

# Jednparametrické podgrupy Lieovy grupy $SL(2, R)$ a její „nepokrytí“ exponenciálním zobrazením

Grupa  $SL(2, R)$  je grupa všech reálných matic  $A_{2 \times 2}$ , pro které  $\det A = 1$ , neboli

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad ad - bc = 1. \quad (1)$$

1. Určete maticově jednparametrické podgrupy této grupy a stopy matic těchto podgrup. (Za 9 bodů)

*Nápověda:* Napište si obecný tvar matice  $C \in sl(2, R)$  a spočtěte přímo  $\exp tC$  v závislosti na znaménku  $\det C$ .

2. Na základě výsledku předchozí úlohy ukažte, že exponenciální zobrazení nepokrývá celou grupu  $SL(2, R)$ , ač je tato grupa souvislá. (Za 3 body)

*Poznámka:* Lze obecně ukázat, že pokud je Lieova grupa souvislá a *kompaktní* (volně řečeno Lieova grupa je kompaktní, pokud její parametry nabývají konečných hodnot, např. grupa  $SO(n)$ ), pak je tato grupa celá pokryta exponenciálním zobrazením z její Lieovy algebry. Grupa  $SL(2, R)$  je sice souvislá, avšak není kompaktní, neboť např. prvek  $a$  v matici (1) může nabývat libovolně velkých hodnot a determinant může být stále roven jedné.