$ je vl. v. $\mathcal{R} = I - P A^{-1} R A$ pro $\lambda = 1$

→ při iteracích se nemění

Náprava .. zařadit hlazení (eliminace vysokofreq $v \in \operatorname{Ker} R$)

... např. Jacobi $\omega = \frac{2}{3}$:

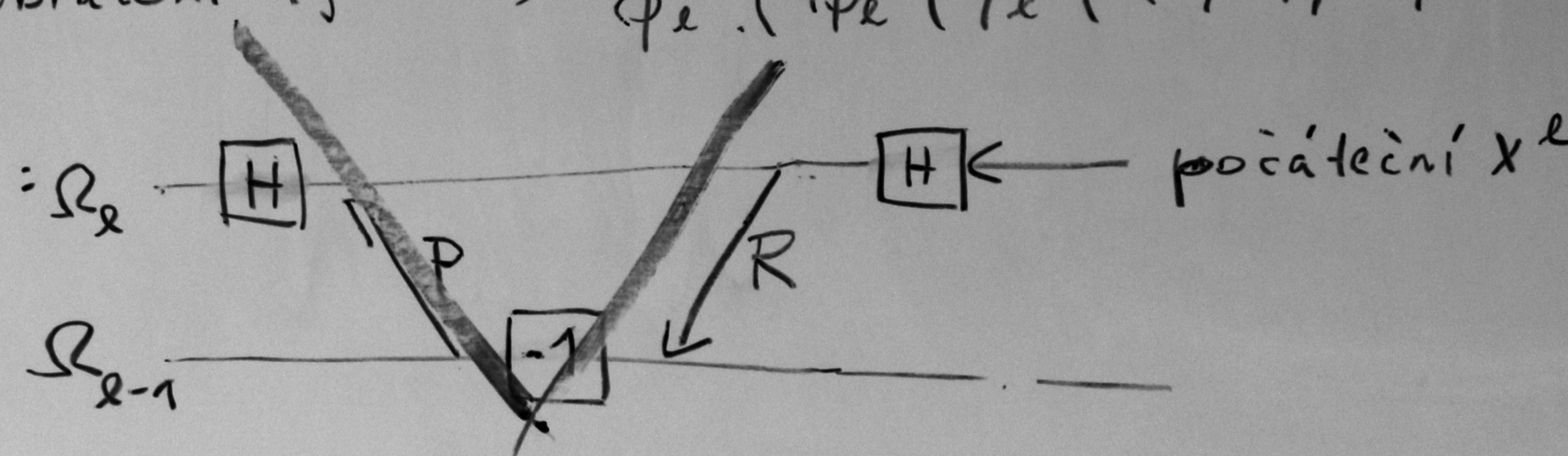
$$x^{(m+1)} = (1-\omega)\,x^{(m)} + \omega\left\{R_J\, x^{(m)} + D^{-1} b\right\} \equiv \Phi^{\omega}(x^{(m)}, b)$$

$\rightarrow$ konvergentní metoda: **Jednoduché V-čko**

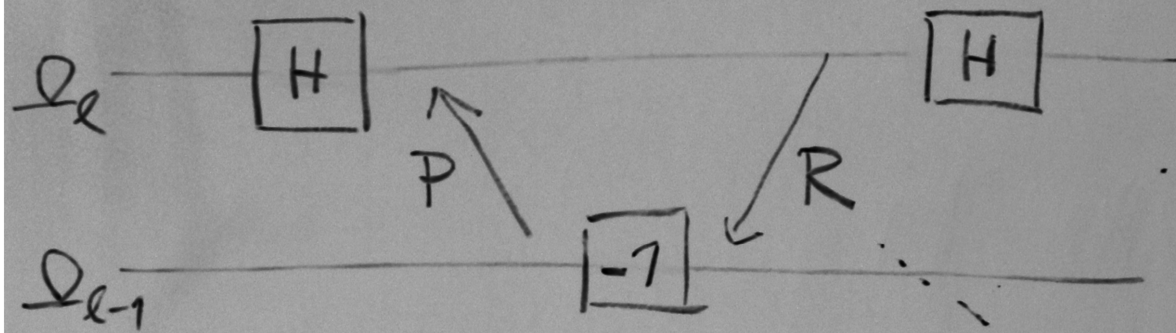
$$x^{\ell} \longrightarrow \Phi_{\ell}^{\omega} \circ \Phi_{\ell}^{k} \circ \Phi_{\ell}^{\omega}\, x^{\ell}$$

[skládání zobrazení tj. $\Phi_{\ell}^{\omega}\left(\Phi_{\ell}^{k}\left(\Phi_{\ell}^{\omega}(x^{\ell}, b), b\right), b\right)$]

Schema:



Efektivita (operation count)



X^ℓ .... N^d čisel

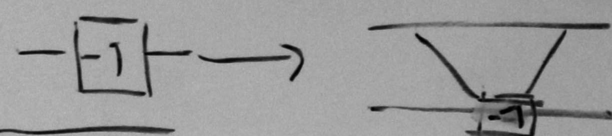
.... $O(N^d)$ FLOPS

stará se o konvergenci

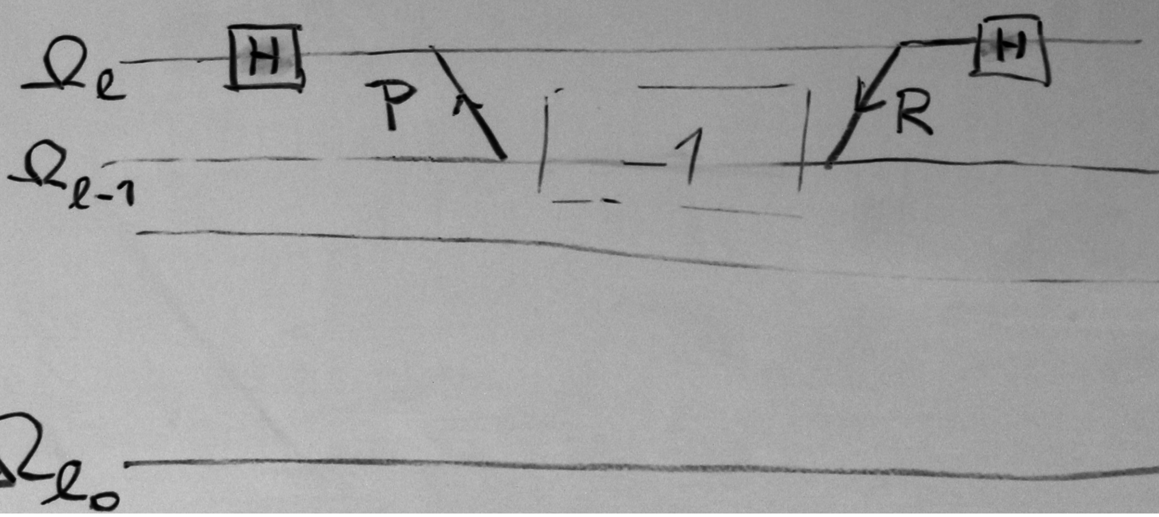
moc náročné ... $O\left(\left(\frac{N}{2}\right)^{3d}\right)$

$O(N^d) + O(N^d)$

ale rekurze

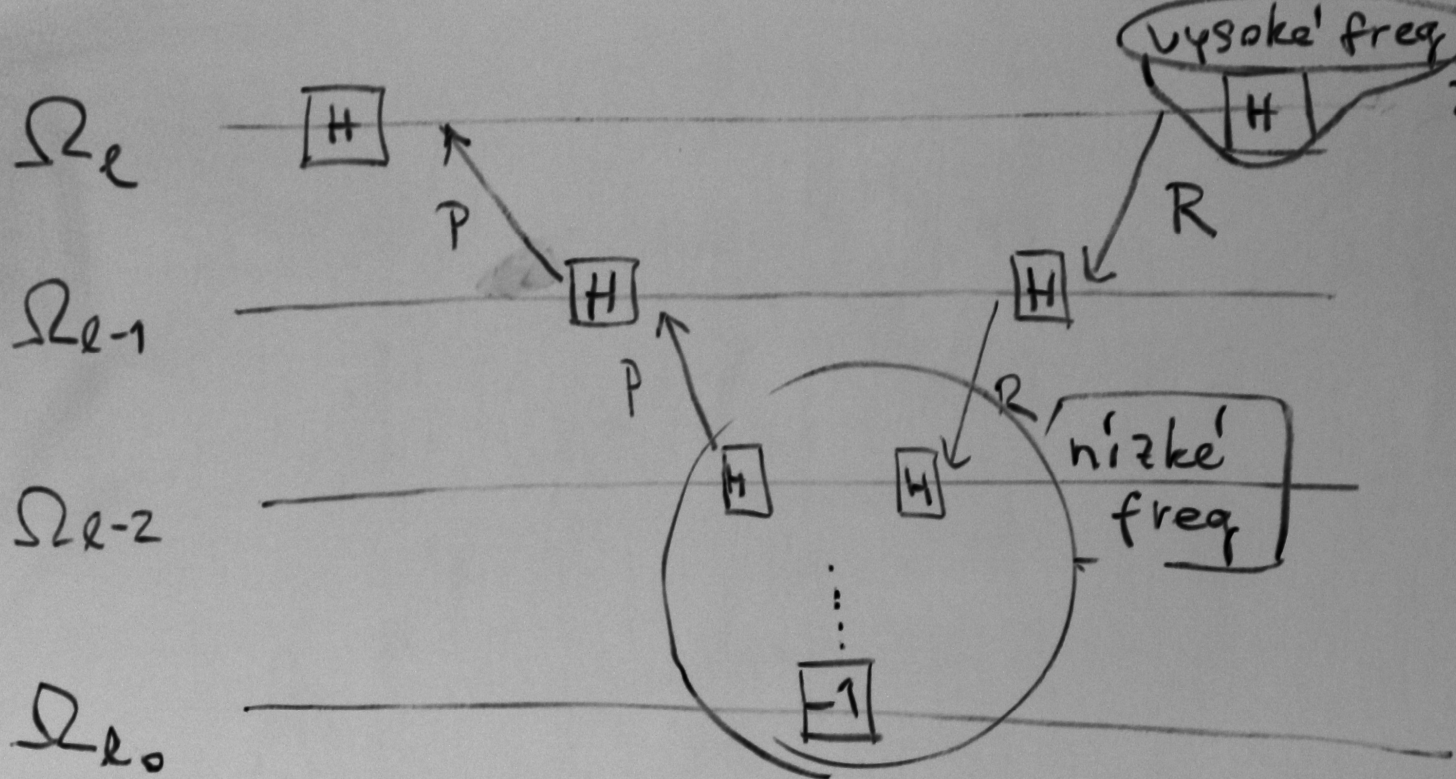


.. kompletní V-čko:



Operation count

Konvergence: $O(1)$ kroků!



$2\times O(N^d)$

$2\times O(N^d)$

$2\times O\left(\left(\frac{N}{2}\right)^d\right)$

$2\times O\left(\left(\frac{N}{2}\right)^d\right)$

$2\times O\left(\left(\frac{N}{4}\right)^d\right)$

$O(1)$

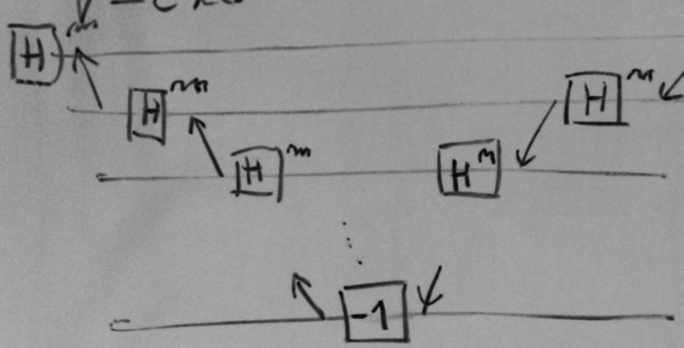
celkem: $\boxed{H}$ … $2\times O(N^d) + 2\times O\left(\left(\frac{N}{2}\right)^d\right) + \dots = 2\times O\left(N^d\left(1 + \frac{1}{2^d} + \frac{1}{4^d} \dots\right)\right)$

$\boxed{PR}$ … —||—

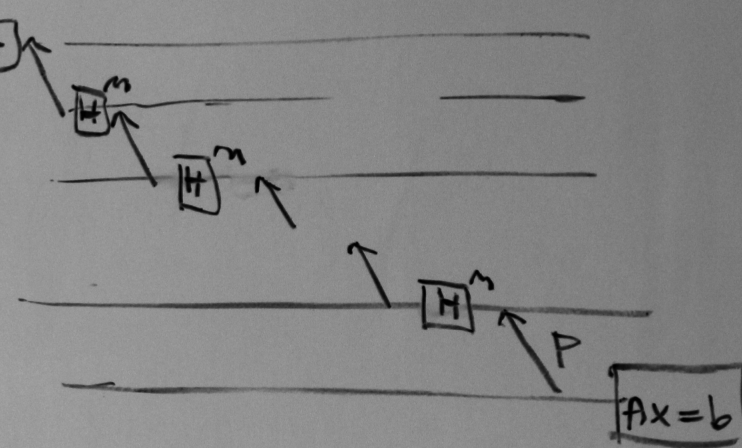
$\rightarrow$ $O(N^d)$ operací celkem!

Alternativní multigridové konstrukty

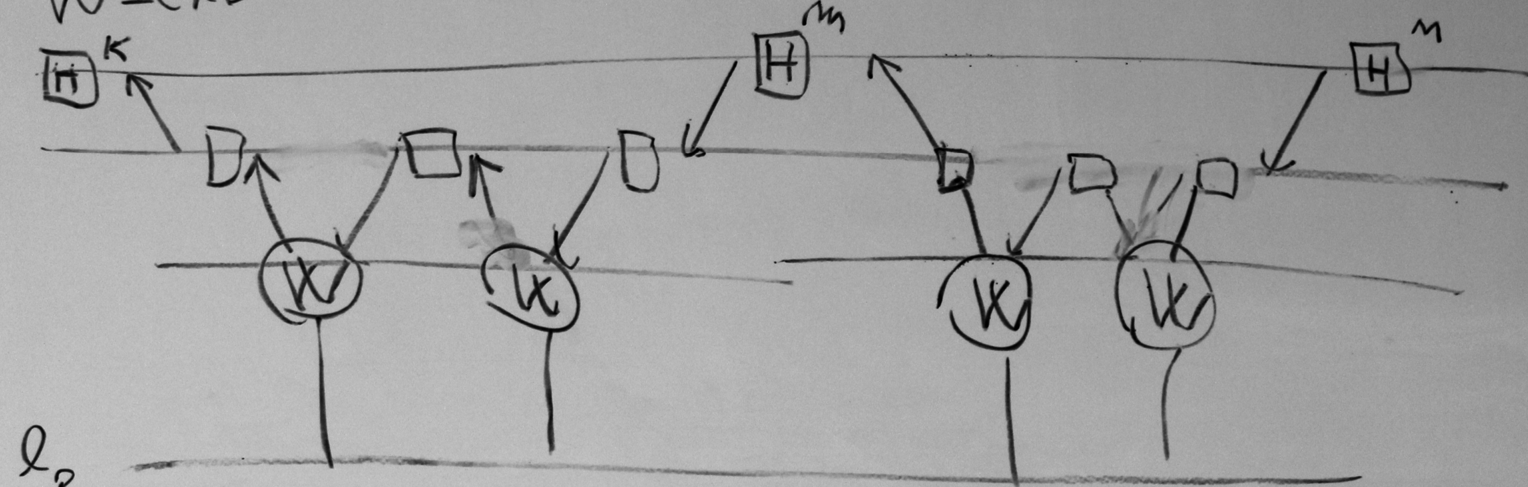
V-čko:



Konstrukce počát. odhadu:



W-čko:




Alternativní multigridové konstrukty