Lorentzova transformace
a jednorozměrná vlnová rovnice

Zadání

1. Určete infinitezimální generátor
$$X = \xi^x(x,t)\frac{\partial}{\partial x} + \xi^t(x,t)\frac{\partial}{\partial t} \tag{1}$$
Lorentzovy transformace
$$\tilde{x} = \gamma(x - vt)\,, \quad \tilde{t} = \gamma(t - vx/c^2)\,, \quad \gamma = \sqrt{1 - v^2/c^2}\,. \tag{2}$$

2. Řešením systému obyčejných diferenciálních rovnic
$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}\tilde{x}}{\mathrm{d}\varepsilon} &= \xi^x(\tilde{x},\tilde{t})\,, \qquad \tilde{x}(0) = x\,, \\ \frac{\mathrm{d}\tilde{t}}{\mathrm{d}\varepsilon} &= \xi^t(\tilde{x},\tilde{t})\,, \qquad \tilde{t}(0) \ = t \end{aligned} \tag{3}$$
vyjádřete transformaci (2) pomocí parametru ε, pro který bude platit $\phi(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$. Jaký je vztah nového parametru ε a rychlosti v?

3. Ověřte, že vlnová rovnice
$$\frac{\partial^2\psi(x,t)}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi(x,t)}{\partial t^2} = 0 \tag{4}$$
je invariantní vůči Lorentzově transformaci (2). Uhodněte (nebo spočtěte) další tři elementární symetrie této rovnice.

4. Které z nalezených symetrií jsou též variační symetrie? Lagrangián odpovídající rovnici (4) je
$$L[\psi] = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial x}\right)^2 - \frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial t}\right)^2\right]. \tag{5}$$
Vyberte si jednu symetrii a nalezněte jí odpovídající zákon zachování.

5. Určete partikulární řešení rovnice (4), které je invariantním řešením při Lorentzově transformaci.

Řešení

1. Infinitezimální Lorentzovu transformaci lze pomocí infinitezimálů $\xi^x(x,t)$ a $\xi^t(x,t)$ zapsat jako

$$\tilde{x}(x,t;v) = x + v\xi^x(x,t) + O(v^2)\,,$$
$$\tilde{t}(x,t;v) = t + v\xi^t(x,t) + O(v^2)\,.$$

Infinitezimály určíme pomocí

$$\xi^x(x,t) = \left.\frac{\partial\tilde{x}(x,t;v)}{\partial v}\right|_{v=0} = -t\,, \tag{6}$$
$$\xi^t(x,t) = \left.\frac{\partial\tilde{t}(x,t;v)}{\partial v}\right|_{v=0} = -\frac{x}{c^2} \tag{7}$$

a hledaný generátor (1) má tedy tvar

$$X = -t\frac{\partial}{\partial x} - \frac{x}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\,. \tag{8}$$

2. Dosazením (6) a (7) do systému (3) obdržíme

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}\tilde{x}(\varepsilon)}{\mathrm{d}\varepsilon} &= -\tilde{t}(\varepsilon)\,, \qquad & \tilde{x}(0) &= x\,,\\ \frac{\mathrm{d}\tilde{t}(\varepsilon)}{\mathrm{d}\varepsilon} &= -\frac{\tilde{x}(\varepsilon)}{c^2}, \qquad & \tilde{t}(0) &= t\,. \end{aligned} \tag{9}$$

Derivací první rovnice podle ε a dosazením z druhé za derivaci $\mathrm{d}\tilde{t}/\mathrm{d}\varepsilon$ dostaneme ODR

$$\frac{\mathrm{d}^2\tilde{x}(\varepsilon)}{\mathrm{d}\varepsilon^2} = \frac{\tilde{x}(\varepsilon)}{c^2}\,,$$

jejíž obecné řešení je

$$\tilde{x}(\varepsilon) = A\mathrm{e}^{\lambda_1\varepsilon} + B\mathrm{e}^{\lambda_2\varepsilon}, \tag{10}$$

kde $\lambda_{1,2}$ jsou řešení charakteristické rovnice

$$\lambda^2 = \frac{1}{c^2}\,, \quad \text{tedy} \quad \lambda_1 = \frac{1}{c}\,,\ \lambda_2 = -\frac{1}{c}\,.$$

Pro $\tilde{t}(\varepsilon)$ dostaneme

$$\tilde{t}(\varepsilon) = -\frac{\mathrm{d}\tilde{x}(\varepsilon)}{\mathrm{d}\varepsilon} = -\frac{A}{c}\mathrm{e}^{\varepsilon/c} + \frac{B}{c}\mathrm{e}^{-\varepsilon/c}\,. \tag{11}$$

Neznámé konstanty A, B určíme z počátečních podmínek systému (9), které vedou na soustavu

$$\tilde{x}(\varepsilon=0) = A + B = x\,, \quad \tilde{t}(\varepsilon=0) = -\frac{1}{c}(A-B) = t\,,$$

jejíž řešení je

$$A = \frac{x-ct}{2}\,, \quad B = \frac{x+ct}{2}\,.$$

Dosadíme-li za A, B do (10) a (11) a využijeme-li definice hyperbolických funkcí, můžeme Lorentzovu transformaci vyjádřit jako

$$\tilde{x}(x,t;\varepsilon) = x\cosh\frac{\varepsilon}{c} - ct\sinh\frac{\varepsilon}{c}\,, \tag{12}$$
$$c\tilde{t}(x,t;\varepsilon) = -x\sinh\frac{\varepsilon}{c} + ct\cosh\frac{\varepsilon}{c}\,, \tag{13}$$

tj. jde o „rotaci“ v $1+1$-Minkowském prostoru se souřadnicemi (x, ct). Vztah mezi novou parametrizací Lorentzovy transformace pomocí ε a parametrizací pomocí rychlosti v získáme nejsnáze porovnáním výrazů stojících u x a t v rovnicích (2) a (12) pro $\tilde{x}$, neboli

$$\cosh\frac{\varepsilon}{c} = \gamma\,, \quad -c\sinh\frac{\varepsilon}{c} = -\gamma v\,.$$

Jejich vydělením dostaneme převodní vztah

$$\tanh\frac{\varepsilon}{c} = \frac{v}{c}\,. \tag{14}$$

Poznamenejme, že provedeme-li Lorentzovu transformaci (2), resp. (12)–(13), dvakrát po sobě, jednou s parametrem v_1, resp. ε_1, a podruhé s parametrem v_2, resp. ε_2, dostaneme opět Lorentzovu transformaci tentokrát s parametrem

$$v_3 = \frac{v_1 + v_2}{1 + \frac{v_1 v_2}{c^2}}\,, \quad \text{resp.} \quad \varepsilon_3 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2\,,$$

kde první vztah je známý vzoreček pro skládání rychlosti ve speciální teorii relativity. Můžeme ho odvodit buď přímo z Lorentzovy transformace (2), nebo ze vztahu $\varepsilon_3 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$ dosazením za ε z (14) a využitím vzorečku

$$\tanh(\operatorname{arctanh}\alpha + \operatorname{arctanh}\beta) = \frac{\alpha+\beta}{1+\alpha\beta}\,.$$

3. V následujícím textu budeme parciální derivaci zapisovat zkráceným způsobem pomocí indexu, kterému předchází čárka, např. $\psi_{,x} = \frac{\partial\psi}{\partial x}$, abychom derivace odlišili od jiných indexů. Totální derivaci budeme značit D_x, kde x je nezávislá proměnná, podle které derivujeme, takže např.

$$\mathrm{D}_x F(x,t,\psi(x,t),\psi_{,x}(x,t),\psi_{,t}(x,t)) = \frac{\partial F}{\partial x} + \psi_{,x}\frac{\partial F}{\partial \psi} + \psi_{,xx}\frac{\partial F}{\partial \psi_x} + \psi_{,tx}\frac{\partial F}{\partial \psi_t} \tag{15}$$

a podobně pro funkce F závislé na vyšších derivacích.

K ověření, že vlnová rovnice

$$\psi_{,xx} - \frac{1}{c^2}\psi_{,tt} = 0 \tag{16}$$

je invariantní vůči Lorentzově transformaci

$$\begin{aligned} \tilde{x} &= X(x,t,\psi;v) = \gamma(x - vt)\,, \\ \tilde{t} &= T(x,t,\psi;v) = \gamma(t - vx/c^2)\,, \\ \tilde{\psi} &= \Psi(x,t,\psi;v) = \psi\,, \end{aligned} \tag{17}$$

kde $\gamma = \sqrt{1 - v^2/c^2}$, můžeme použít tři postupy.

(a) Ukázat, že po transformaci určitého řešení $\psi(x,t)$ dostaneme opět řešení dané rovnice.

(b) Převést vlnovou rovnici do proměnných $(\tilde{x},\tilde{t},\tilde{\psi} = \psi)$ a ukázat, že nová rovnice má stejný tvar jako původní.

(c) Rozšířit generátor (8) a použít infinitezimální kritérium invariance diferenciálních rovnic.

Předvedeme zde podrobně postupy (a) a (c). Postup (b) je jen přeformulováním postupu (a).

(a) Nechť $\psi = f(x,t)$ je libovolné řešení rovnice (16). Při transformaci (17) přejde toto řešení v novou funkci, která je dána implicitně vztahem

$$\tilde{\psi} = \Psi(x,t,f(x,t),v) = \Psi(X(\tilde{x},\tilde{t},\tilde{\psi};-v), T(\tilde{x},\tilde{t},\tilde{\psi};-v), f(X(\tilde{x},\tilde{t},\tilde{\psi};-v), T(\tilde{x},\tilde{t},\tilde{\psi};-v)); v)$$

a konkrétně pro Lorentzovu transformaci má jednoduchý tvar

$$\tilde{\psi}(\tilde{x},\tilde{t}) = f(\gamma(\tilde{x} + v\tilde{t}), \gamma(\tilde{t} + v\tilde{x}/c^2)) = f(x,t)\,.$$

Má-li být rovnice (16) invariantní vůči transformaci (17), musí být obdržená funkce $\tilde{\psi}(\tilde{x},\tilde{t})$ řešením rovnice

$$\tilde{\psi}_{,\tilde{x}\tilde{x}} - \frac{1}{c^2}\tilde{\psi}_{,\tilde{t}\tilde{t}} = 0\,.$$

Pro derivace postupně dostáváme

$$\begin{aligned} \frac{\partial\tilde{\psi}}{\partial\tilde{x}} &= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial\tilde{x}} + \frac{\partial f}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial\tilde{x}} = \gamma\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{v}{c^2}\frac{\partial f}{\partial t}\right)\,, \\ \frac{\partial^2\tilde{\psi}}{\partial\tilde{x}^2} &= \gamma^2\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2\frac{v}{c^2}\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial t} + \frac{v^2}{c^4}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}\right)\,, \\ \frac{\partial\tilde{\psi}}{\partial\tilde{t}} &= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial\tilde{t}} + \frac{\partial f}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial\tilde{t}} = \gamma\left(v\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial t}\right)\,, \\ \frac{\partial^2\tilde{\psi}}{\partial\tilde{t}^2} &= \gamma^2\left(v^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2v\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial t} + \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}\right) \end{aligned}$$

a tedy

$$\frac{\partial^2\tilde{\psi}}{\partial\tilde{x}^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\tilde{\psi}}{\partial\tilde{t}^2} = \gamma^2\left[\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2\left(\frac{v}{c^2}-\frac{v}{c^2}\right)\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial t} + \left(\frac{v^2}{c^4}-\frac{1}{c^2}\right)\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}\right] =$$
$$= \gamma^2\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}\right] = 0\,.$$

Poslední rovnost plyne z předpokladu, že $f(x,t)$ je řešením vlnové rovnice (16).
Ukázali jsme, že funkce $\tilde{\psi}(\tilde{x},\tilde{t})$ získaná transformací funkce $f(x,t)$ je též řešením dané vlnové rovnice, a proto je tato rovnice invariantní vůči Lorentzově transformaci.

(b) Abychom zapsali rovnici (16) v nových souřadnicích $\tilde{x},\tilde{t},\tilde{\psi}$ určených vztahy (17), potřebujeme vyjádřit všechny derivace ψ podle x a t pomocí derivací $\tilde{\psi}$ podle $\tilde{x}$ a $\tilde{t}$. Toho nejsnáze dosáhneme tak, že vyjdeme z inverzní transformace

$$x = X(\tilde{x},\tilde{t},\tilde{\psi};-v) = \gamma(\tilde{x}+v\tilde{t})\,, \tag{18}$$

$$t = T(\tilde{x},\tilde{t},\tilde{\psi};-v) = \gamma(\tilde{t}+v\tilde{x}/c^2)\,, \tag{19}$$

$$\psi = \Psi(\tilde{x},\tilde{t},\tilde{\psi};-v) = \tilde{\psi} \tag{20}$$

a zapíšeme totální diferenciál funkce ψ

$$\mathrm{d}\psi = \frac{\partial\psi}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial\psi}{\partial t}\mathrm{d}t \tag{21}$$

též pomocí (20) jako

$$\mathrm{d}\psi = \mathrm{D}_{\tilde{x}}\Psi\mathrm{d}\tilde{x} + \mathrm{D}_{\tilde{t}}\Psi\mathrm{d}\tilde{t}\,, \tag{22}$$

kde jsme použili totální derivace namísto parciálních derivací, neboť funkce Ψ v rovnici (20) je obecně funkcí $\tilde{x},\tilde{t}$ a $\tilde{\psi}(\tilde{x},\tilde{t})$. Diferenciály d$x$ a dt můžeme vyjádřit obdobně z rovnic (18) a (19)

$$\mathrm{d}x = \mathrm{D}_{\tilde{x}}X\mathrm{d}\tilde{x} + \mathrm{D}_{\tilde{t}}X\mathrm{d}\tilde{t}\,, \tag{23}$$

$$\mathrm{d}t = \mathrm{D}_{\tilde{x}}T\mathrm{d}\tilde{x} + \mathrm{D}_{\tilde{t}}T\mathrm{d}\tilde{t} \tag{24}$$

a po dosazení do (21) a porovnání výrazů stojících u d$\tilde{x}$ a d$\tilde{t}$ s těmi v rovnici (22) obdržíme soustavu rovnic pro derivace ψ podle x a t

$$\mathrm{D}_{\tilde{x}}X\frac{\partial\psi}{\partial x} + \mathrm{D}_{\tilde{x}}T\frac{\partial\psi}{\partial t} = \mathrm{D}_{\tilde{x}}\Psi\,, \tag{25}$$

$$\mathrm{D}_{\tilde{t}}X\frac{\partial\psi}{\partial x} + \mathrm{D}_{\tilde{t}}T\frac{\partial\psi}{\partial t} = \mathrm{D}_{\tilde{t}}\Psi\,. \tag{26}$$

Zavedeme-li jacobián transformace (18)–(19)

$$J = \begin{pmatrix} \mathrm{D}_{\tilde{x}}X & \mathrm{D}_{\tilde{x}}T \\ \mathrm{D}_{\tilde{t}}X & \mathrm{D}_{\tilde{t}}T \end{pmatrix},$$

můžeme řešení soustavy (25)–(26) určit, známe-li inverzní matici J^{-1}. Konkrétně pro Lorentzovu transformaci dostáváme

$$J = \begin{pmatrix} \gamma & v\gamma/c^2 \\ v\gamma & \gamma \end{pmatrix}, \qquad J^{-1} = \begin{pmatrix} \gamma & -v\gamma/c^2 \\ -v\gamma & \gamma \end{pmatrix},$$

a tedy

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial\psi}{\partial x} \\ \frac{\partial\psi}{\partial t} \end{pmatrix} = J^{-1}\begin{pmatrix} \mathrm{D}_{\tilde{x}}\Psi \\ \mathrm{D}_{\tilde{t}}\Psi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma\frac{\partial\tilde{\psi}}{\partial\tilde{x}} - \gamma\frac{v}{c^2}\frac{\partial\tilde{\psi}}{\partial\tilde{t}} \\ -v\gamma\frac{\partial\tilde{\psi}}{\partial\tilde{x}} + \gamma\frac{\partial\tilde{\psi}}{\partial\tilde{t}} \end{pmatrix}.$$

Podobným způsobem lze určit druhé derivace $\psi_{,xx}$ a $\psi_{,xt}$ z transformace

$$\psi_{,x} = \Psi_x(\tilde{x},\tilde{t},\tilde{\psi},\tilde{\psi}_{,\tilde{x}},\tilde{\psi}_{,\tilde{t}}) = \gamma\tilde{\psi}_{,\tilde{x}} - \gamma\frac{v}{c^2}\tilde{\psi}_{,\tilde{t}}$$

a $\psi_{,tx}$ a $\psi_{,tt}$ z transformace

$$\psi_{,t} = \Psi_t(\tilde{x}, \tilde{t}, \tilde{\psi}, \tilde{\psi}_{,\tilde{x}}, \tilde{\psi}_{,\tilde{t}}) = -v\gamma\tilde{\psi}_{,\tilde{x}} + \gamma\tilde{\psi}_{,\tilde{t}}\,.$$

Opět porovnáním patřičných diferenciálů a vyřešením rovnic podobných rovnicím (25)–(26) určíme převodní vztahy

$$\begin{pmatrix} \psi_{,xx} \\ \psi_{,xt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial t} \end{pmatrix} = J^{-1}\begin{pmatrix} \mathrm{D}_{\tilde{x}}\Psi_x \\ \mathrm{D}_{\tilde{t}}\Psi_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma^2\left[\tilde{\psi}_{,\tilde{x}\tilde{x}} - 2\frac{v}{c^2}\tilde{\psi}_{,\tilde{x}\tilde{t}} + \frac{v^2}{c^4}\tilde{\psi}_{,\tilde{t}\tilde{t}}\right] \\ \gamma^2\left[-v\tilde{\psi}_{,\tilde{x}\tilde{x}} + \left(1+\frac{v^2}{c^2}\right)\tilde{\psi}_{,\tilde{x}\tilde{t}} - \frac{v}{c^2}\tilde{\psi}_{,\tilde{t}\tilde{t}}\right] \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \psi_{,tx} \\ \psi_{,tt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2\psi}{\partial t\partial x} \\ \frac{\partial^2\psi}{\partial t\partial t} \end{pmatrix} = J^{-1}\begin{pmatrix} \mathrm{D}_{\tilde{x}}\Psi_t \\ \mathrm{D}_{\tilde{t}}\Psi_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma^2\left[-v\tilde{\psi}_{,\tilde{x}\tilde{x}} + \left(1+\frac{v^2}{c^2}\right)\tilde{\psi}_{,\tilde{x}\tilde{t}} - \frac{v}{c^2}\tilde{\psi}_{,\tilde{t}\tilde{t}}\right] \\ \gamma^2\left[v^2\tilde{\psi}_{,\tilde{x}\tilde{x}} - 2v\tilde{\psi}_{,\tilde{x}\tilde{t}} + \tilde{\psi}_{,\tilde{t}\tilde{t}}\right] \end{pmatrix},$$

přičemž $\psi_{,xt}$ a $\psi_{,tx}$ se pochopitelně transformují stejně.
Nyní už jen dosadíme do vlnové rovnice (16) za $\psi_{,xx}$ a $\psi_{,tt}$ a dostaneme

$$0 = \psi_{,xx} - \frac{1}{c^2}\psi_{,tt} = \gamma^2\left[\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)\tilde{\psi}_{,\tilde{x}\tilde{x}} + \left(\frac{v^2}{c^4} - \frac{1}{c^2}\right)\tilde{\psi}_{,\tilde{t}\tilde{t}}\right] = \tilde{\psi}_{,\tilde{x}\tilde{x}} - \frac{1}{c^2}\tilde{\psi}_{,\tilde{t}\tilde{t}}\,.$$

Při Lorentzově transformaci přechází vlnová rovnice (16) ve vlnovou rovnici stejného tvaru a je tedy invariantní vůči této transformaci.

(c) Protože máme rovnici druhého řádu, budeme potřebovat druhé rozšíření generátoru (8). Druhé rozšíření obecného generátoru symetrie rovnice (16) má tvar

$$X^{(2)} = \xi^x\frac{\partial}{\partial x} + \xi^t\frac{\partial}{\partial t} + \eta\frac{\partial}{\partial\psi} + \eta_x^{(1)}\frac{\partial}{\partial\psi_{,x}} + \eta_t^{(1)}\frac{\partial}{\partial\psi_{,t}} + \eta_{xx}^{(2)}\frac{\partial}{\partial\psi_{,xx}} + \eta_{xt}^{(2)}\frac{\partial}{\partial\psi_{,xt}} + \eta_{tt}^{(2)}\frac{\partial}{\partial\psi_{,tt}},$$

kde $\eta_x^{(1)}$ a $\eta_t^{(1)}$ určují rozšíření dané transformace do prostoru prvních derivací, infinitezimálně

$$\psi'_{,x'} = \psi_{,x} + \varepsilon\eta_x^{(1)}(x,t,\psi,\psi_{,x},\psi_{,t}) + O(\varepsilon^2)\,,$$
$$\psi'_{,t'} = \psi_{,t} + \varepsilon\eta_t^{(1)}(x,t,\psi,\psi_{,x},\psi_{,t}) + O(\varepsilon^2)\,.$$

Podobně $\eta_{xx}^{(2)}, \eta_{xt}^{(2)}, \eta_{tt}^{(2)}$ určují rozšíření do prostoru druhých derivací. Infinitezimální podmínka invariance pro vlnovou rovnici (16) bude

$$X^{(2)}(\psi_{,xx} - \frac{1}{c^2}\psi_{,tt}) = \eta_{xx}^{(2)} - \frac{1}{c^2}\eta_{tt}^{(2)} = 0\,, \tag{27}$$

která musí být splněna pro každé řešení $\psi(x,t)$ vlnové rovnice (16). Potřebujeme tedy určit $\eta_{xx}^{(2)}$ a $\eta_{tt}^{(2)}$. K tomu využijeme obecné vztahy platné pro infinitezimální generátory bodových symetrií skalárních parciálních diferenciálních rovnic

$$\eta_{x_i}^{(1)} = \mathrm{D}_{x_i}\eta - \sum_k(\mathrm{D}_{x_i}\xi^{x_k})\psi_{,x_k}\,,$$
$$\eta_{x_ix_j}^{(2)} = \mathrm{D}_{x_j}\eta_{x_i}^{(1)} - \sum_k(\mathrm{D}_{x_j}\xi^{x_k})\psi_{,x_ix_k}\,.$$

V našem případě máme $x_1 = x, x_2 = t, \xi^x = -t, \xi^t = -x/c^2, \eta = 0$ a postupně dostaneme

$$\eta_x^{(1)} = -(\mathrm{D}_x\xi^t)\psi_{,t} = \frac{1}{c^2}\psi_{,t}\,,$$
$$\eta_{xx}^{(2)} = \mathrm{D}_x\eta_x^{(1)} - (\mathrm{D}_x\xi^t)\psi_{,xt} = \frac{2}{c^2}\psi_{,xt}\,,$$
$$\eta_t^{(1)} = -(\mathrm{D}_t\xi^x)\psi_{,x} = \psi_{,x}\,,$$
$$\eta_{tt}^{(2)} = \mathrm{D}_t\eta_t^{(1)} - (\mathrm{D}_t\xi^x)\psi_{,tx} = 2\psi_{,xt}\,,$$

Dosazením za $\eta_{xx}^{(2)}$ a $\eta_{tt}^{(2)}$ do podmínky (27) nakonec obdržíme

$$X^{(2)}(\psi_{,xx} - \frac{1}{c^2}\psi_{,tt}) = \frac{2}{c^2}\psi_{,xt} - \frac{2}{c^2}\psi_{,xt} = 0$$

a tedy vlnová rovnice (16) je invariantní vůči Lorentzově transformaci.

K tomu, abychom určili některé další bodové symetrie vlnové rovnice (16), není zapotřebí použít podmínku invariance (27) s obecnými předpisy pro ξ^x, ξ^t a η a řešit systém parciálních diferenciálních rovnic (i když v tomto případě je to také možné). Stačí si uvědomit, že vlnová rovnice (16) nezávisí explicitně jak na proměnných x, t, tak na závislé proměnné ψ, a je tedy invariantní vůči translaci v těchto proměnných. Navíc z toho, že je to lineární homogenní rovnice, která závisí pouze na druhých derivacích, plyne invariance vůči škálování závislé proměnné $\tilde{\psi} = \alpha\psi$ a dále vůči současnému škálování nezávislých proměnných $\tilde{x} = \beta x, \tilde{t} = \beta t$. Infinitezimální generátory odpovídající těmto bodovým transformacím jsou

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x}\,, \tag{28}$$

$$X_2 = \frac{\partial}{\partial t}\,, \tag{29}$$

$$X_3 = \frac{\partial}{\partial \psi}\,, \tag{30}$$

$$X_4 = \psi\frac{\partial}{\partial \psi}\,, \tag{31}$$

$$X_5 = x\frac{\partial}{\partial x} + t\frac{\partial}{\partial t}\,. \tag{32}$$

4. Aby bodová symetrie vlnové rovnice (16) byla též variační symetrií, musí být vůči ní invariantní odpovídající variační funkcionál. Infinitezimální podmínkou invariance variačního funkcionálu vůči transformaci generované infinitezimálním generátorem

$$X = \xi^x(x,t,\psi)\frac{\partial}{\partial x} + \xi^t(x,t,\psi)\frac{\partial}{\partial t} + \eta(x,t,\psi)\frac{\partial}{\partial \psi} \tag{33}$$

je rovnice

$$X^{(1)}L + L(\mathrm{D}_x\xi^x + \mathrm{D}_t\xi^t) = 0\,, \tag{34}$$

kde L je příslušný lagrangián, v našem případě

$$L[\psi] = \frac{1}{2}\left(\psi_{,x}^2 - \frac{1}{c^2}\psi_{,t}^2\right), \tag{35}$$

a $X^{(1)}$ je první rozšíření generátoru (33). Aniž bychom zacházeli do podrobností (postup výpočtu $X^{(1)}$ je zcela obdobný postupu uvedeném v bodě 4c), uvedeme, že podmínka (34) je splněna pro generátory (8), (28), (29), (30) a (32). Bodová symetrie generovaná operátorem (31) není variační symetrií, neboť

$$X_4^{(1)} = \psi\frac{\partial}{\partial \psi} + \psi_{,x}\frac{\partial}{\partial \psi_{,x}} + \psi_{,t}\frac{\partial}{\partial \psi_{,t}}$$

a tedy

$$X_4^{(1)}L + L(\mathrm{D}_x\xi^x + \mathrm{D}_t\xi^t) = 2L \neq 0\,.$$

Určíme nyní zákony zachování odpovídající translacím v nezávislých proměnných. Obecný tvar zákona zachování pro vlnovou rovnici (16) je dán vztahem

$$\mathrm{Div}P = \mathrm{D}_x P^x + \mathrm{D}_t P^t = 0\,, \tag{36}$$

kde veličiny P^x a P^t jsou nějaké funkce proměnných x, t, ψ a derivací ψ vzhledem k x a t. Z teorému E. Noetherové plyne, že pokud je infinitezimální operátor (33) generátorem variační symetrie lagrangiánu (35), pak veličiny

$$P^x = (\xi^x\psi_{,x} + \xi^t\psi_{,t} - \eta)\frac{\partial L}{\partial \psi_{,x}} - L\xi^x\,, \tag{37}$$

$$P^t = (\xi^x\psi_{,x} + \xi^t\psi_{,t} - \eta)\frac{\partial L}{\partial \psi_{,t}} - L\xi^t\,, \tag{38}$$

splňují zákon zachování (36). Pro generátory (28), resp. (29), pro které $\xi^x = 1, \xi^t = 0, \eta = 0$, resp. $\xi^x = 0, \xi^t = 1, \eta = 0$, dostaneme

$$P_1^x = \psi_{,x}\frac{\partial L}{\partial \psi_{,x}} - L\xi^x = \frac{1}{2}\left(\psi_{,x}^2 + \frac{1}{c^2}\psi_{,t}^2\right)\,, \tag{39}$$

$$P_1^t = \psi_{,x}\frac{\partial L}{\partial \psi_{,t}} = -\frac{1}{c^2}\psi_{,x}\psi_{,t}\,, \tag{40}$$

resp.

$$P_2^x = \psi_{,t}\frac{\partial L}{\partial \psi_{,x}} = \psi_{,x}\psi_{,t}\,, \tag{41}$$

$$P_2^t = \psi_{,t}\frac{\partial L}{\partial \psi_{,t}} - L\xi^t = -\frac{1}{2}\left(\psi_{,x}^2 + \frac{1}{c^2}\psi_{,t}^2\right)\,. \tag{42}$$

Přímým výpočtem se můžeme snadno přesvědčit, že tyto veličiny vskutku splňují zákon zachování (36). Poznamenejme ještě, že uspořádáním těchto veličin do matice

$$T_\mu^\nu = \begin{pmatrix} P_1^x & P_1^t \\ P_2^x & P_2^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\left(\psi_{,x}^2 + \frac{1}{c^2}\psi_{,t}^2\right) & -\frac{1}{c^2}\psi_{,x}\psi_{,t} \\ \psi_{,x}\psi_{,t} & -\frac{1}{2}\left(\psi_{,x}^2 + \frac{1}{c^2}\psi_{,t}^2\right) \end{pmatrix}$$

obdržíme relativistický „tenzor energie a hybnosti“ pro skalární pole $\psi(x,t)$, pomocí něhož lze psát zákony zachování jako

$$T_{\mu\,,\nu}^\nu = 0\,.$$

Obdobným způsobem bychom mohli najít další zákony zachování pro jiné variační symetrie.

5. K tomu, abychom nalezli partikulární řešení $\psi = f(x,t)$ vlnové rovnice

$$\psi_{,xx} - \frac{1}{c^2}\psi_{,tt} = 0 \tag{43}$$

invariantní při Lorentzově transformaci ($\xi^x = -t, \xi^t = -x/c^2, \eta = 0$), tj. splňující dodatečnou podmínku

$$X(\psi - f(x,t))|_{\psi=f(x,t)} = \eta - \xi^x\frac{\partial f}{\partial x} - \xi^t\frac{\partial f}{\partial t}\bigg|_{\psi=f(x,t)} = t\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{x}{c^2}\frac{\partial f}{\partial t} = 0\,, \tag{44}$$

můžeme použít dva postupy.

(a) *Metoda invariantního tvaru:* nejprve nalezneme obecné řešení podmínky (44) a poté určíme, kdy splňuje též vlnovou rovnici (43).

(b) *Metoda přímé substituce:* nejprve snížíme počet nezávislých proměnných ve vlnové rovnici (43) s využitím podmínky (44), čímž získáme obyčejnou diferenciální rovnici, jejíž obecné řešení bude záviset na libovolných funkcích vyloučené proměnné, jejichž tvar určíme dosazením (43) nebo (44).

Z pedagogických důvodů předvedeme podrobně oba postupy, které by měly vést ke stejnému výsledku.

(a) **Metoda invariantního tvaru**

Podmínka (44) je lineární parciální diferenciální rovnice a její obecné řešení můžeme určit např. pomocí metody charakteristik. Rovnice charakteristik

$$\frac{\mathrm{d}x}{t} = c^2\frac{\mathrm{d}t}{x}\,,$$

která je obyčejnou diferenciální rovnicí, má řešení

$$x^2 - c^2t^2 = \text{konst} = z\,,$$

a tedy obecné řešení rovnice (44) má tvar

$$f(x,t) = F(z) = F(x^2 - c^2t^2)\,,$$

kde F je libovolná funkce. Dosazením do vlnové rovnice (43) dostaneme obyčejnou diferenciální rovnici pro $F(z)$

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}z} + z\frac{\mathrm{d}^2F}{\mathrm{d}z^2} = 0\,,$$

jejíž obecné řešení, které určíme např. tak, že položíme $F'(z) = G(z)$ a vyřešíme nejprve rovnici prvního řádu pro $G(z)$, má tvar

$$F(z) = A\ln z + B\,,$$

kde A a B jsou libovolné konstanty. Invariantní řešení vlnové rovnice (43) je tedy dáno výrazem

$$\psi(x,t) = A\ln(x^2 - c^2t^2) + B\,. \tag{45}$$

(b) **Metoda přímé substituce**

Přepišme podmínku (44) do tvaru

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{x}{tc^2}\frac{\partial f}{\partial t} \tag{46}$$

a derivujme ještě jednou podle x

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -\frac{1}{tc^2}\frac{\partial f}{\partial t} - \frac{x}{tc^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t \partial x} = -\left(\frac{1}{tc^2} + \frac{x^2}{t^3c^4}\right)\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{x^2}{t^2c^4}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}. \tag{47}$$

Poslední rovnost plyne z opětovného dosazení za $\partial f/\partial x$ z rovnice (46). Dosadíme-li nyní do vlnové rovnice (43) z rovnice (47), dostaneme

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = \left(\frac{x^2}{t^2c^4} - \frac{1}{c^2}\right)\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} - \left(\frac{1}{tc^2} - \frac{x^2}{t^3c^4}\right)\frac{\partial f}{\partial t} = 0\,.$$

V této rovnici hraje x roli parametru a můžeme ji tedy řešit jako obyčejnou diferenciální rovnici pro funkci $f(t;x)$, kde středník vyjadřuje parametrickou závislost na x. Její řešení nalezneme opět tak, že nejprve položíme $\partial f(t;x)/\partial t = g(t;x)$. Rovnici pro $g(t;x)$ lze přímo integrovat a dostaneme

$$\ln g(t;x) = \int \frac{x^2 + t^2c^2}{x^2 - t^2c^2}\frac{\mathrm{d}t}{t} = \ln\frac{t}{x^2 - t^2c^2} + c(x)\,,$$

kde integrační konstanta je libovolnou funkcí x a položíme ji rovnu $c(x) = \ln C(x)$. Pro funkci $g(t;x)$ pak máme obecný předpis

$$g(t;x) = \frac{C(x)t}{x^2 - t^2c^2}\,.$$

Funkci $f(t;x)$ určíme další integrací podle t

$$f(t;x) = \int g(t;x)\mathrm{d}t = -\frac{C(x)}{2c^2}\ln(x^2 - t^2c^2) + B(x) = A(x)\ln(x^2 - t^2c^2) + B(x)\,,$$

přičemž jsme v poslední úpravě zahrnuli konstantní faktor $-1/2c^2$ to nové neznámé funkce A(x). Aby hledaná funkce $f(x,t)$ byla invariantním řešením vlnové rovnice (43) musíme ještě určit funkce $A(x)$ a $B(x)$ tak, aby byla splněna podmínka (44). Dosazením obdržíme

$$t\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{x}{c^2}\frac{\partial f}{\partial t} = t\frac{\mathrm{d}A(x)}{\mathrm{d}x}\ln(x^2 - t^2c^2) + t\frac{\mathrm{d}B(x)}{\mathrm{d}x} = 0\,.$$

Tato rovnice musí být splněna pro libovolné t, z čehož dostáváme podmínky

$$\frac{\mathrm{d}A(x)}{\mathrm{d}x} = 0\,, \qquad \frac{\mathrm{d}B(x)}{\mathrm{d}x} = 0\,,$$

a tedy $A(x)$ a $B(x)$ musí být konstanty. Opět jsme dospěli k invariantnímu řešení danému rovnicí (45).