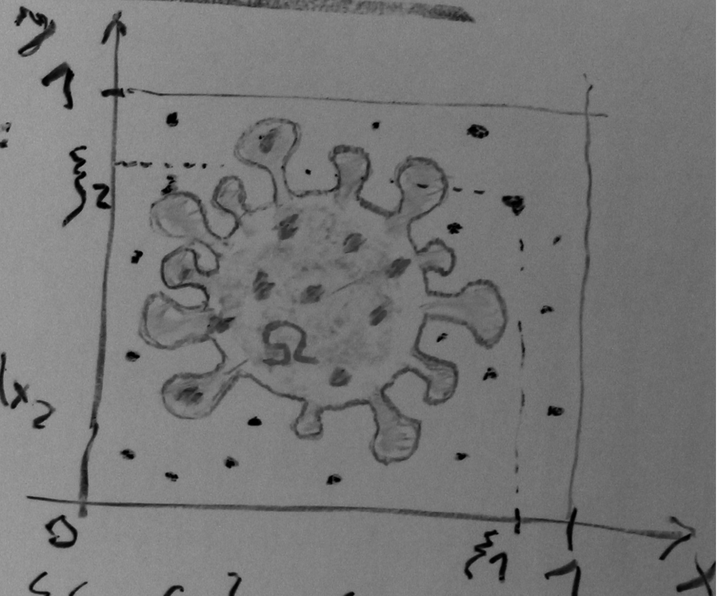
Začneme formulaci integrace metodou MC

PŘ: nalezení plochy obrazce:



$\Omega \subset \langle 0,1\rangle \times \langle 0,1\rangle$ ... plocha:

$$S = \int_\Omega 1 \cdot d\vec{x} = \int_0^1 \int_0^1 \chi_\Omega(x_1, x_2)\, dx_1\, dx_2$$

střelba → dvojice náhod. prom $\vec{X} = \{\xi_1, \xi_2\}$ $\quad \xi_i \in \langle 0,1\rangle$

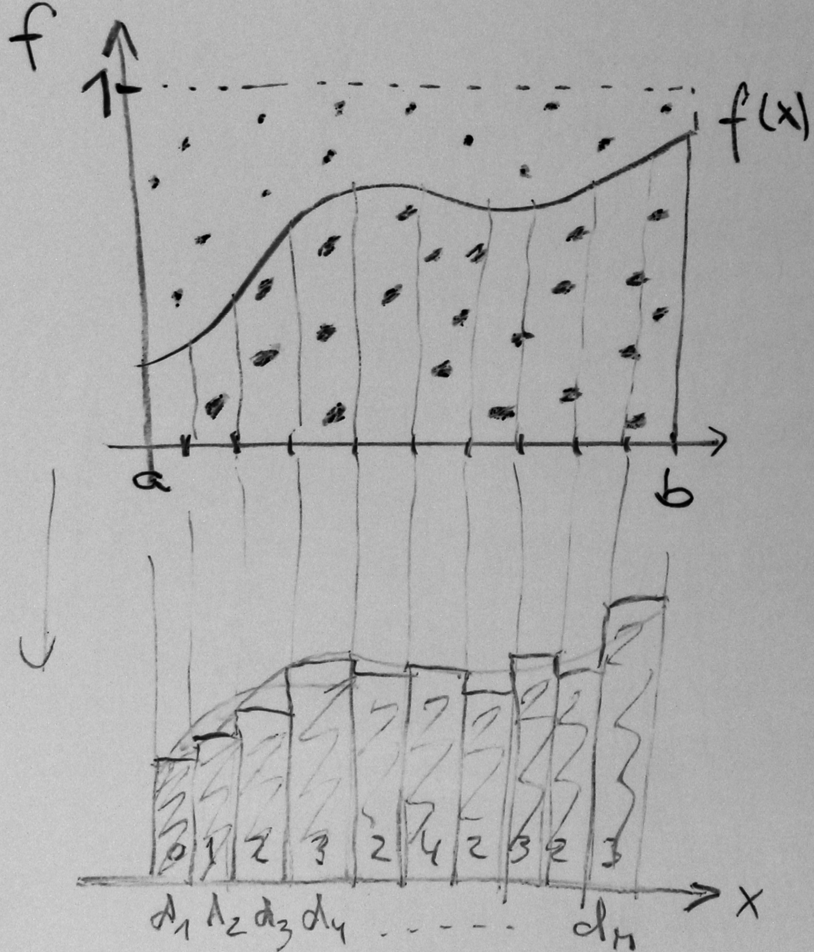
stat. soubor ... $\vec{X}_1, \vec{X}_2, \dots \longrightarrow \{\vec{X}_i\}_{i=1}^{N}$

$$S = \frac{N_\Omega}{N} = \frac{\text{počet zásahů}}{\text{počet pokusů}}$$

vypadá hrubě, ale pro $N \to \infty$ konverguje

a pro vícedimenzionální úlohy může představovat nejrychlejší metodu.

PŘ 2: Reprezentace funkce a její integrál



opět náhodná střelba

do $\langle a,b \rangle \times \langle 0,1 \rangle$ ... $\vec{x} = (\xi_1, \xi_2)$

$\longrightarrow$ náhodný soubor $\{\vec{x}_i\}_{i=1}^{N}$

výběr bodů jen pod funkcí

$\{\vec{y}_i\}_{i=1}^{N_f}$ ... $\vec{y}_i = (X_i, Y_i)$

distribuční fce

pro $N \to \infty$

... $d(x) \longrightarrow f(x)$

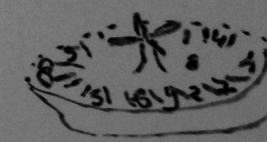
tj soubor $\{x_i\}_{i=1}^{N_f}$ "kóduje" $f(x)$

platí $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)\cdot\frac{N_f}{N}$

Reprezentace spité $f(x)$
diskrétním náhod. souborem
$\{x_i\}_{i=1}^{N}$

matematický rámec: obočka →

Základní pojmy z matematické statistiky



(stručný elementární výklad)

• **Diskrétní náhodná proměnná** … na požádání dá číslo … např.: 

↳ charakterizovaná množinou hodnot $\{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

a pravděpodobností $\{p_1, p_2, \dots, p_m\}$ $\boxed{p_i \in \langle 0, 1 \rangle, \quad \sum p_i = 1}$ $\left\{\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}\right\}$

opakovaným použitím → statistický soubor $\{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N\} \equiv \{\xi_i\}_{i=1}^{N}$

v $\{\xi_i\}$ se hodnota x_i vyskytuje k_i krát $0 \le k_i \le N$

splňuje "ZÁKON VELKÝCH ČÍSEL": $\frac{k_i}{N} \longrightarrow p_i$ pro $N \to \infty$ (velké číslo)

- charakteristyky náhodné proměnné

MC metoda:
veličina

metoda výpočtu

střední hodnota: $\langle x \rangle \equiv \sum_{i=1}^{m} x_i p_i$

podle zákona velkých č. se dá středovat přes stat. soub. $\{\xi_i\}$

$$\langle x \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \xi_i \;\Big|\; \overset{\text{neboť}}{=} \sum_{i=1}^{m} x_i \frac{k_i}{N} \xrightarrow[N\to\infty]{} \sum_i x_i p_i$$

momenty náhod. prom:

$$\mu_m(x) \equiv \sum_{i=1}^{m} x_i^m p_i \xleftarrow{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \xi_i^m$$

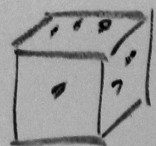
deviace (stř. kvadr. odchylka): $\sigma_x \equiv \langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle = \mu_2 - \mu_1^2$

funkce náhodné prom $\rightarrow$ nová náhod. prom

- hodn. $\{f(x_1), \dots, f(x_m)\}$
- pravd. $\{p_1, \dots, p_m\}$

$$\langle f \rangle \equiv \langle f(x) \rangle = \sum_{i=1}^{m} f(x_i) p_i \xleftarrow[N\to\infty]{} \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} f(\xi_i)$$

PŘ:



kostka

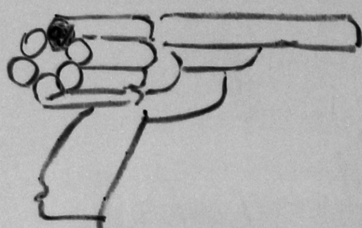
... $x = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ $\qquad \langle x \rangle = \sum_{i=1}^{6} \frac{1}{6} \cdot i = \frac{21}{6} = \frac{7}{2}$

$p = \{\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}\}$

$\xi = \{3, 1, 4, 5, 2, 1, 1, 4, 3, 4, 2, 2, 1, 4, 1, 4, 4, 4, 4, 1, 5, 1, 3, 1, 5, 2, 6, 1, 6, 6\}$ ... $N = 30$

$\langle \xi \rangle = (1 \cdot \underset{9}{k_1} + 2 \cdot \underset{4}{k_2} + 3 \cdot 3 + 4 \cdot 8 + 5 \cdot 3 + 6 \cdot 3) / 30 = \frac{91}{30} \approx \frac{7}{2}$

PŘ2 .. Ruská ruleta .... $x = \{0, 1\}$ $\qquad \langle x \rangle = \frac{1}{6}$



$p = \{\frac{5}{6}, \frac{1}{6}\}$ $\qquad \mu_2 = \frac{1}{6}$ ... $\mu_n = \frac{1}{6}$

výpočet statistickým souborem

... $\langle x \rangle = \frac{\text{počet mrtvých}}{\text{počet účastníků}}$ ... bez prakt. dema

spojitá náhodná proměnná

MC metoda

dodá na požádaní hodnotu x z nějaké množiny (např. $x \in \langle a, b\rangle$) přičemž pravd. nalezení $x \in \langle x_1, x_2 \rangle$ je daná <u>distribuční fcí $p(x)$</u> tj. $P_{\langle x_1, x_2\rangle} = \int_{x_1}^{x_2} p(x)\,dx$.

pozn: obecně $dp = p(x)dx$ .... pravděpod. míra ... teorie míry

$p(x)$ splňuje: $\int p(x)\,dx = 1 \equiv \mu_0$, $p(x) \geq 0$

stat. soubor $\{\xi_i\}_{i=1}^{N}$

MOMENTY:

$$\langle x \rangle \equiv \int x\, p(x)\,dx \qquad \langle x \rangle = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \xi_i$$

$$\mu_m \equiv \langle x^m \rangle = \int x^m p(x)\,dx \quad \dots \quad f = x^m$$

$$\langle f \rangle \equiv \int f(x) p(x)\,dx \qquad \langle f(x) \rangle = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} f(\xi_i)$$

$$\sigma_x^2 \equiv \left\langle \left(x - \langle x\rangle\right)^2 \right\rangle \equiv \mu_2 - \mu_1^2 \qquad \sigma_x^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(\xi_i - \langle x \rangle\right)^2$$

PŘ1: Rovnoměrné rozdělení (funkce RND; random)

$X \in \langle 0,1 \rangle$ ... $p(x) = 1$

$$\langle x \rangle \equiv \int_0^1 x\,dx = \frac{1}{2} \qquad \sigma_x^2 \equiv \mu_2 - \mu_1^2 = \frac{1}{3} - \frac{1}{14} = \frac{1}{12}$$

$$\langle x^m \rangle \equiv \int_0^1 x^m\,dx = \frac{1}{m+1}$$

PŘ2: Gaussovská náhodná proměnná (na Německých bankovkách)

$$x \in \mathbb{R} \qquad p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right)$$

též Normální rozdělení

parametry a, σ určují první dva momenty:

$$\mu_0 = \int p(x)\,dx = 1 \qquad \mu_1 = \langle x \rangle = \int x\,p(x)\,dx = a$$

$$\sigma_x^2 = \mu_2 - \mu_1^2 = \int (x-a)^2 p(x)\,dx = \sigma^2$$

... pravděpodobnosti na intervalu ... Erf

... "pravidlo 3σ" ... $P_{\langle a-3\sigma,\, a+3\sigma \rangle} = 0.997$

"pravděpodobná odchylka": $P_{\langle a-\mu,\, a+\mu \rangle} = 0.5$ ... $\mu \doteq 0.6745\sigma$

Základ MC ... stat. soubor ... zákon vel. čísel a

jak rychlé je $\lim \frac{1}{N} \sum \xi_i \to \langle x \rangle$

CENTRÁLNÍ LIMITNÍ VĚTA

mějme identické náhodné veličiny $X^{(1)}, X^{(2)}, \ldots, X^{(N)}$; statisticky nezávislé a charakterizované $\langle X \rangle = \mu$ a $\sigma_x \equiv \sigma$

Pak náhod. proměnná $S_N \equiv X^{(1)} + X^{(2)} + \ldots + X^{(N)}$ se pro $N \to \infty$ blíží normální (Gaussovské) a $\langle S_N \rangle = N\mu$

$$\sigma_{S_N}^2 = N\sigma^2$$

<u>Důsledek:</u> proměnná $M_N \equiv \frac{S_N}{N}$

... $\langle M_N \rangle = \mu$ a rozptyl $\sigma_{M_N} = \frac{\sigma}{\sqrt{N}} \longrightarrow 0$
("chyba")

OBECNÉ SCHÉMA METODY MC

ÚLOHA: nalézt veličinu m

přeformulovat ... najít náhodnou prom x tak, že $m = \langle x \rangle$

MC výpočet: ... generujeme náhodný soubor $\{\xi_i\}_{i=1}^{N} = \{\xi_1, \xi_2, \dots\}$

pak $m \doteq \frac{1}{N} \sum_i \xi_i \equiv m_N$ s chybou $\sim \frac{\sigma_x}{\sqrt{N}} \xrightarrow[N \to \infty]{} 0$

přesněji m_N je normální náhod. proměnná

s $\langle m_N \rangle = m$ a konkrétní realizace pomocí

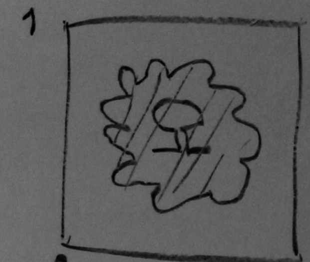
leží jen s prav. 0.3 % mimo $\left\langle m - \frac{3\sigma_x}{\sqrt{N}}, m + \frac{3\sigma_x}{\sqrt{N}} \right\rangle$

s pravd. 50% v int. $\left\langle m - \frac{r}{\sqrt{N}}, m + \frac{r}{\sqrt{N}} \right\rangle$

$r \doteq 0.67\sigma_x$

PŘ: kolik nástřelů potřebujeme k určení plochy obrazce na začátku?

s přesností 1‰



náhod. prom $f(x_1, x_2) \equiv f(\vec{x})$ na $\vec{x} \in \langle 0,1\rangle \times \langle 0,1\rangle$

$$f(\vec{x}) = \begin{cases} 1 \dots \vec{x} \in \Omega \\ 0 \dots \vec{x} \notin \Omega \end{cases} = \chi_\Omega(\vec{x})$$

pak $m_f \equiv \int f(\vec{x})\, d\vec{x} = S$

rozptyl $\sigma_f^2 = \mu_2 - m_f^2 = \int f^2\, d\vec{x} - S^2 = S - S^2$

výpočet MC: $m_N = \dfrac{N_f}{N} \to m_f = S$ s chybou $\sim \dfrac{\sigma_f}{\sqrt{N}} = \sqrt{\dfrac{S - S^2}{N}}$

řekněme, že $S \approx \frac{1}{2} \to \sigma_f = \frac{1}{2}$ ... chyba 1‰ $\sim 0.001 = \sqrt{\dfrac{1}{4N}}$

$\to 4N = 10^6$ .. $\boxed{N \sim 250\,000}$

konkrétní aplikace MC metody

INTEGRACE METODU MC

$$I \equiv \int_a^b f(x)\,dx \qquad = (b-a)\int_a^b f(x)\,p(x)\,dx = \langle (b-a) f(x) \rangle$$

formulace pomocí náhodné prom $x \in \langle a, b\rangle$ ... $p(x) = \frac{1}{|b-a|}$

... I = stř. hodnota náhod. prom. $(b-a)f(x)$

Vypočet pomocí MC: stat soubor $\{\xi_1, \xi_2, \xi_3 \ldots, \xi_N\}$

$\hookrightarrow$ rovnoměr rozdělení na $\langle a, b\rangle$

N - - - $\sigma_x = |b-a| \cdot \frac{1}{12}$

aproximace $I \simeq I_N \equiv \dfrac{(b-a)}{N} \displaystyle\sum_{i=1}^{N} f(\xi_i)$

$$\sigma_f = \sqrt{\langle f^2\rangle - \langle f\rangle^2} \cdot (b-a)$$

$\longrightarrow$ chyba $\sim \dfrac{\sigma_f}{\sqrt{N}}$

Zobecnění do více dimenzí

$$I = \int_\Omega f(\vec{x})\, d\vec{x}$$ ... rovnoměrně rozdělená náhodná proměnná $\vec{x} \in \Omega$ ... $p(\vec{x}) = \frac{1}{V}$

V = objem Ω

$$I = m = \langle f \cdot V \rangle = \int_\Omega V \cdot f(\vec{x}) \cdot p(\vec{x})\, d\vec{x}$$

MC výpočet: $I \simeq m_N = \frac{V}{N} \cdot \sum_{i=1}^{N} f(\vec{\xi}_i)$ ... stat. soubor $\{\vec{\xi}_i\}_{i=1}^{N}$

... chyba opět $\sim V \cdot \frac{\sigma_f}{\sqrt{N}}$ ... $\sigma_f \equiv \langle f^2 \rangle - \langle f \rangle^2$

→ prakticky stejně obtížné jako 1D !

porovnání MC integrace s metodami založ. na polynomiální interpolaci

MC: $I \simeq \frac{V}{N} \sum_i f(\vec{\xi}_i)$ náhodné body

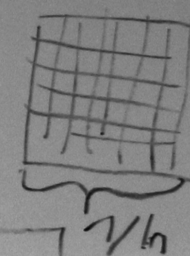
Newton-Cotes: $I \simeq \sum_i f(x_i)\, w_i$ váhy, uzly

chyba pro N bodů: MC ... $\sim O(N^{-1/2})$ ... $\frac{\sigma}{\sqrt{N}}$

Lichoběžník v 1D: ... chyba $O(h^2) \sim O(N^{-2})$ .. $h = \frac{|a-b|}{N}$

lichoběžník ve d-dim chyba $O(h^2)$ ale $N = \left(\frac{a-b}{h}\right)^d$

tj $h \sim N^{-1/d}$ $\quad = O(N^{-2/d})$



simpson $O(h^4) = O(N^{-4/d})$

... MC lepší pro $d \geq 8$

$\boxed{\text{MC lepší pro } d \geq 4}$