Cvičení: Dvojnásobné pokrytí grupy $SO(3)$ (obecněji L°) grupou $SU(2)$ (grupou $SL(2,\mathbb{C})$)

Úvodní poznámky:

- $SO(3)$ = grupa všech ortogonálních matic 3x3, které splňují

  $A^T A = A A^T = 1$, $\det A = 1$

  ~ grupě všech rotací v $\mathbb{R}^3$ (vlastních), zachovávají vzdálenost

- $SU(2)$ = grupa všech unitárních matic 2x2 splňujících

  $A^+ A = A A^+ = 1$, $\det A = 1$

  ~ lineární transformace komplexní roviny zachovávající vzdálenost bez zrcadlení

(Pozn: obě tyto grupy jsou tříparametrické, obecně

$SO(n)$ je $\frac{n(n-1)}{2}$-param. a $SU(n)$ je (n^2-1)-param.

takže pro větší n už $SO(n)$ není obecně pokryta $SU(n)$!)

- L = grupa všech transformací Λ Minkowského časoprostoru M^4

  s metrikou $\|x\|^2 = x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2$

  pro které platí $\|\Lambda x\|^2 = \|x\|^2$ pro $\forall x \in M^4$

  = Lorentzova grupa

- L° = vlastní Lorentzova grupa = podgrupa L, kde uvažujeme

  pouze Λ splňující $\det \Lambda = 1$ a $\Lambda^0_0 > 0$ (přesněji $\Lambda^0_0 \geq 1$)

  (neboť $\eta^{\mu\nu} = \Lambda^\mu{}_\alpha \Lambda^\nu{}_\beta \eta^{\alpha\beta}$ $\Rightarrow (\Lambda^0_0)^2 = 1 + \sum_i (\Lambda^i_0)^2$ pro $\mu = \nu = 0$)

  tedy jde o vlastní Lorentz. transformace

  převádějící časupodobné 4-vektory opět

  na časupodobné a neuvažujeme inverze a zrcadlení prostoru

- $SL(2,\mathbb{C})$ = grupa všech komplexních matic 2x2 s $\det A = 1$

  ~ lineární transformace 2-rozm. komplexního prostoru

  bez zrcadlení (a podobných transformací)

(Pozn: jak L°, tak $SL(2,\mathbb{C})$ jsou 6-parametrické grupy

- u L° máme 3 rotace a 3 boosty
- u $SL(2,\mathbb{C})$ omezujeme 8-param. obecnou kompl. matici 2x2

  2 podmínkami $\det A = 1$ (reálná a imag. část))

Cíl cvičení: Ukázat přímou konstrukcí, že existuje homomorfismus

$$\phi: SL(2,\mathbb{C}) \overset{na}{\to} L^\circ \ (\text{do } L) \quad \text{resp.} \quad \phi: SU(2) \overset{na}{\to} SO(3) \ (\text{do } O(3))$$

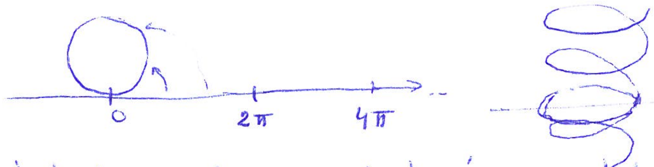
tj. obrazem ϕ jsou celé grupy L°, resp. $SO(3)$

přičemž jádro $\mathrm{Ker}\,\phi = \{1\!\!1, -1\!\!1\}$, tj. jde o tzv. 2-násobné pokrytí.

Pozn. 1) Obecně je-li $\phi: G \overset{na}{\to} G'$ homomorfismus, přičemž $\#\mathrm{Ker}\,\phi = n$, mluvíme o n-násobném (někdy n-listovém) pokrytí grupy G' grupou G.

Pokud jde o Lieovy grupy (budeme brát později), tak pokud je G jednoduše souvislá („uzavřená křivka jde smrsknout do bodu") pak jde o tzv. univerzální pokrývací grupu, přičemž pro danou (souvislou) grupu G' je tato univ. pokrývací grupa G určena jednoznačně až na izomorfismus a navíc Lieovy algebry těchto grup jsou izomorfní

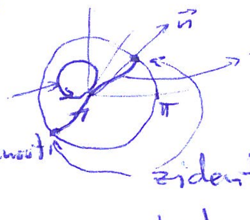
Př. Univ. pokrývací grupa $SO(2)$ je $(\mathbb{R}, +)$



∞-násobné pokrytí

existují i 2,3,4,... -násobné pokrytí $SO(2)$, ale nejsou jednoduše souvislé

Pozn. 2) $SO(3)$ není jednoduše souvislá



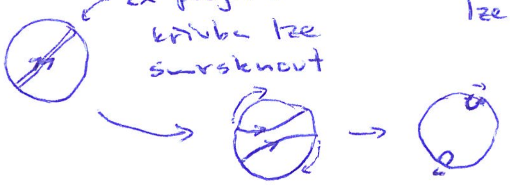
tato křivka lze smrsknout

tato křivka nelze smrsknout

identifikujeme protilehlé body, neboť rotace o π a $-\pi$ je totéž

ovšem

2x projitá křivka lze smrsknout



$SU(2)$ je jednoduše souvislá $\Rightarrow$ půjde o univerzální pokrývací grupu grupy $SO(3)$

neboť A lze psát jako $A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b^* & a^* \end{pmatrix}$, $|a|^2 + |b|^2 = 1$

a pokud param. $a = y_1 - i y_2$, $b = y_3 - i y_4$ $\Rightarrow y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2 = 1$

$\Rightarrow SU(2)$ je 3-rozměrná sféra S^3 ve 4-rozm. prostoru, kde lze každou uzavřenou křivku smrsknout do bodu

Konstrukce homomorfismu $\phi: SL(2,\mathbb{C}) \xrightarrow{na} L^0$

1) Ukážeme, že existuje homomorfismus $\phi: SL(2,\mathbb{C}) \longrightarrow L$

- Každému 4-vektoru $x = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ z M^4 přiřadíme hermitovskou ($X^\dagger = X$)

matici 2×2
$$X = \begin{pmatrix} x_0+x_3 & x_1-ix_2 \\ x_1+ix_2 & x_0-x_3 \end{pmatrix} = x_0 1\!\!1 + \sum_{i=1}^{3} x_i \sigma_i \text{ , kde } \sigma_i \text{ jsou Pauliho matice}$$

Všimněme si, že $\|x\|^2 = x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 = \det X$.

- Podobně jako grupa L působí na prostoru M^4, tak grupa $SL(2,\mathbb{C})$ může působit na prostoru $\mathcal{X}$ všech matic X (hermitovských) pomocí předpisu $\tilde{X} = AXA^\dagger$, kde $X, \tilde{X} \in \mathcal{X}$ a $A \in SL(2,\mathbb{C})$.

Že jde vskutku o působení $SL(2,\mathbb{C})$ na $\mathcal{X}$ ověříme tak, že ukážeme, že $\tilde{X} \in \mathcal{X}$, tj. že platí $\tilde{X}^\dagger = \tilde{X}$ a dále $A(BXB^\dagger)A^\dagger = (AB)X(AB)^\dagger$ (*)

$$\tilde{X}^\dagger = (AXA^\dagger)^\dagger = AX^\dagger A^\dagger = \tilde{X}$$
nebot' $X^\dagger = X$

a $1\!\!1 X 1\!\!1^\dagger = X$

zřejmé díky $(AB)^\dagger = B^\dagger A^\dagger$

- Přes působení $SL(2,\mathbb{C})$ na $\mathcal{X}$ a díky korespondenci $x \in M^4 \leftrightarrow X \in \mathcal{X}$ můžeme definovat působení $SL(2,\mathbb{C})$ na M^4, tj. pro všechna $A \in SL(2,\mathbb{C})$ bude existovat $\phi(A)$ takové, že $\tilde{x} = \phi(A)x$, kde $\tilde{x} \leftrightarrow \tilde{X} = AXA^\dagger$.

Protože $\|\phi(A)x\|^2 = \|\tilde{x}\|^2 = \det\tilde{X} = \det AXA^\dagger = \det X = \|x\|^2$,

jde ve skutečnosti o jistou (zatím obecnou) Lorentzovu transformaci.

$\phi: A \to \phi(A)$ je tedy homomorfismus z $SL(2,\mathbb{C})$ do L, nebot' triviálně $\phi(AB) = \phi(A)\phi(B)$ díky (*)

---

2) Pokud seomezíme na $SU(2) \subset SL(2,\mathbb{C})$, pak $\phi: SU(2) \to O(3)$.

- Pokud $A \in SU(2)$, tj. $AA^\dagger = 1\!\!1$, pak z $A 1\!\!1 A^\dagger = 1\!\!1$ plyne $\phi(A)e_0 = e_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

tj. musí být
$$\phi(A) = \begin{pmatrix} 1 & a_1\, a_2\, a_3 \\ 0 & \\ 0 & R \\ 0 & \end{pmatrix}$$
, ovšem aby $\phi(A)$ byla Lorentzova transformace, musí platit $\|\phi(A)x\|^2 = \|x\|^2$, z čehož (porovnáním koeficientů u x_0x_1, x_0x_2 a x_0x_3) plyne

$a_1 = a_2 = a_3 = 0$. Neboli $\phi(A)$ musí být ortog. transf. na $\mathbb{R}^3$, neboli $\in O(3)$.

3) Ukažme, že matice

$$U_\theta = \begin{pmatrix} e^{-i\theta} & 0 \\ 0 & e^{i\theta} \end{pmatrix}$$ odpovídá rotaci kolem osy x_3 o úhel 2θ

$$V_\alpha = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$ —— " —— osy x_2 o úhel 2α

a $$M_{e^\tau} = \begin{pmatrix} e^{\tau} & 0 \\ 0 & e^{-\tau} \end{pmatrix}$$ odpovídá boostu ve směru x_3 s $v = \tanh 2\tau$ (pro $c=1$)

- Dostaneme

$$U_\theta X U_\theta^\dagger = \begin{pmatrix} x_0 + x_3 & e^{-2i\theta}(x_1 - i x_2) \\ e^{2i\theta}(x_1 + i x_2) & x_0 - x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{x}_0 + \tilde{x}_3 & \tilde{x}_1 - i\tilde{x}_2 \\ \tilde{x}_1 + i\tilde{x}_2 & \tilde{x}_0 - \tilde{x}_3 \end{pmatrix}$$

a tedy
$$\tilde{x}_1 = x_1 \cos 2\theta - x_2 \sin 2\theta$$
$$\tilde{x}_2 = x_1 \sin 2\theta + x_2 \cos 2\theta$$
$\Rightarrow$ rotace kolem x_3 o 2θ

Vidíme, že pokud bereme θ z int. $\langle 0, 2\pi)$, otočíme (x_1, x_2) dvakrát, neboť $U_0 = \mathbb{1}$, $U_\pi = -\mathbb{1}$, ale $\phi(U_0) = \phi(U_\pi) = \mathbb{1}_{4\times 4}$
$\underset{-U_0}{}$

Toto platí obecně, tj. $\phi(A) = \phi(-A)$, neboť $(-A)X(-A)^\dagger = AXA^\dagger$.

- dále

$$V_\alpha X V_\alpha^\dagger = \begin{pmatrix} x_0 + x_3 \cos 2\alpha - x_1 \sin 2\alpha & x_3 \sin 2\alpha + x_1 \cos 2\alpha - i x_2 \\ x_3 \sin 2\alpha + x_1 \cos 2\alpha + i x_2 & x_0 - x_3 \cos 2\alpha + x_1 \sin 2\alpha \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ rotace kolem x_2 o 2α

- a nakonec

$$M_{e^\tau} X M_{e^\tau}^\dagger = \begin{pmatrix} e^{2\tau}(x_0 + x_3) & x_1 - i x_2 \\ x_1 + i x_2 & e^{-2\tau}(x_0 - x_3) \end{pmatrix} \Rightarrow$$
$$\tilde{x}_0 = \tfrac{1}{2}(e^{2\tau} + e^{-2\tau})\, x_0 + \tfrac{1}{2}(e^{2\tau} - e^{-2\tau})\, x_3 = x_0 \cosh 2\tau + x_3 \sinh 2\tau$$
$$\tilde{x}_3 = x_0 \sinh 2\tau + x_3 \cosh 2\tau$$

což je Lorentz. transformace ve směru x_3 s $v = \tanh 2\tau$

---

4) Každá matice $A \in SL(2,\mathbb{C})$ může být spojitě spojena s $\mathbb{1}$, tj. $\exists$ spojitá křivka A_t taková, že $A_0 = \mathbb{1}$, $A_1 = A$, což je pravda též o vlastní Lorentz. grupě L^0, nikoli o L

$\Rightarrow$ ϕ zobrazuje do L^0, a též z $SU(2)$ do $SO(3) \subset L^0$
($O(3)$ není souvislá $\det = \pm 1$)
a není podgrupou L^0

Konstrukce homomorfismu $\phi: SL(2,\mathbb{C}) \overset{na}{\to} L^0$ - pokračování

- Každá matice $A \in SL(2,\mathbb{C})$ může být převedena podobnostní transf. na horní trojúhelník. matici $\begin{pmatrix} \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot \end{pmatrix}$, totiž na Jordanův tvar.

  Pro matici 2x2 s det 1 musí být $A = B \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & \frac{1}{a} \end{pmatrix} B^{-1}$ pro nějakou matici B

- Uvažujme parametrizaci $A(t) = B \begin{pmatrix} a(t) & b(t) \\ 0 & \frac{1}{a(t)} \end{pmatrix} B^{-1}$

  kde pro $t=0$: $A(0) = \mathbb{1} = B \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} B^{-1} \Rightarrow a(0)=1,\ b(0)=0$

  pro $t=1$: $A(1) = A = B \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & \frac{1}{a} \end{pmatrix} B^{-1} \Rightarrow a(1) = a,\ b(1) = b$

  $\Rightarrow$ $a(t)$ a $b(t)$ lze vzít spojité $\Rightarrow$ $A(t)$ lze nalézt spojité

  a tedy lib. $A \in SL(2,\mathbb{C})$ lze spojit s $\mathbb{1}$ $\Rightarrow$ $SL(2,\mathbb{C})$ je souvislá

---

5) Každá vlastní Lorentzova transformace lze složit z boostu ve směru x_3 a rotací kolem osy x_3 a x_2.

   Konkrétně $\Lambda = R_1 \Lambda_0^z R_2$, kde R_1 a R_2 jsou nějaké rotace které lze psát jako $R = \underbrace{R_\phi^z R_\theta^y R_\psi^z}_{\text{Eulerovy úhly}}$

   $\Rightarrow$ Pro každé $\Lambda \in L^0$ existuje $A \in SL(2,\mathbb{C})$ takové, že $\phi(A) = \Lambda$ (viz bod 3)), a tedy jde o zobrazení <u>na</u>.

- Nechť $\Lambda e_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ \vec{x} \end{pmatrix}$. Určitě $\exists$ rotace S převádějící $\vec{x}$ do osy x_3, tj.

  $$S \Lambda e_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ 0 \\ 0 \\ \|\vec{x}\| \end{pmatrix} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} x_0 + \|\vec{x}\| & 0 \\ 0 & x_0 - \|\vec{x}\| \end{pmatrix} = X$$

- Nyní vezmeme $M_r = \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & \frac{1}{r} \end{pmatrix} \in SL(2,\mathbb{C})$ odpovídající Lorentz. transf. ve směru x_3 (viz 3) pro $r = e^t$)

  a položme $r^2 = x_0 - \|\vec{x}\| > 0$, neboť $\|e_0\|^2 = 1 = \|\Lambda e_0\|^2 = x_0^2 - \|\vec{x}\|^2 = (x_0 + \|\vec{x}\|)(x_0 - \|\vec{x}\|)$ a tedy $x_0^2 = 1 + \|\vec{x}\|^2 \geq 1 \Rightarrow x_0 \geq 1$ a $x_0 + \|\vec{x}\| \geq 1$

  dostaneme $M_r X M_r^+ = \begin{pmatrix} x_0^2 - \|\vec{x}\|^2 & 0 \\ 0 & \frac{x_0 - \|\vec{x}\|}{x_0 - \|\vec{x}\|} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

  neboli $\phi(M_r) S \Lambda e_0 = e_0 \Rightarrow \phi(M_r) S \Lambda$ je rotace, řekněme R_2

  $$\Rightarrow \Lambda = \underbrace{S^{-1}}_{R_1} \underbrace{[\phi(M_r)]^{-1}}_{\Lambda_0^z} R_2 = R_1 \Lambda_0^z R_2$$

6) Zbývá ukázat, že $\mathrm{Ker}\,\phi = \{\mathbb{1}, -\mathbb{1}\} \Rightarrow$ 2-násobné pokrytí (viz DÚ)