Základní pojmy teorie grup a teorie reprezentací

- motivace – říkáme, že systém (těleso, rovnice apod.) je symetrický, pokud se nemění při určité jeho transformaci (rotaci, posunutí apod.)
  - protože složením dvou transf. dostáváme opět transformaci a ke každé transformaci existuje inverzní transformace, tvoří všechny transformace, při kterých se systém nemění, grupu, tzv. grupu symetrie systému

Pozn. transformace přiřazuje každému prvku (bodu) množiny (tělesa, prostoru) právě jeden prvek (bod) a navíc každému prvku (bodu) různý prvek (bod) $\Rightarrow$ $\exists$ inverzní transformace

Grupy

Def: Grupou nazýváme množinu G s binární operací $(G, \cdot)$, pro kterou platí, že 1) G je uzavřená vůči $\cdot$, tj. $ab \in G$ pro $\forall a,b \in G$

2) bin. op. je asociativní, tj. $\forall a,b,c \in G$ platí $(ab)c = a(bc)$

3) existuje jednotkový (neutrální) prvek e : $ea = ae = a$ pro $\forall a \in G$ (též se nazývá identita)

4) pro $\forall a \in G$ existuje inverzní prvek a^{-1} : $a^{-1}a = aa^{-1} = e$

Def: Grupa je konečná, má-li konečný počet prvků, který se nazývá řád grupy (značí se např. $\#G$, či $|G|$). Jinak jde o nekonečnou grupu, která může být diskrétní (krystalografické grupy), spojitá (Lieovy grupy), nebo po částech spojitá (Lorentzova grupa, $O(3)$, též někdy zařazeny mezi Lieovy grupy, někdy nazývané smíšené grupy)

- mluvíme o abstraktní grupě (čistě matematický objekt – množina s blíže nespecifikovanou bin. operací) a jejích různých realizacích, proto je třeba rozlišit, kdy jde o dvě různé grupy, nebo jen o dvě různé realizace téže abstraktní grupy. K tomu slouží důležitý pojem

Def: Izomorfismus dvou grup je vzájemně jednoznačné zobrazení φ z G_1 do G_2, které zachovává grupovou operaci, tj. pokud $\varphi: a_1 \mapsto a_2$, $\varphi: b_1 \mapsto b_2$ pak $\varphi: a_1 b_1 \mapsto a_2 b_2$

(značíme $G_1 \sim G_2$) neboli $\varphi(a_1) = a_2$, $\varphi(b_1) = b_2 \Rightarrow \varphi(a_1 b_1) = a_2 b_2$

Př. Nejjednodušší (kromě triviální) konečnou grupou je dvouprvková grupa $\{e,a\}$, pro kterou platí $a^2=e$, zapsáno pomocí multiplikativní tabulky

e	a
a	e

Má mnoho realizací: 1) $(\{1,-1\}, '\cdot') = G$

2) $(\{0,1\}, + \bmod 2) = Z_2$

3) bodové grupy C_s (m) – rovina zrcadlení
$S_2 = C_i$ ($\bar{1}$) – inverze
C_2 (2) – rotace o 180°

4) S_2 – grupa permutací dvouprvkové množiny $= \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ + skládání permutací

5) $\left(\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}, \text{násobení matic} \right) = M$
(transf. matice pro C_2 v rovině (x,y))

atd.

Jde samozřejmě o izomorfní grupy, tj.

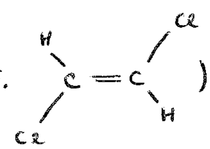
$G \sim Z_2 \sim C_s \sim C_i \sim C_2 \sim S_2 \sim M$

Def. Grupa je komutativní (abelovská, Abelova), pokud pro $\forall a,b \in G$ platí $ab=ba$.

Př. • všechny cyklické grupy typu $a^n = e$, kde $n = \#G$ jsou abelovské

• nejjednodušší neabelovská grupa je 6-prvková grupa

nebot 4-prvkové jsou C_4 (4) – cyklická

a D_2 (222) $\sim$ C_{2v} (2mm) $\sim$ C_{2h} (2/m)
(rotace o 180°) (H_2O) (C_2, i, σ_h – např. )

s multiplikativními tabulkami

$C_4 \sim$

e	a	b	c
a	b	c	e
b	c	e	a
c	e	a	b

a

e	a	b	c
a	e	c	b
b	c	e	a
c	b	a	e

a 3 a 5-prvkové grupy jsou pouze izomorfní cyklickým

neabelovská 6-prvková grupa je např. grupa symetrie NH_3

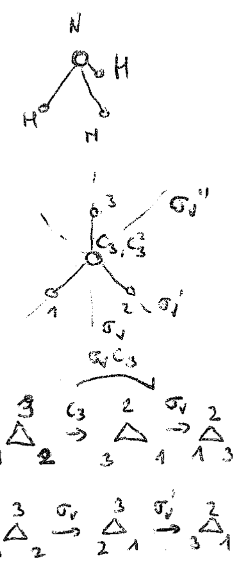
$S_3 \sim C_{3v} =$

permutace 3-prvkové množiny (3 vodíky)

E	C_3	C_3^2	σ_v	σ_v'	σ_v''
C_3	C_3^2	E	σ_v'	σ_v''	σ_v
C_3^2	E	C_3	σ_v''	σ_v	σ_v'
σ_v	σ_v''	σ_v'	E	C_3^2	C_3
σ_v'	σ_v	σ_v''	C_3	E	C_3^2
σ_v''	σ_v'	σ_v	C_3^2	C_3	E

$\sim$

e	a	b	c	d	f
a	e	d	f	b	c
b	f	e	d	c	a
c	d	f	e	a	b
d	c	a	b	f	e
f	b	c	a	e	d



druhá 6-prvková je cyklická

• grupa rotací kolem osy z – SO(2) – abelovská

• grupa všech rotací R^3 = SO(3) – neabelovská

Pozn. (matematické): 1) e a a^{-1} jsou jednoznačné

[e: nechť e_1 a e_2 jsou jednotkové prvky, pak $e_1 e_2 = e_1$ a zároveň $e_1 e_2 = e_2 \Rightarrow e_1 = e_2$

a^{-1}: nechť b_1 a b_2 jsou inverzní k a, pak $b_1 a = e = b_2 a$ a vynásobení a^{-1} zprava máme $b_1 = b_2$]

2) Nechť $a, b \in G$, potom v G existuje právě jeden prvek x : $ax = b$

a právě jeden prvek y : $ya = b$

$\Rightarrow$ V každém řádku a sloupci multiplikativní tabulky je každý prvek grupy právě jednou, navíc $x = a^{-1}b$

[Nechť x_1 a x_2 splňují $ax_1 = b = ax_2 \Rightarrow x_1 = x_2$ vynásobení a^{-1} zleva

obdobně pro y]

3) $(a^{-1})^{-1} = a$ a $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$, neboť $ab(ab)^{-1} = abb^{-1}a^{-1} = e$

4) V def. grupy lze zmírnit axiomy jen např. na levé násobení.

Pozn. (fyzikální): 1) grupa symetrie systému často závisí na použité teorii či modelu

(př. ~~atom~~ vodíku - nerelativistická vs. relat. QM)

$\downarrow$

dynamické symetrie

2) Jak určit grupu symetrie fyz. systému?

- záleží na modelu a oboru
- např. existuje Lieova teorie symetrií dif. rovnic, kde jsou techniky, jak najít grupu symetrie
  - geometrický vhled - pro atomy, molekuly, krystaly
    - opět jsou postupy, jak přidělit grupu symetrie dané molekule či krystalu
- obecné postupy nejsou

3) matematici provedli úplnou klasifikaci konečných grup, ale to fyzikům moc užitečné není, pro aplikace je spíše důležité vědět něco o konkrétní grupě, znát např. tabulky charakterů ireduc. reprezentací

Pozn. (historická): první grupy v matematice se objevily jako grupy transformací konečných množin a vzápětí i pro spojité

začátek 19. století - Lagrange, Galois studovali algebraické rovnice

- množinou byla množina kořenů polynomu

$\rightarrow$ grupa permutací

1854 Cayley - zavedl pojem grupa

70.-80. léta 19. st. - Lie - spojité transf. difer. rovnic $\rightarrow$ Lieovy grupy a algebry

1872 - Klein (Lie) - Erlangen (město) Program - souvislost geometrií a grup symetrie

• z Pozn. (mat) 2) plyne tzv. Rearrangement Theorem (věta o přeuspořádání)

vynásobíme-li všechny prvky grupy jistým prvkem grupy dostaneme opět všechny prvky grupy, ale obecně v jiném pořadí.

→ používá se v mnoha důkazech teorie reprezentací

Podgrupy

Def: Podgrupa je množina prvků grupy, která je sama o sobě grupou.

Př. 1) C_{3v} má podgrupy $\{E, C_3, C_3^2\} \sim C_3$ - generovaná C_3 (či C_3^2)

$\{E, \sigma_v\} \sim \{E, \sigma_v'\} \sim \{E, \sigma_v''\} \sim C_s$ - generovány σ_v

2) $SO(2) \subset SO(3)$

• pro každý prvek konečné grupy existuje n takové, že $g^n = e$, a nazývá se řád prvku

[Násobíme-li g samo sebou, musíme pro konečnou grupu nutně dostat pro jisté $p > q$ totéž, tj. $g^p = g^q$. Položíme-li $n = p - q$, vidíme, že $g^p = g^{n+q} = g^n g^q = g^n g^p \Rightarrow g^n = e$]

• množina $\{e, g, \dots g^{n-1}\}$ tvoří podgrupu G generovanou prvkem g = cyklická grupa

• obecně dostaneme podgrupu generovanou z více prvků $g_1, \dots g_m \in G$ jako množinu všech součinů $g_i^a g_j^b g_k^c \cdots$, kde a, b, c jsou přir. čísla

Věta: Neprázdná podmnožina $H \subset G$ je podgrupou G, právě když $gh^{-1} \in H$ pro $\forall g, h \in H$.

[Dk: $\Rightarrow$ zřejmé ($h^{-1} \in H \Rightarrow gh^{-1} \in H$)

$\Leftarrow$ splňuje H axiomy grupy? 1) pokud $g \in H$, pak $gg^{-1} \in H \Rightarrow e \in H$

2) položme $g = e \in H$, pak $eh^{-1} \in H \Rightarrow h^{-1} \in H$, když $h \in H$

3) víme $h^{-1} \in H \Rightarrow g(h^{-1})^{-1} \in H \Rightarrow gh \in H$ pro $\forall g, h \in H$]

Věta: Průnik dvou podgrup grupy G je opět podgrupou grupy G

[plyne z předchozí věty, neboť jsou-li H_1 a H_2 podgrupy, $e \in H_1 \cap H_2$, tj. průnik je neprázdný a pokud g a $h \in H_1 \cap H_2$, pak $gh^{-1} \in H_1 \cap H_2$]

Def: Je-li H podgrupa grupy G, pak množinu $gH = \{gh, h \in H\}$, resp. Hg nazveme levou, resp. pravou třídou příslušnou k podgrupě H (angl. left, right cosets) (někdy levá a pravá rozkladová třída)

• nejde o podgrupy, pouze pro $g \in H$, kdy $gH = Hg = H$

Věta: Dvě levé, resp. pravé třídy příslušné k $H \subset G$ obsahují buď stejné prvky a nebo neobsahují žádný společný prvek.

[Dk: stačí ukázat, že pokud $g_1 H$ a $g_2 H$ mají jeden společný prvek, pak $g_1 H = g_2 H$
Nechť $g_1 h_k = g_2 h_l \Rightarrow g_2^{-1} g_1 = h_l h_k^{-1} \in H \Rightarrow g_2^{-1} g_1 H = H$, přičemž každý prvek H je v $g_2^{-1} g_1 H$ právě jednou $\Rightarrow g_2 g_2^{-1} g_1 H = g_2 H$ a zároveň $= g_1 H \Rightarrow \# g_1 H = \# g_2 H$]

Př. C_{3v}: levou třídou k $\{E, C_3, C_3^2\}$ je např. $\{\sigma_v, \sigma_v C_3, \sigma_v C_3^2\} = \{\sigma_v, \sigma_v'', \sigma_v'\}$

~~tc~~ pravou třídou k $\{E, \sigma_v\}$ je $\{C_3, \sigma_v''\}$ či $\{C_3^2, \sigma_v'\}$

- vidíme, že součin $\#H$ a počtu tříd je roven $\#G$, platí i obecně

Věta (Lagrangeova): Řád grupy (konečné) je dělitelný počtem prvků lib. podgrupy.

Neboli je-li H podgrupou G a $\{g_1H, g_2H, \dots g_sH\}$ jsou všechny levé různé třídy příslušné k H, pak $\#H \cdot s = \#G$.

[Dk: zřejmý z předchozí věty a z toho, že $\#g_iH = \#g_jH$ pro $\forall i,j$ díky větě o přeuspořádání]

- 's' se nazývá index podgrupy H v G

Sdružené prvky a jejich třídy

Def: Prvek $g_1 \in G$ je sdružený s prvkem $g_2 \in G$, značíme $g_1 \sim g_2$, pokud $\exists\, h \in G$ takový, že $h\, g_1 h^{-1} = g_2$.

- jde o relaci ekvivalence → rozklad na třídy sdružených prvků (třídy ekvivalence)
- důležitý pojem pro repr. konečných grup → ukážeme, že # tříd sdruž. prvků = # tzv. ired. reprezentací

Př. C_{3v}: $\{E\}$ - jednotkový prvek je vždy samostatnou třídou

$\{C_3, C_3^2\}$ - rotace tvoří třídu - souvisí s geometrickou interpretací (rotaci C_3 lze převést na $C_3^{-1} = C_3^2$ pomocí zrcadlení σ_v které je prvkem grupy - platí i obecněji)

$\{\sigma_v, \sigma_v', \sigma_v''\}$ - opět zrcadlení lze převádět mezi sebou pomocí rotace C_3 či C_3^2

- lze ukázat, že počet prvků třídy dělí $\#G$

Normální podgrupa

Def: Podgrupa $H \subset G$ je normální, pokud pro $\forall g \in G$ platí $g H g^{-1} \subset H$.

- platí tedy i $H \subset g^{-1} H g \Rightarrow H = g H g^{-1} \Rightarrow gH = Hg$ pro $\forall g \in G$, tj. pro normální podgrupu jsou levé a pravé třídy stejné, a též naopak
- označme $G/H = \{gH : g \in G\}$ levý (i pravý) rozklad na množině G modulo H a definujme násobení vztahem: $A, B \in G/H$, $AB = \{ab : a \in A, b \in B\}$

Def: Množina G/H s operací násobení tříd je groupou zvanou faktorová grupa či faktorgrupa.

[Proč to funguje? násobení lze psát jako $(gH)(hH) = (gh)H$ neboť $Hh = hH$ a $HH = H$
jednotkový prvek je $eH = H$, inverzní k gH je $g^{-1}H$]

Homomorfismus a izomorfismus (grup, vekt. prostorů, Lieových algeber ...)

- mezi mnohými, i různě „velkými" grupami existují jisté korespondence a často mají podobnou strukturu → proto se zavádí pojem homomorfismu, jehož speciálním případem je izomorfismus

Def: Homomorfismus z grupy G do grupy H je zobrazení $\varphi: G \to H$, pro které platí $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$ pro $\forall a, b \in G$.

tj. zobrazení φ „zachovává" (přenáší) grupovou operaci

Pokud je homomorfismus bijektivní, jde o izomorfismus.

Pokud je homomorfismus injektivní (prosté zobrazení), jde o monomorfismus

surjektivní (na), jde o epimorfismus.

Je-li $H = G$, pak se homomorfismus nazývá endomorfismus

a izomorfismus se nazývá automorfismus.

(vnitřní automorf., je-li typu $\phi_a(g) = aga^{-1}$ pro $\forall a, g \in G$, jinak vnější automorfismus)

- zcela obdobné je to i pro jiné algebraické struktury, se kterými se setkáme (vektorový prostor, Lieovu algebru), vždy se přenáší struktura pomocí φ, např. pro vekt. prostory platí $\varphi(\alpha\vec{v} + \beta\vec{w}) = \alpha\varphi(\vec{v}) + \beta\varphi(\vec{w})$

a pro Lieovy algebry $\varphi([\vec{v}, \vec{w}]) = [\varphi(\vec{v}), \varphi(\vec{w})]$

Def: Nechť $\varphi: G \to H$ je homomorfismus. Pak $\mathrm{Ker}\,\varphi = \{g \in G : \varphi(g) = e_H\}$ nazýváme jádrem homomorfismu a $\mathrm{Im}\,\varphi = \{h \in H : h = \varphi(g)$ pro nějaké $g \in G\}$

Věta: $\mathrm{Ker}\,\varphi$ je normální podgrupa grupy G a $\mathrm{Im}\,\varphi$ je podgrupa grupy H

[Dk. 1) Nechť $g \in \mathrm{Ker}\,\varphi$ a $a \in G$, pak $\varphi(aga^{-1}) = \varphi(a)\varphi(g)\varphi(a^{-1}) = \varphi(a)\, e_H\, \varphi(a^{-1}) = e_H$

tj. $aga^{-1} \in \mathrm{Ker}\,\varphi$ pro lib. $a \in G$

2) $e_H \in \mathrm{Im}\,\varphi$, neboť $\varphi(e) = e_H$ $(\varphi(a\cancel{e}) = \varphi(a)\varphi(e) = \varphi(a) \Rightarrow \varphi(e) = e_H)$

pokud $\varphi(a) \in \mathrm{Im}\,\varphi$, pak $[\varphi(a)]^{-1} \in \mathrm{Im}\,\varphi$, neboť $\varphi(e) = \varphi(aa^{-1}) = \varphi(a)\varphi(a^{-1}) = e_H$ a tedy $\varphi(a^{-1}) = [\varphi(a)]^{-1} \in \mathrm{Im}\,\varphi$

zbytek zřejmý z definice]

Def: Nechť H je normální podgrupa grupy G, potom $\pi: G \to G/H$, $\pi: g \mapsto gH$ pro $\forall g \in G$ je zobrazení nazývané přirozená projekce grupy G na faktor grupu G/H.

- π je epimorfismus a $\mathrm{Ker}\,\pi = H$

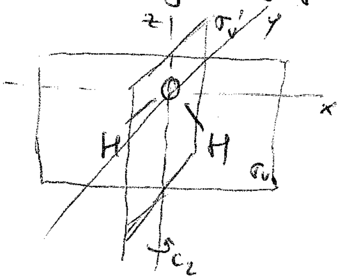
[Dk: 1) pro $\forall g, h \in G$: $\pi(gh) = ghH = (gH)(hH) = \pi(g)\pi(h)$ jde tedy o homomorfismus

že je surjektivní je zřejmé

2) chci ukázat, že pokud $\pi(h) = eH = H$ ~~pak~~ $h \in H$. Sporem, pokud $h \notin H$, pak $\pi(h)$ nutně $\neq H$ spor.]

Př. (homomorfismus)

Uvažujme grupu symetrie molekuly H_2O - značíse $C_{2v} = \{E, C_2, \sigma_v, \sigma_v'\}$



E	C_2	σ_v	σ_v'
C_2	E	σ_v'	σ_v
σ_v	σ_v'	E	C_2
σ_v'	σ_v	C_2	E

φ: Matice $D(g)$ 3x3 odpovídající transformacím $\mathbb{R}^3$

tj. $D(g)\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}$

$$D(E)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},\ D(C_2)=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix},\ D(\sigma_v)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix},\ D(\sigma_v')=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

tvoří grupu s bin. op. maticové násobení, která je izomorfní s C_{2v} (jde o tzv. věrnou matic. repr.) a která je zároveň podgrupou $O(3)$, tj. jde též o homomorfismus (přesněji monomorfismus) z C_{2v} do $O(3)$.

φ_x: Můžeme ale uvažovat zvlášť transformace x, y, a z

Např. pro x máme $D(g)x = x'$

$D(E)=1$, $D(C_2)=-1$, $D(\sigma_v)=1$, $D(\sigma_v')=-1$

zde jde o homomorfismus (přesněji epimorfismus, ne však o izomorfismus) z C_{2v} na $G = (\{1,-1\},\cdot) =$ „$O(1)$"

(jde o 1-rozměrnou repr. grupy C_{2v})

φ_y: Podobně pro y jde o homomorfismus z C_{2v} na „$O(1)$", i když jiný.

φ_z: Pro z jde o homomorfismus z C_{2v} na $G=(\{1\},\cdot)$, jde o tzv. triviální repr.

Jádra těchto homomorfismů jsou

$\mathrm{Ker}\,\varphi = E$, $\mathrm{Ker}\,\varphi_x = \{E, \sigma_v\}$, $\mathrm{Ker}\,\varphi_y = \{E, \sigma_v'\}$, $\mathrm{Ker}\,\varphi_z = C_{2v}$

Def. Nechť G je grupa a V n-rozměrný vektorový prostor nad tělesem F. Označme $\mathrm{Aut}(V) = \{\varphi : \varphi \text{ je automorfismus } V\}$ grupu všech automorfismů V. Potom každý homomorfismus $\Gamma: G \to \mathrm{Aut}(V)$ se nazývá reprezentace grupy G na vekt. prostoru V a dimenze V se nazývá též dimenzí reprezentace Γ.

Máme-li bázi $\{\vec{v}_1, \dots \vec{v}_n\}$ v prostoru V, je každý automorfismus dán jistou regulární maticí D a tedy každému prvku $g \in G$ přiřadíme matici $D(g) \in GL(n,F)$ z grupy regulárních matic $n \times n$. Hovoříme pak o maticové reprezentaci D grupy G. Jde o homomorfismus z G do $GL(n,F)$.