OPAKOVÁNÍ: Slabá formulace, Galerkin a FEM

Okrajová úloha: $\hat{D} u = f$ na $\vec{x} \in \Omega$

$u = 0$ na $\partial\Omega$

Slabá formulace: $a(u,v) = L(v) \quad \forall v \in V$

na nějakém V ... Hilbert s $(\cdot|\cdot)$ a $\|\cdot\|$

Galerkinova metoda: $V_n = \mathcal{L}\{\phi_1, \phi_2, \dots \phi_n\} \subset V$

...aproximace $u_n \in V_n$:

$a(u_n, v) = L(v) \quad \forall v \in V_n$

→ $A\xi = b$; kde $A_{mn} = a(\phi_m, \phi_n)$

$b_m = L(\phi_m)$

$u_n(x) = \sum_m \xi_m \phi_m(x)$

PŘ.:

$-\Delta u(x) = f(x)$

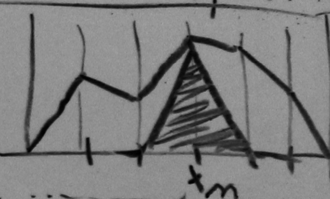
$u(x) = 0$

na $\langle 0, 1 \rangle$

$\int_0^1 u'(x) v'(x)\,dx = \int_0^1 f(x) v(x)\,dx \quad \forall v(x) \in H^1_0$

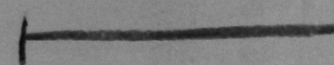
$V = H^1_0 = \{v \in L_2, v' \in L_2, v(0) = v(1) = 0\}$

$V_n = $



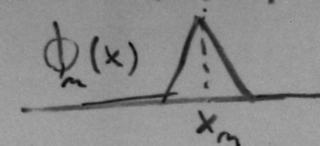
$\phi_m(x) =$ ...

FEM: $\Omega =$



$= \bigcup_m \omega_m =$

+lokaliz. báze



→ A řídká matice

→ $\xi_m \equiv u(x_m)$

Zvyšování přesnosti – příklady prvků v 1D

ukázali jsme ... Poisson 1D ... V_h = po částech lin. spoj fce

$\longrightarrow$ $\| u - u_h \|_{H^1} \leq Ch$ .... konverguje jako $O(h)$

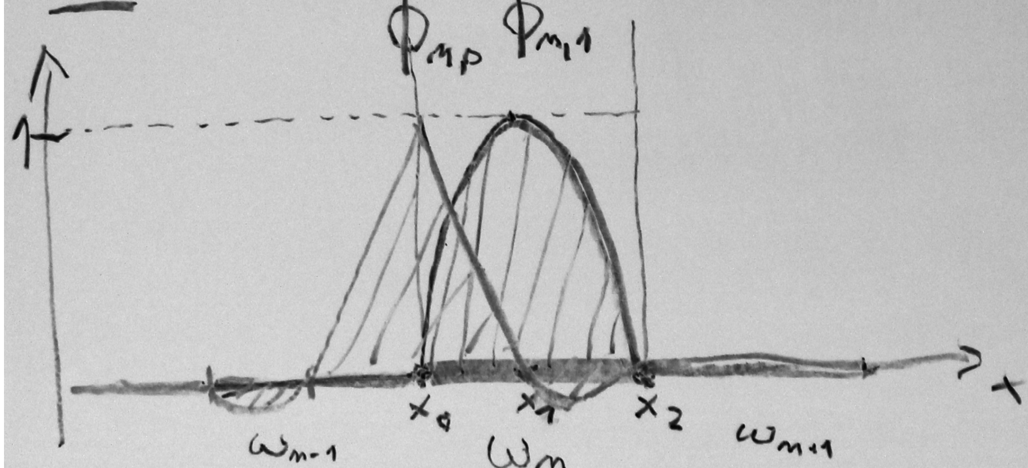
odhad pomocí Lax-Milgram věty (ale nemusí bodově! integ. norma

... (S) dá nejlepší aprox. u na $V_h \subset V$

.. přesnější řešení $\longrightarrow$ zvětšit V_h ... RŮZNÉ STRATEGIE

- Lagrangeovy prvky: – pomocné body uvnitř každé podoblasti ω_m
  – vyšší polynomy .. nulové ve ~~tt~~ bodech mimo 1

PŘ: kvadratický Lagrange-prvek P_2 ... V_h .. po částech kvadrat, spojité



$\phi_k(x) = A + Bx + Cx^2$

pomocné body x_0, x_1, x_2

$\phi_{m,k}(x_\ell) = \delta_{k\ell}$

HOTOVÉ BÁZOVÉ FCE

NA V_h ... spojité

Hladší prvky v 1D

zatím V_h ... spojité ... jinak ϕ' generuje δ-členy v $\int \phi_n' \phi_m'$

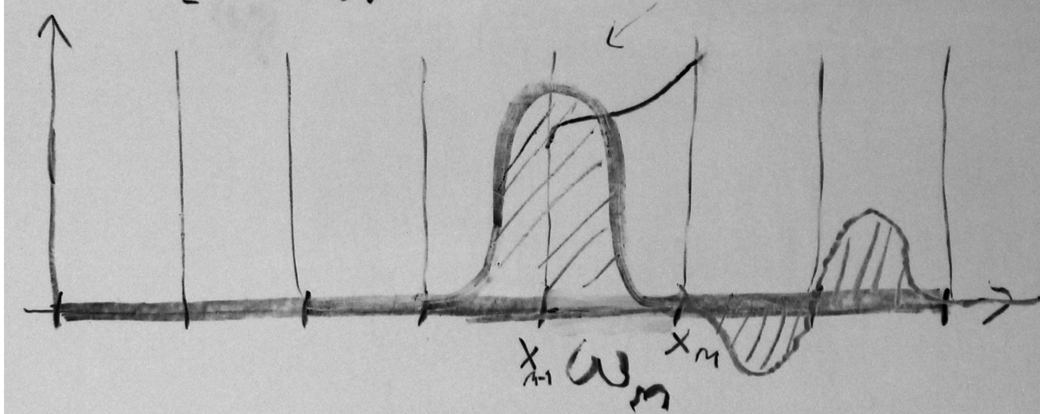
pro úlohy vyšších řádů ... $V = H^2$ ... $(\phi, \psi) = \int (\phi''\psi'' + \phi'\psi' + \phi\psi)$

→ nutná spojitost 1. derivací jinak δ-člen

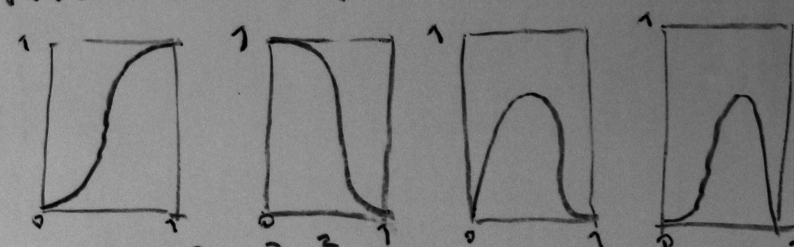
PŘ: Hermiteovy prvky v 1D ... odvozeny z Hermite-aprox.

$V_h = \{$po částech kubické; spojité $v(x), v'(x)\}$
(spline)

$ax^3 + bx^2 + cx + d$ ← dáno znalostí $\phi(x_{m-1}), \phi'(x_{m-1})$,
$\phi(x_m), \phi'(x_m)$



volba ... jen 0 a jedna 1:



$1 - 3x^2 \mp 2x^3$ $x \pm 2x^2 + x^3$

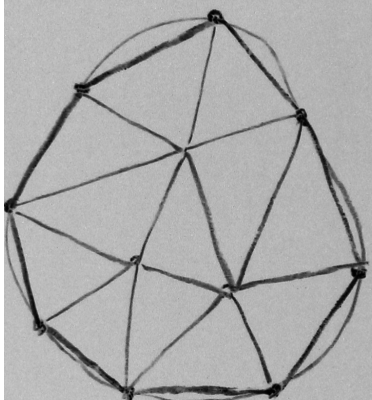
škálování a posun → finální báze

$\phi_{m,0}(x_k) = \delta_{mk}$ $\phi_{m,1}(x_k) = 0$

$\phi_{m,0}'(x_k) = 0$ $\phi_{m,1}'(x_k) = \delta_{m,k}$

rozvoj $u(x) = \sum_m \sum_\ell c_{m\ell} \phi_{m\ell}(x) \longrightarrow u(x_k) = c_{k0};\ u'(x_k) = c_{k1}$

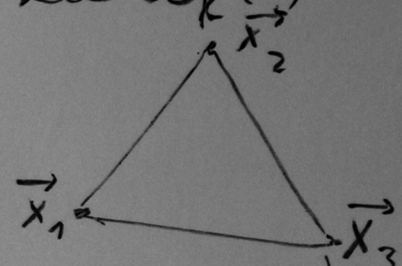
Konečné prvky ve 2 a více dimenzích



Triangulace oblasti Ω + prostor:

$$V_n = \{ \text{po částech lineární spojité funkce} \}$$

fce $v(x)$ na $\forall$ trojúhelníku $\omega_k(x)$ daná hodnotami $v(\vec{x}_i) = v_i$ ve vrcholech



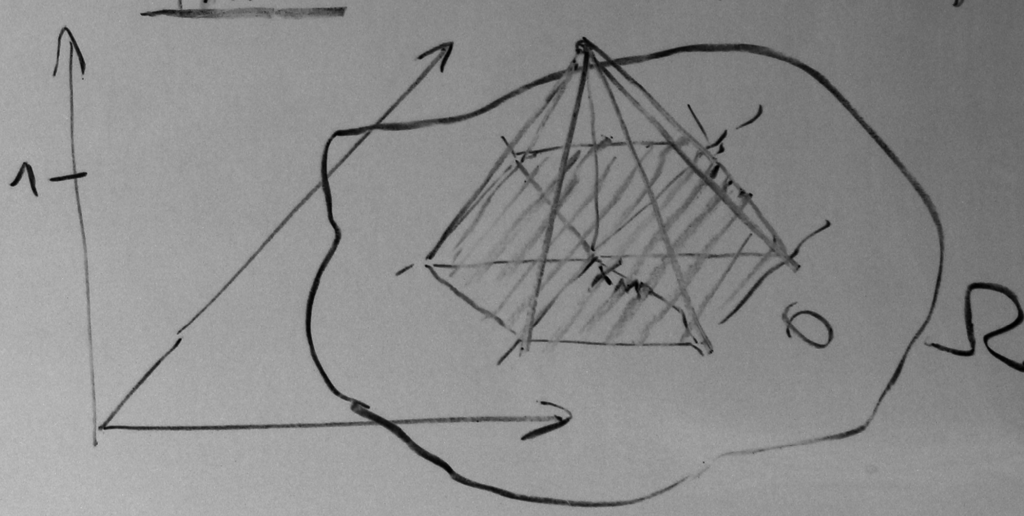
$\Omega = \bigcup_k \omega_k$ dim V_n = počet vnitř. bodů

→ bázové fce lze číslovat vnitř. body $\phi_n(\vec{x})$: supp ϕ_n malý

jehlany $\phi_n(\vec{x}_k) = \delta_{nk}$

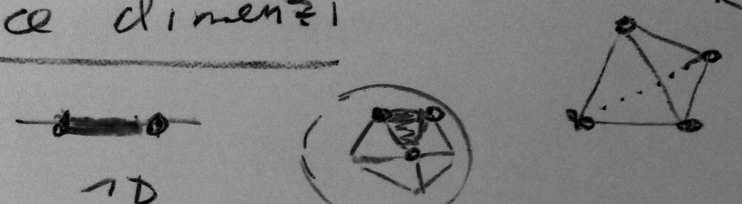
tj. $u(\vec{x}) = \sum_k c_k \phi_k(\vec{x})$

→ $c_k = u(\vec{x}_k)$



Zobecnění do více dimenzí

triangulace simplexy:



1D 2D 3D mD

ω_k simplex

$\dots \vec{x}^{(0)}, \vec{x}^{(1)}, \dots, \vec{x}^{(D)}$

Lineární funkce na ω_k opět dána $D+1$ hodnotami $u(\vec{x}^{(k)}) \equiv u_k$

Lin. interpolace: $\phi(\vec{x}) = a_0 + c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots c_D x_D$

najdeme báz. fce $\phi_m(x^{(k)}) = \delta_{km}$:

$\sim \alpha\, \delta_{mk}$ v $x = x^{(k)}$

$$\phi_m(\vec{x}) = \begin{vmatrix} x_1^{(m)} - x_1, & x_1^{(m)} - x_1^{(0)}, & \dots\dots, & x_1^{(m)} - x_1^{(D)} \\ x_2^{(m)} - x_2, & x_2^{(m)} - x_2^{(0)}, & & x_2^{(m)} - x_2^{(D)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_D^{(m)} - x_D, & \underbrace{x_D^{(m)} - x_D^{(0)}, \quad , x_D^{(m)} - x_D^{(D)}}_{\text{chybí } x^{(m)} - x^{(m)}} \end{vmatrix} \Big/ \Delta_m(\vec{x}^{(m)})$$

$\Delta_m(\vec{x}) \longleftarrow$ chybí $x^{(m)} - x^{(m)}$

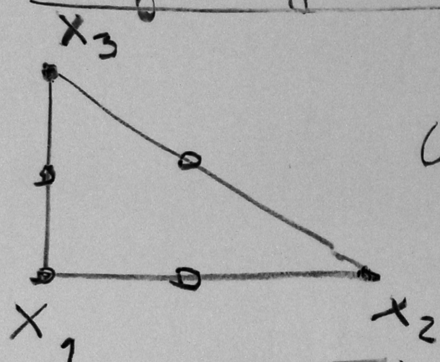
$\vec{x} \to \vec{x}^{(m)}$

výraz $0/0$ z odstranitelnou singularitou $= 1$

Polynomy vyššího řádu .. 2 a více D

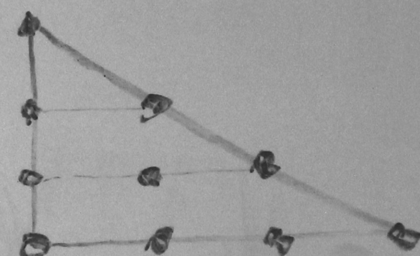
PŘ: Lagrangeovy prvky 2D

pomocné body



$$\omega_K = a + b_1 x + b_2 y + c_1 x^2 + c_2 x y + c_3 y^2$$
$$+ d_1 x^3 + d_2 x^2 y + d_3 x y^2 + d_4 y^4$$

$$\boxed{\phi_{k,l}(\vec{x}_m) = \delta_{lm}}$$



polynom řádu N v 2D ... $\binom{N+2}{2}$ pomocných bodů

funguje obecně v D dimenzích $p_N(\vec{x})$ .... $\binom{N+D}{D}$ koeficientů

= počet bodů v pyramidě

$$u(\vec{x}) = \sum_{m,l} c_{m,l}\, \phi_{m,l}(\vec{x}) \quad \Rightarrow \quad u(\vec{x}_{k,l}) = c_{k,l}$$

Gradientní iterační metody

úloha: najít x: $Ax = b$ $\quad$ A symetrická, pozit. defin.

matice $N \times N$ $\quad$ (řídká)

- přímá metoda ... $O(N^3)$ FLOPS

stejně jako $A \cdot B$ $\longrightarrow$ podstatně méně FLOPS

Reformulace: najít $\vec{x}$ minimalizující $\phi(\vec{x}) \equiv \frac{1}{2} x^T A x - x^T b$

(kopíruje (V))

... minimum: $\nabla \phi(\vec{x}) = Ax - b = 0$ ... kopíruje (S)

pozn.... reziduum $\vec{r} \equiv b - Ax = -\nabla\phi$ ... rychlý výpočet

strategie hledání minima: METODA PŘÍMEK, ITERAČNÍ: $\vec{x}_0, \vec{x}_1, \vec{x}_2 \ldots$

- volba poč. odhadu $\vec{x}_0$
- volba směru $\vec{p}_0$
- další $\vec{x}_{k+1}$ ... minimalizuje $f(\alpha_k) \equiv \phi(\vec{x}_{k+1} = \vec{x}_k + \alpha_k \vec{p}_k)$

různé volby — různé metody

Metoda největšího spádu

- pedagogický význam – neefektivní !
- volba .. $p_k = -\nabla\phi(x_k) \equiv r_k$ ... reziduum

.... v okolí x_k zaručuje nejrychlejší pokles $\phi(x)$

... zaručí vždy zmenšení $\phi(x_k) \to \phi(x_{k+1})$

nalezení α_k ... minimum $\phi(x_k + \alpha_k r_k) \equiv \frac{1}{2}(x+\alpha r)^T A (x+\alpha r) - (x+\alpha r)^T b$

$$\frac{\partial\phi}{\partial\alpha} = r^T A(x+\alpha r) - r^T b = \alpha r^T A r + r^T(Ax-b) = \alpha r^T A r - r^T r = 0$$

$$\longrightarrow \alpha_k = \frac{r_k^T r_k}{r_k^T A r_k}$$

Shrnutí:

$$r_k = b - \cancel{A x_k}$$

$$\alpha_k = r_k^T r_k / r_k^T A r_k$$

$$x_{k+1} = x_k + \alpha_k r_k$$

.... OPTIMALIZACE ušetří jedno Ax

$$r_{k+1} = b - A x_{k+1} = b - A(x_k + \alpha_k r_k)$$

$$= r_k - \alpha_k A r_k$$

Algoritmus (METODA NEJVĚTŠÍHO SPÁDU)

- volím $\vec{x}_0$
- spočtu $\vec{r}_0 = \vec{b} - A\vec{x}_0$
- $k = 0, 1, 2 \dots$: $\vec{w}_k = A\vec{r}_k$

$$\alpha_k = \vec{r}_k^{\,T} \vec{r}_k \,/\, \vec{r}_k^{\,T} \vec{w}_k$$

$$\vec{x}_{k+1} = \vec{x}_k + \alpha_k \vec{r}_k$$

$$\vec{r}_{k+1} = \vec{r}_k - \alpha_k \vec{w}_k$$

ukončení pokud $\| r_{k+1} \| < \varepsilon$

1x maticové násobení na 1 cyklus

... navíc stačí dodat extra proceduru pro $\vec{y} = A\vec{x}$

... užití struktury matice A

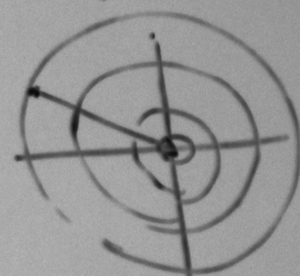
konvergence metody nejv. spádu

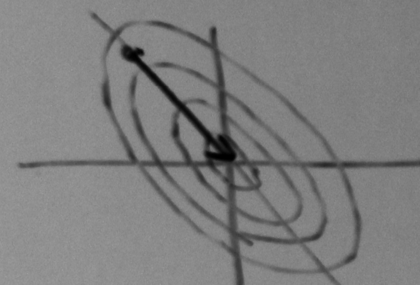
A .. sym. pozit. def => spektrální rozkl (diagon. repr.) $A = \sum_i v_i \lambda_i v_i^T$

$\lambda_i > 0$

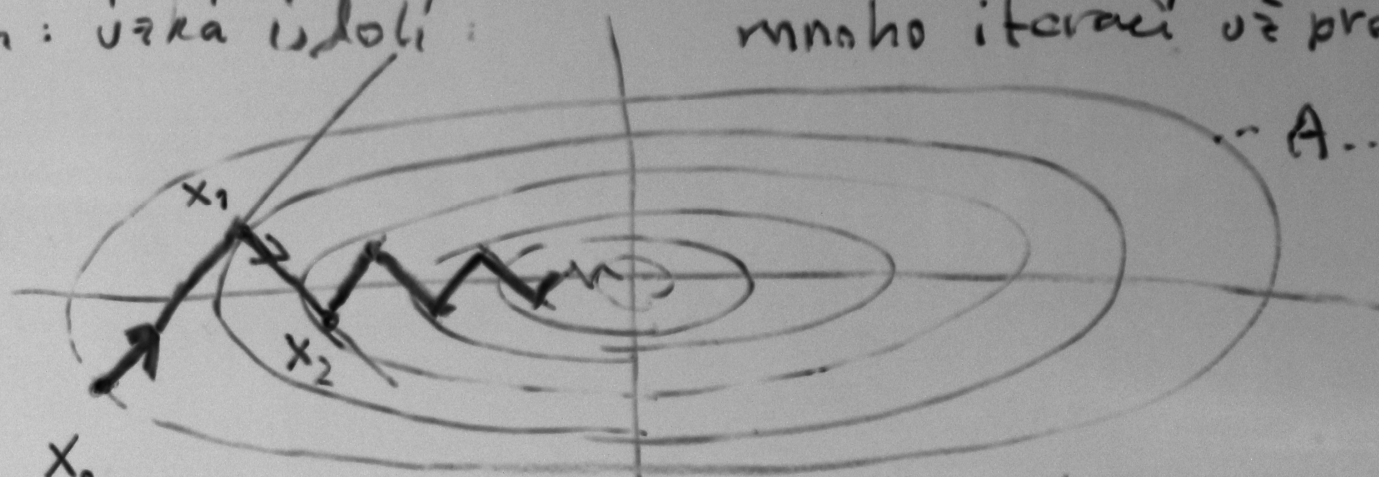
pozn. def $e_k = x_k - x$ .. chyba řešení

- pokud e_k je vl. vektor A → konvergence po 1 iteraci
- pokud A isotropní: koverg. po jedné iter.





- problém: úzká údolí: mnoho iterací už pro 2D



.. A .. 2×2

dá se analyzovat podrobněji pomocí λ_i → viz pozn na webu

Atraktivní vlastnosti:

- jen násobení maticí A ... rychlá jedna iterace pro řídké matice

... snižuje chybu ve smyslu $\phi(x)$

→ tj. pohybujeme se v prostoru $\mathcal{L}\{b, Ab, A^2b, A^3b, \dots\}$ Krylov-space
(volba $x_0 = 0$)

Nevýhoda: pomalá konvergence ... moc iterací

Důvod .. zvolené směry prohledáváme víckrát

Východisko: sdružené gradienty .. už prohledaný směr není třeba znovu řešit

→ po k-krocích .. přesné řešení (V)

$$V_m = \{b, Ab, A^2b, \dots, A^kb\}$$

→ přesné řešení po $k = N$ krocích pro matici $N \times N$

Metoda sdružených gradientů CGM
(conjugated gradients)

obecně ... minimum ve směru $\vec{p}$:

$$\phi(x) = \frac{1}{2}(x+\alpha p)^T A (x+\alpha p) - (x+\alpha p)^T b$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial \alpha} = p^T A (x_k + \alpha p) - p^T b = p^T (A x_k - b) + \alpha p^T A p = -p^T r + \alpha p^T A p = 0$$

$$\rightarrow \quad \alpha = \frac{p^T r}{p^T A p} = -\frac{p^T A e}{p^T A p} \quad \text{.....} \quad e \equiv x_k - x$$

složka vektoru e pro skalární součin s metrikou A: $(u, v)_A = u^T A v$

podstata CGM:

A-ortogonální směry $p_k^T A p_{k'} = \delta_{kk'}$

... metoda přímek najde postupně složky $\vec{e}_0 = \sum_j \beta_j \vec{p}_j$

$$\equiv x_0 - x$$