Základní pojmy a principy FEM

(Finite Element Methods) ≡ konečné prvky

- Eliptické (konvexní) okrajové úlohy

Hlavní myšlenka:

- reprezentace řešení rozvojem do báze $u(x) = \sum_m c_m \phi_m(x)$
- alternativní formulace okrajové úlohy:

    variační (minimal. funkcionálu) / slabá formulace (projekce PDE na test. fce)

- $\boxed{\text{FEM}}$ versus $\boxed{\text{Spektrální metody}}$

FEM:

- Lokalizovaná báze
- flexibilní volba Ω
- názorný význam c_n hodnoty či derivace v uzlových bodech
- ALE – POMALÁ KONVERGENCE, velké (řídké) matice

Spektrální metody:

- delokalizovaná báze
- $\Omega = R^d$ nebo hodně symetr.
- c_n nemají názor. význam
- RYCHLÁ KONVERG.
- malé matice

Modelový příklad – 1D Poisson

$$\left.\begin{aligned} -u''(x) &= f(x) \quad \text{na } x \in \Omega = \langle 0,1 \rangle & (D_a) \\ u(0) &= u(1) = 0 & (D_b) \end{aligned}\right\} (D)$$

Diferenciální formulace

Def: $V = \{ v(x) :$ spojité na Ω, v' po částech spoj. omezené na Ω; $v(0) = v(1) = 0 \}$

... prostor testovacích fcí ... obsahuje okraj. podm!

Projekce (D_a) na v ve smyslu skalár. součinu na $L^2(\langle 0,1 \rangle)$:

$$\langle f | v \rangle \equiv \int_0^1 f(x)\, v(x)\, dx = -\int_0^1 u''(x)\, v(x)\, dx = \int_0^1 u'(x)\, v'(x)\, dx \stackrel{def}{\equiv} \underbrace{a(u,v)}_{\text{symetrická, pozit. definit. bilineár. forma}}$$

tj. řešení u úlohy (D) splňuje $\forall v : \; a(u,v) = \langle f, v \rangle$

(slabá formulace)

a také minimalizuje <u>Funkcionál energie</u>:

$$F[v] \equiv \frac{1}{2} a(v,v) - \langle f | v \rangle$$

Alternativní formulace okr. úlohy (D):

(V) nalézt $u \in V$: $\quad F(u) \leq F(v)\ ;\ \forall v \in V$

(Variační formulace)

(S) nalézt $u \in V$: $\quad \boxed{a(u,v) = \langle f | v \rangle}\ ;\ \forall v \in V$

(Slabá formulace)

V případě modelového příkladu platí: (u řeší D) $\Rightarrow$ (S) $\Leftrightarrow$ (V)

DK: $\Rightarrow$ jsme DK výše integrací per partes

Zbytek založený na relaci pro $v = u + w$:

$$F[v] = \frac{1}{2}\int v' v' \, dx - \int f v \, dx = F[u] + \underbrace{a(u,w) - \langle f | w \rangle}_{\text{lin}\ \cdots\ 1.\check{r}} + \underbrace{\frac{1}{2} a(w,w)}_{\substack{\geq 0 \\ \text{(pozit. definit)}}}$$

pozn.: pokud řešení (S) je 2x spoj. diferenc.
lze vrátit per-partes a (S) $\Leftrightarrow$ (D)

OBECNĚ: (S) a (V) formulaci lze provést pro mnoho dalších (i nelineárních) úloh

- (S) formulace obecnější ... řešení $\exists$ pro více úloh (např. u není C^2; f může být distribuce, ...)
- (V) vyžaduje pozitivní definitnost (konvexitu) $a(u,v)$
- často je snazší DK $\exists$ řešení pro (S) a pak případně ukázat $u \in C^2$ tj. platí i (D)
- aproximace řešení lze hledat mimo C^2 (dokonce mimo C)

shocks

Další příklady (S) a (V) formulace okraj. úloh

$\boxed{\text{PŘ 1}}$ obecná dif. rov. II ř. (lineární) v 1D:

$$\hat{D}u \equiv -\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{d}{dx}u(x)\right] + q(x)\,u(x) = f(x) \quad \text{na } \Omega = \langle a, b \rangle \qquad (D_a)$$

kde $p(x), q(x), f(x) \in C^0$ $\quad p \in C^1 \quad p(x) \geq p_0 > 0$

odražené od nuly
(pozit. definitnost)

$$u(a) = u(b) = 0 \qquad (D_b)$$

násob test. fcí v + per partes:

$$\boxed{a(v,u) = \int_a^b \left[-v\frac{d}{dx}(p\dot{u}) + vqu\right]dx = \int_a^b (p\dot{v}\dot{u} + qvu)\,dx}$$

$\rightarrow$ (S) $\quad a(u,v) = \langle f | v \rangle \quad \forall v \in V$

$\rightarrow$ (V) $\quad u$ minimalizuje $\quad F[u] \equiv \frac{1}{2}a(u,u) - \langle f | u \rangle$

Další příklady (S) a (V) formulace okraj. úloh

$\boxed{\text{PŘ 1}}$ OBECNĚJŠÍ OKRAJ. PODMÍNKA:

$$\hat{\mathcal{D}}u \equiv -\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{d}{dx}u(x)\right] + q(x)\,u(x) = f(x) \quad \text{na } \Omega = \langle a,b\rangle \qquad (D_a)$$

kde $p(x), q(x), f(x) \in C^0$ $\quad p \in C^1$ $\quad p(x) \geq p_0 > 0$

odražené od nuly (pozit. definitnost)

$$\alpha_1 p(a)\,u'(a) + \beta_1 u(a) = 0$$
$$-\alpha_2 p(b)\,u'(b) + \beta_2 u(b) = 0 \qquad (D_b)$$

dosazeno z okr. podm. za

$$p u' = \frac{\beta}{\alpha} u$$

integrace per partes nyní dá:

$$\int_a^b v\,\hat{\mathcal{D}}u\,dx = \int_a^b (p u' v' + q u v)\,dx + \frac{\beta_2}{\alpha_2} v(b)\,u(b) + \frac{\beta_1}{\alpha_1} v(a)\,u(a) \equiv a(u,v)$$

opět stejné (V) a (S) formulace: $a(u,v) = \langle f|v\rangle \quad \forall v \in V$

ale prostor V se definuje bez podmínky $u(a) = u(b) = 0$

$$V = \{v(x);\ v \in C^0\langle a,b\rangle;\ v' \text{ po část. spoj, omezené}\}$$

Další příklady (S) a (V) formulace okraj. úloh

PŘ 1 OBECNĚJŠÍ OKRAJ. PODMÍNKA – BÚNO Homogenní

$$\hat{D}u \equiv -\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{d}{dx}u(x)\right] + q(x)\,u(x) = f(x) \quad \text{na } \Omega = \langle a, b\rangle \qquad (D_a)$$

kde $p(x), q(x), f(x) \in C^0$ $\quad p \in C^1 \quad$ $p(x) \geq p_0 > 0$

odražené od nuly (pozit. definitnost)

$$\begin{aligned} \alpha_1 p(a)\,u'(a) + \beta_1 u(a) &= A \\ -\alpha_2 p(b)\,u'(b) + \beta_2 u(b) &= B \end{aligned} \qquad (\tilde{D}_b)$$

---

nechť $u_0(x)$ je libovolná fce splňující $(\tilde{D}_b)$ … např. lineární

pak $\bar{u} \equiv u(x) - u_0(x)$ splňuje (D_b) … HOMOGENNÍ

a rovnici $\quad \hat{D}\bar{u} = \hat{D}u - \hat{D}u_0 = f(x) - \hat{D}u_0 \overset{\text{def.}}{\equiv} \bar{f}(x)$

PŘ 2: rovnice vyššího řádu

$$\hat{D} u \equiv \left[p(x) u(x)''\right]'' - \left[q(x) u'\right]' + s(x) u(x) = f(x) \qquad (D_a)$$

$$u(a) = u(b) = u'(a) = u'(b) = 0 \qquad (D_b)$$

2x per partes $\longrightarrow \int v \hat{D} u \, dx = \int_a^b \left(p u'' v'' + q u' v' + s u v\right) dx \equiv a(u, v)$

prostor V ... test. fce splňující (D_b)

PŘ 3: nelinearita v u:

$$\hat{D} u \equiv -\left[p u'\right]' + q u = f(x, \underline{u})$$

$\longrightarrow a(u, v) = \int \left(p u' v' + q u v\right) dx$ jako PŘ 1, ale jiná pr. str.

(S)... $a(u, v) = \int_a^b f(x, u(x)) v(x) \, dx \quad \forall v$

konvexita $\frac{\partial}{\partial u} f(x, u) \leq 0$

$\downarrow$

minimum

což je extrém pro

(V) $F[u(x)] \equiv \int_a^b \left\{ \frac{1}{2}\left[p u'^2 + q u^2\right] - \int_a^{u(x)} f(x, t) \, dt \right\} dx$

PŘY: Eliptická rovnice ve 2 a více dim

$$\hat{D}u \equiv -\partial_x(p\,\partial_x u) - \partial_y(p\,\partial_y u) - \dots + q\,u = f(x) \quad (D_a)$$

neboli $\boxed{-\nabla\cdot(p\nabla u) + q\,u = f(x)}$ na $\vec{x} \in \Omega \subset \mathbb{R}^d$

+ okraj. podm. $\boxed{p\,\vec{n}\cdot\nabla u = -k\,u}$ pro $x \in \partial\Omega$ $\quad (D_b)$

násobení test fcí $v \in V \equiv \{ v \in C^{0}(\Omega),\ v'$ poč. spoj., omez. na Ω a splň. $(D_b) \}$

int. per partes $\int v\,\nabla\cdot\vec{F}\,dV = \int v\,\vec{F}\cdot d\vec{S} - \int \nabla v\cdot\vec{F}\,dV$ pro $\vec{F} = p\nabla u$

$$\rightarrow \ (S) \quad a(u,v) \equiv \int_\Omega (p\,\nabla u\cdot\nabla v + q\,u\,v)\,dV + \int_{\partial\Omega} k\,u\,v\,dS = \langle f|v\rangle \quad \forall v$$

což je podmínka minima pro F:

$$(V) \quad F[u] = \frac{1}{2}a(u,v) - \langle f|u\rangle$$

Obecná slabá a variační formulace – nástin

(1) Prostory funkcí

... V byl zbytečně restriktivní (spojitost)

$a(u,v)$ je sym. bilineární pozit. defin. forma

$\longrightarrow$ skalární součin

- základ: $L^2(\Omega)$ ... tj. $\left\{ v : \int_\Omega v^2 \, dV < \infty \right\}$

  $\|v\| \longrightarrow$ indukovaná skal. součinem

- pro def $a(u,v)$: $H^1(\langle a,b \rangle) = \{ v : v, v' \in L^2 \}$

  skalár. součin $(u,v)_H = \int_a^b (uv + u'v')\,dx$

  norma $\|u\|_H = \sqrt{(u,u)_H}$

  větší prostor než V co jsme měli výše

  $V \subset H^1 \subset L^2$

- okraj. podmínky: $H^1_0(\langle a,b \rangle) = \{ v \in H^1 ; v(a) = v(b) = 0 \}$

  $H^1_0 \subset H^1$

Více dimenzí:

- $L_2(\Omega) = \{ v : \int_\Omega v^2 \, dV < \infty \}$ $\qquad \langle u, v \rangle = \int_\Omega u v \, dV$
- $H^1(\Omega) = \{ v \in L_2(\Omega) ; \partial_{x_i} v \in L_2(\Omega) \ \forall i = 1, \dots d \}$

  $(u, v)_H = \int_\Omega (u v + \nabla u \cdot \nabla v) \, dV$
- $H^1_0(\Omega) = \{ v \in H^1(\Omega) ; v = 0 \text{ na } \partial\Omega \}$ $\quad \dots H^1_0 \subset H^1$

úlohy s více derivacemi (dif. ro vyšších řádů):

$H^2(\Omega)$ ... též $\partial_{x_i} \partial_{x_j} v \in L_2$

... v 1D : skal. souč. $(u, v)_{H^2} = \int_\Omega (u v + u' v' + u'' v'') \, dV$

---

pozn: spec případ Sobolevových prostorů $W^{k,p}(\Omega)$

... budování z $L_p(\Omega)$ ... $\|v\|_p = \left(\int |v|^p \, dV \right)^{1/p}$

... zúplnění ... Banach prostor, ale skal. souč. jen pro $p = 2$

② Obecná (S) a (V) formulace

- Nechť V je Hilbertův prostor se skal. součinem $\langle \cdot , \cdot \rangle$ a $\| \cdot \| = \sqrt{\langle \cdot | \cdot \rangle}$
- Nechť a je bilineární forma na V splňující
  - symetrie $a(u,v) = a(v,u)$
  - spojitost: $\exists \gamma > 0: \quad |a(u,v)| \leq \gamma \|u\| \cdot \|v\| \quad \forall u,v$
  - eliptičnost: $\exists \alpha > 0: \quad a(v,v) \geq \alpha \|v\|^2 \quad \forall v \in V$
- Nechť L je spoj. lin. forma na V:

  $\exists \Lambda > 0: \quad |L(v)| \leq \Lambda \|v\| \quad \forall v \in V$

funguje i pro nesymetrické $a(u,v) \neq a(v,u)$

→ dá se DK: (S) ... najděte $u \in V$: $\quad a(u,v) = L(v) \quad \forall v \in V$

(V) ... najděte $u \in V$: $\quad F[u] \leq F[v] \quad \forall v \in V$

kde $F[u] \equiv \frac{1}{2} a(u,v) - L(v)$

jsou ekvivalentní a $\exists !$ řešení u; navíc $\|u\| \leq \frac{\Lambda}{\alpha}$

Diskretizace problému

vybereme konečnědimenzionální $V_n \subset V$

s bází $\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n\}$ .. tj. $\forall v \in V_n : v = \sum_i \eta_i \phi_i$

(S) → Galerkinova metoda:

u_n .. nejlepší odhad řešení u ve V_n ..

tj. $\underline{a(u_n, v) = L(v)}$ $\forall v \in V_n$ ... Linearita.. stačí $\forall \phi_i$

tj. $a(u_n, \phi_i) = L(\phi_i)$ $i = 1, 2, \dots, n$ ... navíc $u_n = \sum_j \xi_j \phi_j$

→ $\sum_j a(\phi_i, \phi_j)\xi_j = L(\phi_i)$ neboli $\boxed{Ax = b}$

matice tuhosti

$A_{ij} \equiv a(\phi_i, \phi_j)$

vektor zatížení

$b_j \equiv L(\phi_j)$

vektor řešení u

$$x = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix}$$

(V) — Ritzův variační princip

nejlepší odhad u_n řešení u ve V_n ... minimalizací

$$F[u] \text{ na } V_n \subset V \quad \text{... opět} \quad u_n = \sum_j \xi_j \phi_j$$

$$f(\xi_1, \xi_2 \dots \xi_n) \equiv F[u_n] = \frac{1}{2} x^T A x - x^T b \quad \text{... minimalizace kvadratické formy}$$

→ vede na stejnou rovnici $Ax = b$,

Eliptičnost ⇒ A je symetrická, pozitivně definitní

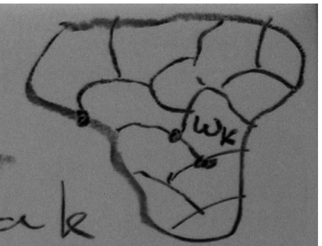
⇒ regulární ⇒ $\exists!$ řešení $x = A^{-1} b$

$\boxed{\text{konvergence pro } n \to \infty ?}$ ... máme alespoň stabilitu: $\|u_n\| \leq \frac{\Lambda}{\alpha}$

DK: $\alpha \|u_n\|^2 \leq a(u_n, u_n) = L(u_n) \leq \Lambda \|u_n\|$

z podmínek na L a $a(\cdot,\cdot)$

Metoda konečných prvků (FEM)



Slabá (variační) formulace + metoda jak systematicky konstruovat $V_n \xrightarrow[n\to\infty]{} V$ .... rozdělení Ω na $\bigcup_k \omega_k$

Požadavky (vlastnosti) FEM:

- co nejlepší pokrytí $V_n \subset V$ ... systematická konstrukce bází pro $n\to\infty$: $u_n \to u$
- vhodné vlastnosti úlohy $Ax=b$ → řídká matice

  ϕ_i mají malý supp $\phi_i(x)$ a jen A_{ij}, kde

  supp $\phi_i \cup$ supp $\phi_j \neq \emptyset$ jsou nenulové
- snadná rekonstrukce řešení $u(x) = \sum \xi_j \phi_j(x)$

  pro $x \in \omega_k$ jen málo $\phi_j \neq 0$ na ω_k

  → málo členů sumy

→ většinou $\phi_j = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}$ ve význ. bodech sítě

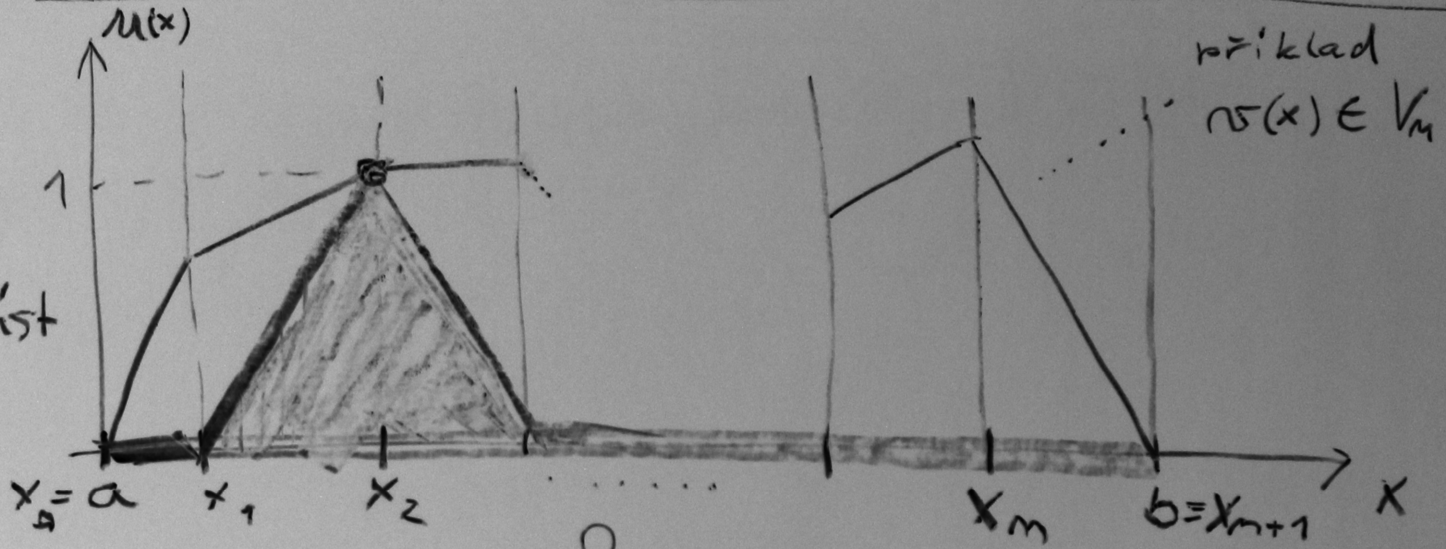
PŘÍKLAD: Implementace FEM pro 1D problém (např. Poisson)

$\Omega = \langle a, b \rangle$

"triangulace"

$\omega_j = \langle x_{j-1}, x_j \rangle$

$V_m \equiv \forall$ spoj. po část lin fce, splň OKR. PODM.



... počet volných param $\equiv |V_m| = n$ ... např. funkční hodn $v(x_m)$

možná báze:

$$\phi_i(x_j) = \delta_{ij} \quad \ldots \quad \operatorname{supp} \phi_i \equiv \omega_i \cup \omega_{i+1}$$

• <u>rozklad do báze</u> $\quad v(x) = \sum_{j=1}^{m} \eta_j \phi_j(x)$ ... platí $\eta_j = v(x_j)$

matice $\quad A_{ij} = a(\phi_i, \phi_j) = \int_a^b p(x)\, \phi_i' \phi_j' + q(x)\, \phi_i \phi_j \, dx$ (pro PŘ 1)

$\neq 0$ jen pro sousedy

pravá str: $\quad b_j = \int_a^b f(x)\, \phi_j(x)\, dx$

... stačí umět spočíst $\int_{\omega_j} p, \int_{\omega_j} q, \int_{\omega_j} f, \int_{\omega_j} xq, \int_{\omega_j} xf, \int_{\omega_j} x^2 q$

speciálně pro Poisson rovnici $-\Delta u = f$

na rovnoměrné síti: $A = \frac{1}{h}\begin{pmatrix} 2 & -1 & & \\ -1 & 2 & -1 & \\ & -1 & \ddots & \ddots \\ & & \ddots & 2 \end{pmatrix}$

... tj. $Ax = b$ jako pro metodu sítí (konečné diference)

ale ... pravá strana .. $b_j = \int_a^b f(x)\varphi_j(x)\,dx \approx h f(x_j)$

liší se malinko

... pro hladké f téměř totéž, ale FEM má smysl i pro δ-funkci pravou str.

Ukázka odhadu chyby v metodě FEM

... pro předch. příklad ... aprox. po částech lin fcí + Poisson

① ověření spojitosti $a(u,v) \equiv \int u' v' \, dx \leq \|v'\|_{L_2} \cdot \|u'\|_{L_2} \leq \|v\|_{H^1} \cdot \|u\|_{H^1}$

tj spojité s konst $\gamma = 1$

② ověření eliptičnosti ... $\exists \alpha : \; a(v,v) \geq \alpha \|v\|_{H^1}$

$v(x) = 0 + \int_0^x v' \, dx$

$\Rightarrow |v(x)| \leq \int_0^x |v'| \, dt \leq \int_0^1 |v'| \, dx \leq \sqrt{\int 1 \, dx} \cdot \sqrt{\int |v'|^2 \, dx} \Rightarrow |v|^2 \leq \int |v'|^2 \, dx$

$\Rightarrow \int |v|^2 \leq \int |v'|^2 \, dx$

$\Rightarrow a(v,v) \equiv \frac{1}{2} \int v'^2 \, dx + \frac{1}{2} \int v'^2 \, dx \geq \frac{1}{2} \int (v^2 + v'^2) \, dx = \frac{1}{2} \|v\|_{H^1}$

tj $\alpha = \frac{1}{2}$

(3) Dá se DK že u_n je na modelovém prostoru V_n (skoro) nejlepší možnou aproximací správného řešení

přesněji $\|u-u_n\| \leq \frac{\gamma}{\alpha}\|u-v\| \quad \forall v \in V_n$

DK: (S) ... přesná $a(u,w)=L(w) \quad \forall w \in V_n \subset V$

modelová $a(u_n,w)=L(w) \quad \forall w \in V_n$

$\rightarrow a(u-u_n,w)=0 \quad \forall w \in V_n$

tedy: $\alpha\|u-u_n\|_V^2 \leq a(u-u_n,u-u_n) = a(u-u_n,u-u_n-w)$

$= a(u-u_n,u-v) \leq \gamma\|u-u_n\|_V \cdot \|u-v\|_V$

$\Rightarrow$ QED

---

pro náš PŘ: $\|u-u_n\|_{H^1} \leq \|u-v\|_{H^1}$

+ chyba lin interpolace: $|u'(x)-\tilde{u}_n'(x)| \leq h \max|u''|$

$|u(x)-\tilde{u}_n(x)| \leq \frac{h^2}{8}\max|u''|$

$$\Rightarrow \boxed{\|u-u_n\|_{H^1} \leq C h}$$