~~Základní výsledky teorie konečných grup~~

Působení grupy na množině (prostoru)

- máme-li určitou abstraktní grupu, často je její realizace dána jako transformace určité množiny či prostoru, říkáme, že grupa působí na této množině či prostoru

<u>Def:</u> Nechť G je grupa a M množina. Říkáme, že G působí na M, pokud existuje zobrazení $\varphi: G\times M \to M$ takové, že pro $a\in G$ a $m\in M$ je $\varphi(a,m) = T(a)m \equiv am$, kde $T(a)$ je určitá transformace množiny M odpovídající prvku $a\in G$, přičemž platí

asociativita $\quad a(bm) = (ab)m \quad$ pro $\forall a,b\in G$, $m\in M$

a dále $\quad em = m \quad$ pro $\forall m\in M$ a jednotkový prvek $e\in G$

- jinými slovy jde o homomorfismus z G do grupy všech ~~[illegible]~~ transformací množiny M, tj. není nutno, aby různým prvkům $a,b\in G$ odpovídaly různé transformace

- <u>Alternativní definice reprezentace grupy</u>

  Reprezentace grupy G na prostoru V je lineární působení grupy G na V, přičemž každému $g\in G$ odpovídá jistá lineární transformace $T(g): V\to V$

<u>Def:</u> Orbitou prvku $m\in M$ při působení grupy G nazýváme podmnožinu $G\cdot m \subset M$ složenou z prvků $am\in M$ pro $\forall a\in G$, tj. $G\cdot m = \{am, a\in G\}$

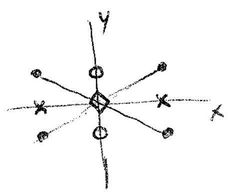
<u>Def:</u> Stabilizátor (též izotropní grupa) G_m příslušný bodu $m\in M$ je množina prvků $a\in G$, pro které $T(a)m = m$.

- G_m je podgrupou G, neboť $a^{-1}\in G_m$, je-li $a\in G$ ~~[illegible]~~, protože

$$m = T(e)m = T(a^{-1})T(a)m = T(a^{-1})m$$

a navíc pokud $T(a)m = m$ a $T(b)m = m$, pak $T(a)T(b)m = T(ab)m = m$

<u>Př.</u> Působení C_{2v} v $\mathbb{R}^3$



tj. obecný bod • má 4-prvkovou orbitu a stabilizátor $\{E\} = G_\bullet$

bod na ose x × má 2-prvkovou orbitu a $G_\times = \{E, \sigma_v\}$

bod na ose y ∘ má 2-prvkovou orbitu a $G_\circ = \{E, \sigma_v'\}$

a počátek ◇ má 1-prvkovou orbitu a $G_\diamond = C_{2v}$

vidíme, že $\#G_m \cdot \#(G\cdot m) = \#G$, což platí obecně pro konečnou grupu

<u>Dk:</u> Nechť $m\in M$ a $G\cdot m$ je jeho orbita. Pokud $n\in G\cdot m$, pak $\exists a\in G: n = am$. Pokud dále $n = bm$, pak $a^{-1}b\in G_m$, tj. pro $\forall n\in G\cdot m$ je přesně $\#G_m$ prvků G, které zobrazí m na n.

Působení grupy G na sobě

- pokud za množinu M vezmeme G, dostáváme působení G na sobě samé, ovšem je několik možností jak G může na sobě působit

1) levé a pravé posunutí

pro $\forall g \in G$ definujeme zobrazení
$$L_g : G \to G \ , \quad h \mapsto L_g h = gh$$
$$R_g : G \to G \ , \quad h \mapsto R_g h = hg$$

jde o bijektivní zobrazení (věta o přeuspořádání)

a navíc jde o tzv. tranzitivní působení G na sobě, neboť G tvoří jedinou orbitu a dále $G_m = \{e\}$ pro lib. $m \in G$

2) G působí na sobě přes sdružení (konjugaci), kdy
$$T(a)\,g = a g a^{-1}$$
, neboť platí
$$T(ab)\,g = (ab)\,g\,(ab)^{-1} = a(bgb^{-1})a^{-1} = T(a)T(b)\,g$$

nyní orbitami jsou třídy sdružených prvků

a stabilizátory jsou podgrupy G složené z prvků $a \in G$, pro které $aga^{-1} = g$

opět platí $\#(G\cdot g)\cdot \#G_g = \#G \implies$ počet prvků třídy odpovídající $g = \#(G\cdot g)$ dělí $\#G$

Přímý součin grup

Def: Nechť G_1 a G_2 jsou lib. grupy a $g_1 \in G_1$ a $g_2 \in G_2$. Množina všech uspořádaných dvojic (g_1, g_2) s násobením $(g_1, g_2)(h_1, h_2) = (g_1 h_1, g_2 h_2)$ tvoří grupu, která se nazývá přímý (direktní) součin grup G_1 a G_2. Značíme $G_1 \otimes G_2$.
(jednotkový prvek (e_1, e_2), inverzní (g_1^{-1}, g_2^{-1}))

- pro konečné grupy: $\#G_1 \otimes G_2 = \#G_1 \cdot \#G_2$
- $\{(g_1, e_2)\}$ tvoří podgrupu $G_1 \otimes G_2$ izomorfní s G_1 a pod. pro G_2,
  a prvky těchto podgrup komutují $(g_1, e_2)(e_1, g_2) = (e_1, g_2)(g_1, e_2) = (g_1, g_2)$
  a mají jediný společný prvek (e_1, e_2) a každý prvek $G_1 \otimes G_2$ lze vyjádřit jako součin dvou prvků z těchto podgrup

Def: Obecněji G je direktním součinem dvou svých podgrup G_1 a G_2, pokud je izomorfní $G_1 \otimes G_2$ zkonstruované výše.

Dostatečnými kritérii pro G, aby byla direktním součinem, jsou, že G má 2 podgrupy, mající e jako jediný společný prvek, prvky G_1 komutují s prvky G_2 a $\forall g \in G$ lze psát jako $g = g_1 g_2$.

Př. $O(3) \sim SO(3) \otimes C_i$
$$C_i = \{E, \text{inverze}\}$$

Polopřímý součin grup

- v případě přímého součinu lze podmínku komutativity g_1 a g_2 nahradit podmínkou, že G_1 a G_2 musí být normální podgrupy

- ponechání pouze G_1 jako normální podgrupa $\rightarrow$ polopřímý součin

<u>Def:</u> G je polopřímým součinem dvou svých podgrup G_1 a G_2, tj. $G = G_1 \circledS G_2$

pokud
a) G_1 je normální podgrupou G
b) G_1 a G_2 mají jediný společný prvek e
c) $\forall g \in G$ lze zapsat $g = g_1 g_2$, kde $g_1 \in G_1$ a $g_2 \in G_2$

- b) implikuje jednoznačnost rozkladu c)

<u>Př.</u> Euklidovská grupa v R^3 = grupa všech lin. transformací $\mathbb{R}^3$

G_1 = podgrupa všech translací, G_2 = podgrupa rotací

nebot' $\{R, \vec{t}\}\{1, \vec{a}\}\{R, \vec{t}\}^{-1} = \{1, R\vec{a}\}$ tj. jde o translaci a G_1 je normální podgrupou

(plyne z $\{R_1, \vec{t}_1\}\{R_2, \vec{t}_2\} = \{R_1 R_2, R_1\vec{t}_2 + \vec{t}_1\}$

a $\{R, \vec{t}\}^{-1} = \{R^{-1}, -R^{-1}\vec{t}\}$, přičemž $\vec{r}\,' = \{R, \vec{t}\}\vec{r} = R\vec{r} + \vec{t}$)

a dále $\{\vec{R}, \vec{t}\} = \{1, \vec{t}\}\{R, \vec{0}\}$ je požadovaným rozkladem.

Př. podobně pro Poincaréovu grupu

- důležité i v pevných látkách – krystalografické grupy