

Úplná reducibilita

- v příkladu jsme viděli, že repr. $SO(2)$ na \mathbb{R}^3 byla tvořena dvěma podreprezentacemi $\mathbb{R}^2 \downarrow W_1$ a $\mathbb{R}^2 \downarrow W_2$, přičemž $W_1 \perp W_2$ a \mathbb{R}^2 byla blokově diagonální (tj. matice $D^{W_i}(s)$ z předchozího výkladu reducibility byla nulová)

\Rightarrow zavádí se pojem úplné reducibility a bude nás zajímat, zda je to obecná vlastnost reducibilních reprezentací.

Def: Reprezentace (ρ, V) grupy G (či algebry \mathfrak{g}) je úplně reducibilní (též rozložitelná), pokud existuje rozklad $V = \sum_{j \in J} \oplus V_j$, kde V_j jsou ireducibilní invariantní podprostory V při působení G .

- J je obecně množina indexů, která je pro konečně rozměrné prostory konečná, tedy $J = (1, 2, \dots, p)$ a volbou vhodné báze

$$\underbrace{e_{11}, \dots, e_{d_1}}_{\in V_1}, \underbrace{e_{21}, \dots, e_{d_2}}_{\in V_2}, \dots, \underbrace{e_{p1}, \dots, e_{d_p}}_{\in V_p} \quad D(s) = \begin{pmatrix} D^1(s) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & D^2(s) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D^p(s) \end{pmatrix}$$

dostaneme maticovou reprezentaci ve tvaru $D(s) =$

$$\text{tj. } D(s) = D^1(s) \oplus D^2(s) \oplus \dots \oplus D^p(s)$$

kde $D^1(s), \dots, D^p(s)$ jsou již ireducibilní matic. repr.

(Ve fyzikálních aplikacích se často používá značení $\Gamma = \Gamma^1 \oplus \dots \oplus \Gamma^p$ ireducibilní repr. grupy G)

Pro maticové reprezentace grupy G lze opět ~~to~~ definovat úplnou reducibilitu tak, že musí existovat matice A , že $D'(s) = AD(s)A^{-1}$, kde $D(s)$ je v blokově diag. tvaru

- Kdy je reducibilní repr. úplně reducibilní?

- obecně ne vědy: uvažujme $G = (\mathbb{R}^*, +)$ a její dvourozm. repr. $D(x) = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
 [jde o repr., neboť $D(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ a $D(x)D(y) = \begin{pmatrix} 1 & x+y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = D(x+y)$]

\neq vektory $\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$ tvoří ired. inv. podprostor, avšak vektory $\begin{pmatrix} 0 \\ \beta \end{pmatrix}$, které jsou kolmé na $\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$, netvoří inv. podprostor, neboť

$$D(x) \begin{pmatrix} 0 \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta x \\ \beta \end{pmatrix} \Rightarrow D(x) \text{ je reducibilní}$$

avšak není úplně reducibilní, protože neexistuje matice S taková, aby $D'(y) = S \begin{pmatrix} 1 & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} S^{-1} = \begin{pmatrix} f(y) & 0 \\ 0 & g(y) \end{pmatrix}$, kde $f(y), g(y)$ jsou nějaké fce y

$$\text{protože by muselo být } \det D(y) = \det D'(y) \Rightarrow 1 = f(y)g(y)$$

$$\text{Tr } D(y) = \text{Tr } D'(y) \Rightarrow 2 = f(y) + g(y)$$

a tedy $f(y) = g(y) = 1$, což nelze, repr. $D(x)$ není ekvivalentní triviální repr.

- ukazuje se, že významně jsou tzv. unitární repr., které jsou důležité pro aplikaci ve fyzice a protože reducibilita již znamená úplnou reducibilitu

Def. Unitární reprezentace grupy G je repr. na vektor. prostoru \mathcal{H} seskalárním součinem $\langle \psi | \varphi \rangle$ (budeme držet obvyklého fyzikálního značení \mathcal{H} - Hilbertův prostor)

přičemž $\forall g \in G$ je reprezentován unitárním operátorem $U(g)$ pro který platí $U(g)U(g)^\dagger = U(g)^\dagger U(g) = 1$ (kde $U(g)^\dagger$ je hermitovskými sdružením op.)
neboli platí $\langle U(g)\psi | U(g)\varphi \rangle = \langle \psi | \varphi \rangle$ pro $\forall g \in G$ a $\forall |\psi\rangle, |\varphi\rangle \in \mathcal{H}$

(pro ∞ -rozměrné \mathcal{H} se navíc požaduje omezenost $U(g)$: $\|U(g)\psi\| \leq M\|\psi\|$ pro $\forall |\psi\rangle \in \mathcal{H}$)

Maticová unitární repr. je matic. repr. $D(g)$, kde \forall matice jsou unitární, tj. $D(g)^{-1} = D(g)^\dagger$

Věta: Každá konečně-rozměrná unitární reducibilní repr. grupy G na \mathcal{H} je úplně reducibilní.

Dk: Necht' $\mathcal{H}_1 \subset \mathcal{H}$ je netriviální inv. podprostor při působení G (je takový, neboť jde o reducibilní repr.). Stačí ukázat, že \mathcal{H}_1^\perp (ortogon. doplněk \mathcal{H}_1 v \mathcal{H}) je invariantní podpr. To je ale přímým důsledkem invariance skalárního součinu při působení G v \mathcal{H} (jde o unit. repr.), neboť je-li $|\psi\rangle \in \mathcal{H}_1^\perp$, tj. $\langle \psi | \varphi \rangle = 0$ pro $\forall \varphi \in \mathcal{H}_1$, pak

$$\langle U(g)\psi | \varphi \rangle = \langle U(g)\psi | U(g)U(g)^{-1}\varphi \rangle = \langle \psi | \overbrace{U(g)^{-1}\varphi}^{\in \mathcal{H}_1 \text{ díky invarianci } \mathcal{H}_1} \rangle = 0$$

a tedy \mathcal{H}_1^\perp je také invariantní podpr., protože $U(g)\psi \in \mathcal{H}_1^\perp$ pro $\forall g \in G$.

Pokud \mathcal{H}_1 , či \mathcal{H}_1^\perp jsou stále reducibilní, pokračujeme v rozkládání.

- na příkladu reduc. repr., která není úplně reduc., jsme viděli, že šlo o neunitární repr. a ani tato repr. není možné převést podobnostní transf. na unit. (kdyby to šlo, byla by úplně reduc.)

• otázkou je, kdy je neunit. repr. ekvivalentní nějaké unit. repr. a tedy úplně reduc. repr.

ukazuje se, že tomu tak je vždy pro jisté třídy grup,

a to především pro konečné a tzv. kompaktní Lieovy grupy (těmi se budeme blíže zabývat později)

Věta: Každá konečně-rozměrná reducibilní repr. konečné (kompaktní Lieovy) grupy je již nutně úplně reducibilní. (Maschkeův teorém)

Dk: základní myšlenka: Necht' $T(g)$ není unit. věci $\langle 1 | \rangle$ na \mathcal{H} , pak zkonstruujeme

nový skal. součin $\langle \varphi | \psi \rangle' = \frac{1}{\#G} \sum_{g \in G} \langle T(g)\varphi | T(g)\psi \rangle$, věci nemožné už $T(g)$ je unitární. (díky větě o přeuspřádání)

a který je ekvivalentní s původním $\langle 1 | \rangle$. (U Lieových grup nutná integrace přes celou grupu \Rightarrow kompaktnost, aby byl integrál konečný)