Reprezentace grup a algeber

- obecně jde o působení jisté matem. struktury na vektorovém prostoru pomocí lineárních operátorů → někdy se upřesňuje, že jde o <u>lineární reprezentace</u>, když je třeba je odlišit od nelineárních působení
- mějme tedy lib. vekt. prostor V (reálný, komplexní atd.), pak
  - End(V) značí množinu všech lineárních operátorů na V (včetně nulového $O: \vec{v} \to \vec{0}$)
  - Aut(V) značí množinu všech lin. op. na V, ke kterým existuje inverzní operátor (tj. jde o lineární transformace na V)
- z End(V) (= endomorfismy na V) lze vytvořit buď
  1) tzv. asociativní algebru (= vekt. prostor s asociativním součinem, přičemž $(f \cdot g)\vec{v} = f(g\vec{v})$)

  nebo

  2) tzv. Lieovu algebru s komutátorem $[f,g]\vec{v} = (f \cdot g - g \cdot f)\vec{v}$ splňujícím axiomy pro Lieovu alg.
- Aut(V) (= automorfismy V) $\sim GL(V)$

  tvoří grupu díky asociativitě a existenci inverzního $f^{-1} \in Aut(V)$ pro $\forall f \in Aut(V)$

⇒ na V lze působit grupami, asoc. a Lieový-mi algebrami a tato působení nazýváme reprezentace

<u>Def</u>: <u>Reprezentace grupy G na V</u> je homomorfismus $\varrho: G \xrightarrow{do} Aut(V)$

tj. pro $\forall g_1, g_2 \in G$ platí $\varrho(g_1 g_2) = \varrho(g_1)\varrho(g_2)$, $\varrho(e) = E$, $\varrho(g^{-1}) = \varrho(g)^{-1}$ (E: identita na V)

<u>Reprezentace Lieovy algebry $\mathcal{L}$ na V</u> je homomorfismus $\phi\ \mathcal{L} \xrightarrow{do} End(V)$

tj. pro $\forall a, b \in \mathcal{L}$ platí $\phi(\alpha a + \beta b) = \alpha\phi(a) + \beta\phi(b)$, $\phi([a,b]) = [\phi(a), \phi(b)]$

(obdobně pro asoc. algebry, kterými se však dále nebudeme zabývat, i když mají velký význam i v matem. teorii reprezentací grup)

<u>Rozměr reprezentace</u> = dimenze vekt. prostoru V

<u>Triviální reprezentace</u> = repr. kdy $\forall g \in G$ přiřadíme identitu na V (též jednotková) nebo kdy $\forall a \in \mathcal{L}$ přiřadíme nulový operátor na V (nulová)

(speciálně každá grupa má jednorozměrnou (dim V = 1) ireducibilní repr. (viz později) tvořenou 1 pro $\forall g \in G$, někdy se jí říká totálně symetrická repr.)

<u>Věrná reprezentace</u>, pokud jde monomorfismus (každému $g \in G$ přiřadíme různý operátor na V)

<u>Značení</u>: dvojice (ϱ, V) jako označení repr. se používá, když je třeba zdůraznit jak zobr. ϱ, tak prostor V. Ve fyzice je často V znám z kontextu, takže se používá Γ pro obecné označení repr. a speciální symboly pro ireducibilní repr. (viz později)

$T(g)$ pro repr. operátory

$D(g)$ pro repr. maticemi

- reprezentací je nekonečně mnoho na různě rozměrných prostorech
  a i na jednom V můžou být různé reprezentace (triviální a další netriviální repr.)
  avšak mnohé lze převádět mezi sebou (pojem ekvivalence)
  a nebo rozložit na méně rozměrné (pojem reducibility a ireducibility)

<u>Def:</u> Nechť V_1 a V_2 jsou vekt. prostory a $\phi: V_1 \to V_2$ je izomorfismus mezi nimi (tj. $\exists \phi^{-1}$ a $\dim V_1 = \dim V_2$). <u>Pak repr. $(\phi \circ \rho \circ \phi^{-1}, V_2)$ je ekvivalentní repr. (ρ, V_1).</u>

Neboli (ρ, V_1) a (σ, V_2) jsou <u>ekvivalentní repr. grupy G</u> (příp. algebry), pokud $\exists \phi: V_1 \overset{na}{\to} V_2$ takové, že $\sigma = \phi \circ \rho \circ \phi^{-1}$.

<u>Pozn:</u> V matematice se často používá tzv. splétající (intertwining) zobrazení, což je v tomto případě lin. zobrazení $S: V_1 \to V_2$ mezi vekt. prostory, které splňuje pro 2 repr. (ρ, V_1) a (σ, V_2) vztah

$$S \circ \rho(g) \vec{v} = \sigma(g) \circ S \vec{v} \quad \text{pro } \forall g \in G \text{ a } \forall \vec{v} \in V_1$$

$$\begin{tikzcd} V_1 \arrow[r, "S"] \arrow[d, "\rho(g)"'] & V_2 \arrow[d, "\sigma(g)"] \\ V_1 \arrow[r, "S"'] & V_2 \end{tikzcd}$$

neboli (ρ, V_1) a (σ, V_2) jsou ekvivalentní (někdy též izomorfní), pokud $\exists$ splétající izomorfismus V_1 a V_2 (tj. $\exists S^{-1}$)

- aby (ρ, V_1) a (σ, V_2) byly ekvivalentní, musí být $\dim V_1 = \dim V_2$, ale <u>není</u> to postačující podmínka

<u>Př.</u> $V = \mathbb{R}$, $G = \{E, i = \text{inverze}\}$ (E … identita)

na V existují 2 neekvivalentní repr.
1) (ρ, V), kde $\rho(E) = 1$, $\rho(i) = 1$ (triviální, symetrická repr.)
2) (σ, V), kde $\sigma(E) = 1$, $\sigma(i) = -1$, (antisymetrická repr.)

(<u>Pozn.</u> ve fyzice jde o paritu – chování vlnové fce při inverzi, buď se mění, nebo nemění znaménko)

<u>Př.</u> <u>Ekvivalentní maticové reprezentace při změně báze</u>

Nechť (ρ, V) je repr. grupy G na V ($\dim V = n$) a zvolme ve V bázi e_i, tj. $\forall x \in V$ lze psát jako $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$. Působení grupy G na V můžeme v této bázi vyjádřit takto:

$\forall g \in G$ přiřadíme $T(g)$ (operátor na V), ~~který~~ po zapůsobení na prvek báze dá jistou lin. kombinaci prvků báze, neboli

$$T(g) e_i = \sum_{k=1}^{n} D(g)_{ki} e_k \qquad (\text{tj. dostaneme matici } D(g))$$

a pro změnu obecného vektoru dostaneme

$$x' = T(g) x \underset{\text{díky linearitě } T(g)}{=} \sum_{i=1}^{n} x_i T(g) e_i = \sum_{i,k=1}^{n} x_i D(g)_{ki} e_k = \sum_{k=1}^{n} x'_k e_k$$

neboli

$$x'_k = \sum_{i=1}^{n} D(g)_{ki} x_i$$

(zde již standardní násobení matice krát vektor, na rozdíl od $T(g) e_i = \sum_{k=1}^{n} e_k D(g)_{ki}$)

matice $D(g)$ tvoří tzv. <u>maticovou reprezentaci</u> grupy G (kdy není obecně třeba mluvit o V)

jde opravdu o reprezentaci nebot' $D(e) = 1\!\!1_{n\times n}$

a $T(g_1)T(g_2)\,x = \sum_{i,k=1}^{n} x_i\, D(g_2)_{ki}\, T(g_1) e_k =$

$$= \sum_{i,k,\ell=1}^{n} x_i\, D(g_2)_{ki}\, D(g_1)_{\ell k}\, e_\ell = \sum_{i,k,\ell} x_i\, \underbrace{D(g_1)_{\ell k}\, D(g_2)_{ki}}_{[D(g_1)D(g_2)]_{\ell i}}\, e_\ell$$

ale zároveň $= T(g_1 g_2)\,x = \sum_{i,\ell} x_i\, D(g_1 g_2)_{\ell i}\, e_\ell$

a tedy $D(g_1 g_2) = D(g_1) D(g_2)$ jde tedy o homomorfismus z grupy G do grupy matic $n\times n$

zvolme nyní jinou bázi na V $\tilde{e}_i = \sum_{j=1}^{n} e_j A_{ji}$, kde A je matice přechodu definující jisté zobrazení z V na V (složky vektoru $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ se transformují pomocí inverzní matice, nebot' $x = \sum_{i=1}^{n} \tilde{x}_i \tilde{e}_i = \sum_{i,j} x_j (A^{-1})_{ij} \tilde{e}_i$ a tedy $\tilde{x}_i = \sum_{j=1}^{n} (A^{-1})_{ij} x_j$)

Působení G na V lze tedy vyjádřit též jako $T(g)\tilde{e}_i = \sum_{\ell=1}^{n} \tilde{D}(g)_{\ell i}\, \tilde{e}_\ell$, kde $\tilde{D}(g)$ bude obecně jiná matice než $D(g)$

a dále $= \sum_j A_{ji}\, T(g) e_j = \sum_{j,k} A_{ji}\, D(g)_{kj}\, e_k = \sum_{j,k,\ell} A_{ji}\, D(g)_{kj}\, (A^{-1})_{\ell k}\, \tilde{e}_\ell$

neboli $\tilde{D}(g)_{\ell i} = \sum_{k,j} (A^{-1})_{\ell k}\, D(g)_{kj}\, A_{ji} = \sum_{kj} B_{\ell k}\, D(g)_{kj}\, (B^{-1})_{ji}$

kde jsme označili $A^{-1} = B$

maticově $\tilde{D}(g) = B D(g) B^{-1}$

tj. $\tilde{D}(g)$ a $D(g)$ jsou svázány podobnostní transformací a říkáme, že v tomto případě jsou $\tilde{D}(g)$ a $D(g)$ <u>ekvivalentní maticové repr.</u>

[~~to~~též dostaneme „souřadnicově"
$\tilde{x} = Bx$, $x' = D(g)x$
$\tilde{x}' = \tilde{D}(g)\tilde{x} = Bx' \stackrel{\downarrow}{=} BD(g)x = BD(g)B^{-1}\tilde{x}$
neboli opět
$\tilde{D}(g) = BD(g)B^{-1}$]

Reducibilní a ireducibilní reprezentace

- při působení grupy či algebry na V se může stát, že určitý netriviální ($\neq 0, V$) podprostor $W \subset V$ zůstává nezměněn, tj. např. pro grupu G platí $g(s)\vec{w} \in W$ pro určitou repr. (g, V) a $\forall g \in G$, $\forall \vec{w} \in W$

<u>Def</u>: Podprostor $W \subset V$, který se nemění při působení G na V, se nazývá <u>invariantní podprostor</u> a pokud neobsahuje žádný další netriviální ($\neq 0, W$) invariantní podprostor, pak jde o <u>ireducibilní invariantní podprostor</u>.

- stručně lze psát $G \cdot W \subset W$

Def. Pokud V obsahuje při působení G pomocí repr. (ϱ, V) netriviální invariantní podprostor, říkáme, že jde o <u>reducibilní prostor</u> a že (ϱ, V) je <u>reducibilní reprezentace</u>. V opačném případě jde o <u>ireducibilní reprezentaci</u>.

Def: Podreprezentace repr. (ϱ, V) grupy G je repr. $(\varrho{\restriction}_W, W)$, kde W je invariantní podprostor V při působení G.

- Co to znamená pro maticové reprezentace?
  - pokud zvolíme bázi tak, že $e_1, \dots, e_r \in W$ $(\dim W = r)$ a $e_{r+1}, \dots, e_d \in V$, ale $\notin W$ $(\dim V = d)$

    pak dostaneme

$$D(g) = \begin{array}{c} \left(\begin{array}{c|c} D^{W}(g) & D^{WW'}(g) \\ \hline 0 & D^{W'}(g) \end{array} \right) \begin{array}{l} \}\, r \\ \}\, d-r \end{array} \\ \begin{array}{cc} \underbrace{\qquad}_{r} & \underbrace{\qquad}_{d-r} \end{array} \end{array}$$

kde W' značí lineární obal $W' = \mathcal{L}(e_{r+1}, \dots, e_d)$

tj.
$$T(g)\, e_i = \sum_{k=1}^{r} e_k D(g)_{ki} \quad \text{pro } i = 1, \dots, r$$

a matice $D^{W}(g)$ tvoří podreprezentaci repr. $D(g)$, neboť

$$D(g_1) D(g_2) = \left(\begin{array}{c|c} D^{W}(g_1) D^{W}(g_2) & D^{W}(g_1) D^{WW'}(g_2) + D^{WW'}(g_1) D^{W'}(g_2) \\ \hline 0 & \underbrace{D^{W'}(g_1) D^{W'}(g_2)} \end{array} \right)$$

Tyto matice též tvoří repr. grupy G ale nejde obecně o podreprez. repr. $D(g)$ protože W' nemusí být invariantní podprostor

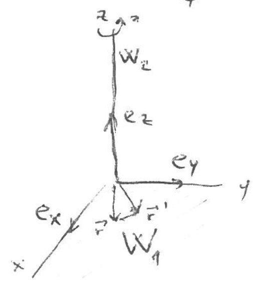
  - vektorům $e_1, \dots, e_d$ se říká <u>báze reprezentace</u> (ϱ, V) a $e_1, \dots, e_r$ tvoří bázi podrepr. $(\varrho{\restriction}_W, W)$
  - v obecné bázi prostoru V by matice $D(g)$ neměly tvar $\left(\begin{array}{c|c} \ast & \ast \\ \hline 0 & \ast \end{array}\right)$, ale byly by plné, ale existovala by podobnostní transformace, která by všechny matice pro $\forall g \in G$ převedla na tento tvar $\Rightarrow$ někdy, když se pracuje pouze s maticovými reprezentacemi, je definice reducibility zavedena pomocí existence takové podobnostní transformace, tj.

    <u>maticová reprezentace je reducibilní</u>, pokud je ekvivalentní repr. $D'(g)$, kde $\forall D'(g)$ jsou matice typu $\left(\begin{array}{c|c} \ast & \ast \\ \hline 0 & \ast \end{array}\right)$, tj. $\exists A$ takové, že
$$D'(g) = A D(g) A^{-1} \quad \text{pro } \forall g \in G$$

Věta. Každá ireducibilní repr. konečné grupy je konečně dimenzionální.

Dk: Nechť (ϱ, V) je ired. repr. G (konečné) a $x \in V$. Pak $\varrho(g)x$ pro $\forall g \in G$ je konečná množina vektorů, jejíž lin. obal je konečně rozm. podprostor V, který je ale navíc invariantní vůči ϱ a tedy celé V musí být tento podprostor, protože ϱ je ireducibilní dle předpokladu. $\Rightarrow$ V je konečně-rozměrný.

Př. Uvažujme působení $SO(2)$ na $\mathbb{R}^3 = V$, přičemž $\forall g \in SO(2)$ přiřadíme rotaci R^z_φ kolem osy z



- vidíme, že se při všech těchto rotacích nemění $\vec r = z e_z$ a vektory $\vec r = x e_x + y e_y$ jsou opět lin. kombinací e_x a e_y

$\Rightarrow$ podprostory $W_1 = \mathcal{L}(\{e_x, e_y\})$, $W_2 = \mathcal{L}(\{e_z\})$ jsou invariantní při tomto působení $SO(2)$ a jde tedy o reducibilní reprezentaci $SO(2)$

- pokud se omezíme na W_1 a W_2, už nenajdeme další netriviální inv. podpr.

$\Rightarrow$ podrepr. na W_1 a W_2 už jsou ireducibilní

- maticově

$$R^z_\varphi = \left(\begin{array}{cc|c} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} \rightarrow R^z_\varphi\big|_{W_1} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \leftarrow \text{ireducibilní reálná repr. } SO(2) \\ \rightarrow R^z_\varphi\big|_{W_2} = (1) \end{array}$$

- uvidíme později, že všechny ired. repr. Abelových grup na komplexních prostorech jsou nutně jednodimenzionální, zde však máme reálnou repr.

$\rightarrow$ pokud bychom např. uvažovali působení $SO(2)$ na 3rozměrném podprostoru p-orbitalů Hilb. prostoru elektronu v centrálním poli, který je komplexní, tam bychom našli další netriviální inv. podprostory

$\Rightarrow$ připustíme tedy komplexní kombinace $\vec z = c^x e_x + c^y e_y$, kde $c^x, c^y \in \mathbb{C}$

pak $z_1 = e_x + i e_y$
a $z_2 = e_x - i e_y$ generují jednorozměrné inv. podpr. „zkomplexifikovaného" $W_1^{\mathbb{C}}$, který je pak reducibilní

neboť např. $\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} = e^{-i\varphi}\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$

$\Rightarrow R^z_\varphi\big|_{W_1^{\mathbb{C}}}$ lze zdiagonalizovat pomocí podobnostní transformace

$$\underbrace{\frac{1}{\sqrt2}\begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix}}_{A^\dagger = A^{-1}} \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \underbrace{\frac{1}{\sqrt2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix}}_{A \text{ tvořené normalizovanými vektory } z_1 \text{ a } z_2} = \left(\begin{array}{c|c} e^{-i\varphi} & 0 \\ \hline 0 & e^{i\varphi} \end{array}\right)$$

$\leftarrow$ nové ireducibilní repr. $SO(2)$ (komplexní), které nejsou ekvivalentní triviální repr.

- obecně lze ukázat, že $\forall$ IR (komplexní) grupy $SO(2)$ jsou $e^{\pm in\varphi}$, $n = 0, 1, 2, \dots$