Schurova lemmata

- někdy se uvádí pouze jedno, druhé je důsledkem pro komplexní konečně-rozměrné reprezentace
- jsou platná nejen pro reprezentace grup, ale též pro repr. Lieových algeber

1. Lemma

Nechť (ϱ_1, V_1) a (ϱ_2, V_2) jsou ireducibilní reprezentace grupy G.
Nechť S je splétající operátor mezi těmito reprezentacemi, tj.

$$S : V_1 \to V_2 \quad , \quad S\varrho_1(g)\vec{v}_1 = \varrho_2(g) S \vec{v}_1 \quad \text{pro } \forall g \in G$$

Pak je buď $S = 0$ (nulové zobrazení, $S\vec{v} = 0$ pro $\forall \vec{v} \in V_1$)

nebo je S izomorfismus a tedy ϱ_1 a ϱ_2 jsou ekvivalentní repr.

Důkaz: • Jádro $\mathrm{Ker}\, S$ a obraz $\mathrm{Im}\, S$ jsou invariantní podprostory při působení G díky tomu, že jde o splétající operátor, neboť

a) je-li $\vec{v} \in \mathrm{Ker}\, S$ (tj. $S\vec{v} = 0$), pak $S\varrho_1(g)\vec{v} = \varrho_2(g) S\vec{v} = 0$, a tedy i $\varrho_1(g)\vec{v} \in \mathrm{Ker}\, S$ pro $\forall g \in G$

b) je-li $\vec{w} \in \mathrm{Im}\, S$, pak $\exists \vec{v} \in V_1 : S\vec{v} = \vec{w}$

a tedy $\varrho_2(g)\vec{w} = \varrho_2(g) S\vec{v} = S\varrho_1(g)\vec{v} = S\vec{v}'$, kde $\vec{v}' \in V_1$

$\Rightarrow \quad \varrho_2(g)\vec{w} \in \mathrm{Im}\, S \quad$ pro $\forall g \in G$

• Protože V_1 a V_2 jsou ireducibilní $\Rightarrow$ $\mathrm{Ker}\, S = 0$ nebo $\mathrm{Ker}\, S = V_1$

a dále $\mathrm{Im}\, S = 0$ nebo $\mathrm{Im}\, S = V_2$

Pokud $\mathrm{Im}\, S = 0 \quad \Rightarrow \quad S = 0$.
Pokud $\mathrm{Ker}\, S = V_1 \quad \Rightarrow \quad S = 0$.
Pokud $\mathrm{Ker}\, S = 0$ a $\mathrm{Im}\, S = V_2$, pak S je izomorfismus a tedy $(\varrho_1, V_1) \simeq (\varrho_2, V_2)$ (jsou ekvivalentní).

2. Lemma:

Nechť (ϱ, V) je ireducibilní komplexní konečně-rozměrná repr. grupy G a S je splétající operátor na V, tj. $S : V \to V$, který komutuje se všemi $\varrho(g)$, $g \in G$.

Pak $S = \lambda \mathbb{1}$, kde $\lambda \in \mathbb{C}$, tj. S je násobkem identity.

Důkaz: Nechť $A = S - \lambda \mathbb{1}$, kde λ je řešením $\det(S - \lambda \mathbb{1}) = 0$ (proto potřebujeme komplexní repr a $\dim < \infty$)

pak A je též splétající, ale není invertibilní

$\Rightarrow$ z 1. lemmatu plyne, že $A = 0$, a tedy $S = \lambda \mathbb{1}$.

Důsledky Schurových lemmat

1) Kritérium iredecibility konečně-rozm. repr. konečných (a komp. Lieových) grup

- pro tyto grupy je každá konečně-rozm. repr. úplně reducibilní nebo ireduc., pokud je reducibilní, pak každá matice lze převést na tvar $\left(\begin{array}{c|c} \epsilon_1 & 0 \\ \hline 0 & \epsilon_2 \end{array}\right)$ a komutuje s maticemi $\left(\begin{array}{c|c} \lambda_1 \mathbb{1} & 0 \\ \hline 0 & \lambda_2 \mathbb{1} \end{array}\right)$, kde $\lambda_1 \neq \lambda_2$ $\Rightarrow$ Pokud je jedinou maticí, která komutuje se $\forall$ maticemi dané repr., násobkem jednotkové matice, pak jde nutně o ireducibilní reprezentaci.

2) Komplexní konečně-rozm. ireduc. repr. komutativní (abelovské) grupy G jsou jednorozměrné

Dk: Nechť $T(g)$ tvoří repr. abelovské grupy G na prostoru V.

Pak $$T(g_1)T(g_2) = T(g_2)T(g_1) \quad \text{pro } \forall g_1, g_2 \in G$$

$\Rightarrow$ $T(g_1)$ komutuje se $\forall T(g_2)$ a tedy jde-li o ired. repr., pak dle 2. Schur. lemmatu je $T(g_1) = \lambda(g_1)\mathbb{1}$ pro $\forall g_1 \in G$

$\Rightarrow$ $T(g)$ je reducibilní, ledaže $\dim V = 1$.

Pozn. požadavek komplexnosti je důležitý, jak jsme viděli v Př. působení $SO(2)$ na $\mathbb{R}^3$

3) Relace ortogonality pro maticové ireducibilní komplexní repr.

Nechť $D^\mu(g)$ a $D^\nu(g)$ jsou dvě komplexní ired. matic. repr. konečné (resp. kompaktní Lieovy) grupy. Pak

1) pokud jsou tyto repr. neekvivalentní, pak

$$\sum_{g\in G} D^\mu_{ij}(g^{-1}) D^\nu_{ke}(g) = \mathbb{0} \qquad \Big(\text{resp. } \int_G D^\mu_{ij}(g^{-1}) D^\nu_{ke}(g)\, \underset{\substack{\uparrow \\ \text{levoinvariantní míra na } G}}{dg} = \mathbb{0}\Big)$$

2) pokud jsou ekvivalentní, pak $\exists S$ taková, že $D^\mu(g) = S^{-1} D^\nu(g) S$ a platí

$$\sum_{g\in G} D^\mu_{ij}(g^{-1}) D^\nu_{ke}(g) = \frac{\# G}{d_\mu} S_{kj} (S^{-1})_{ie}$$

(resp. obdobně pro komp. Lieovy grupy, $\Sigma \leftrightarrow \int$ a $\# G \leftrightarrow V_G$)

a speciálně pro $\mu = \nu$ máme $S = \mathbb{1}$

a tedy $$\sum_{g\in G} D^\mu_{ij}(g^{-1}) D^\nu_{ke}(g) = \frac{\# G}{d_\mu} \delta_{kj} \delta_{ie}$$

3) pokud jsou tyto repr. unitární, pak $D^\mu_{ij}(g^{-1}) = D^\mu_{ji}(g)^*$

a dostaneme pro neekvivalentní, nebo identické ired. repr. vztah

$$\boxed{\sum_{g\in G} D^\mu_{ji}(g)^* D^\nu_{ke}(g) = \frac{\# G}{d_\mu} \delta_{\mu\nu} \delta_{jk} \delta_{ie}}$$

Dk. <u>Relace ortogonality pro konečné grupy</u> (u kompaktních Lieových grup je pouze nutné použít levoinv. integraci místo sumy přes $\forall$ prvky grupy)

Nechť B je libovolná matice $d_\mu \times d_\nu$ kde d_μ, resp. d_ν jsou dimenze ired. repr.

Pak matice $A = \sum_g D^\mu(g^{-1}) B D^\nu(g)$ splňuje $D^\mu(h) A = A D^\nu(h)$ pro $\forall h \in G$

neboť

$$D^\mu(h) A = \sum_g D^\mu(h) D^\mu(g^{-1}) B D^\nu(g) \underset{\uparrow}{=} \sum_{g'} D^\mu(g'^{-1}) B D^\nu(g'h) = A D^\nu(h)$$

substituce $g'^{-1} = hg^{-1}$, neboli $g = g'h$
a využití věty o přeuspořádání (při násobení jednim prvkem $h \in G$ všechny prvky grupy G dostaneme opět všechny prvky grupy)

Dále
1) pokud D^μ není ekvivalentní D^ν, pak dle 1. Schurova lemmatu musí být $A = 0$ a vezmeme-li jako B matici, jejíž jediný nenulový prvek je $b_{rs} = 1$, pak

$$0 = \sum_{j,k} \sum_g D^\mu_{ij}(g^{-1}) \underset{\delta_{jr}\delta_{ks}}{\underset{\uparrow}{B_{jk}}} D^\nu_{k\ell}(g) = \sum_g D^\mu_{ir}(g^{-1}) D^\nu_{s\ell}(g) = 0$$

2) pokud $D^\mu = S^{-1} D^\nu S$ (tj. D^μ a D^ν jsou ekvivalentní), pak

$$D^\mu(h) A = A S D^\mu(h) S^{-1}, \text{ neboli } D^\mu(h) AS = AS D^\mu(h) \text{ pro } \forall h \in G$$

a tedy dle 2. Schurova lemmatu $AS = \lambda \mathbb{1}$, neboli $A = \lambda S^{-1}$

Hodnotu λ určíme pomocí stopy výrazu $\lambda \mathbb{1} = AS = \sum_g D^\mu(g^{-1}) BS D^\mu(g) \cancel{S^{-1}S}$,

dostaneme $d_\mu \lambda = \mathrm{Tr}\, \lambda \mathbb{1} = \sum_g \mathrm{Tr}\left[\cancel{D^\mu(g^{-1})} BS \cancel{D^\mu(g)}\right] = \sum_g \mathrm{Tr}\, BS = \#G \sum_{i,j} B_{ij} S_{ji}$

a opět volbou $B_{ij} = \delta_{ir}\delta_{js}$ nakonec $d_\mu \lambda = \#G\, S_{sr}$

a tedy nakonec

$$\lambda (S^{-1})_{i\ell} = A_{i\ell} = \sum_{j,k} \sum_g D^\mu_{ij}(g^{-1}) \underset{\delta_{jr}\delta_{ks}}{\underset{\uparrow}{B_{jk}}} D^\nu_{k\ell}(g) = \sum_g D^\mu_{ir}(g^{-1}) D_{s\ell}(g) = \frac{\#G}{d_\mu} S_{sr} (S^{-1})_{i\ell}$$

což jsme měli dokázat.

Další vztahy jsou již přímočaré dosazení

- Co je vlastně v relacích ortogonality na sebe ortogonální?
  Pokud bychom nalezli maticové vyjádření všech <u>neekvivalentních ired. repr.</u> dané grupy a sestavili vektory typu $(D^\mu_{ij}(g_1), D^\mu_{ij}(g_2), \ldots, D^\mu_{ij}(g_{\#G}))$ byly by právě tyto vekt. na sebe kolmé, tj. každý vektor je určen třemi parametry (μ - čísluje repr., i,j - určují pozici prvku matice D^μ) a složky těchto vektorů jsou číslovány prvky grupy. Jde tedy o $\#G$-rozměrný prostor, kde máme $\sum_\mu d_\mu^2$ ortogonálních vektorů, musí tedy být $\sum_\mu d_\mu^2 \leq \#G$
  suma přes $\forall$ neekv. ired. repr. (později si ukážeme, že platí =)