Charaktery reprezentace

- jak již víme mnoho repr. je ekvivalentních (~~se~~ např. stejný V jiná volba báze) chtěli bychom nějakou charakteristiku ~~této~~ těchto tříd ekvivalence $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ charakter reprezentace – uvidíme, že jde o mocný nástroj v teorii repr. (zvláště konečných) grup

Def: Nechť $T(g)$ ~~je~~ tvoří repr. grupy G na konečně-dim. prostoru V a $D(g)$ je odpovídající matic. repr. v nějaké bázi V. Pak fci na G

$$\boxed{\chi(g) = \mathrm{Tr}\, D(g) = \sum_{i=1}^{d} D_{ii}(g)}$$

nazvu charakterem ~~repr.~~ této reprezentace a $\chi(g)$ je charakter prvku $g \in G$ v repr. $T(g)$.

Pozn. 1) Def. nezávisí na volbě báze (proto je korektní) díky cykličnosti stopy

$$\mathrm{Tr}\, D'(g) = \mathrm{Tr}\, A^{-1} D(g) A = \mathrm{Tr}\, D(g)$$

$\Rightarrow$ ekvivalentní reprezentace mají stejný charakter

$\Rightarrow$ jde tedy vskutku o charakteristiku třídy ekvivalence repr.

opačná implikace obecně neplatí:

Př. opět nekompaktní grupa $G = (\mathbb{R}^+, \cdot)$ a její repr. $\begin{pmatrix} 1 & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ která není ekvivalentní repr. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, i když mají stejný charakter

Platí však:

Věta: Nechť G je konečná či kompaktní Lieova grupa, pak dostačující podmínkou, aby 2 repr. byly ekvivalentní, je rovnost jejich charakterů.

Dk: Později, potřebí relací ortogonality pro charaktery

2) Pro $g = e$ máme $D(e) = \mathbb{1}_{d \times d} \Rightarrow \chi(e) = d = \dim V$

3) Charaktery sdružených prvků jsou stejné

nebot' $\mathrm{Tr}\, D(g_2) = \mathrm{Tr}\, D(h^{-1} g_1 h) = \mathrm{Tr}\, D(g_1)$

$\Rightarrow$ toto bude mít důsledek pro konečné repr. v tom, že

$\#\, \mathrm{iR} = \#$ tříd sdruž. prvků

4) je-li $D(g) = D_1(g) \oplus \dots \oplus D_r(g)$ pak $\chi(g) = \chi_1(g) + \dots + \chi_r(g)$

Relace ortogonality pro charaktery

- Věta: Nechť $\chi^\mu(g)$ a $\chi^\nu(g)$ jsou charaktery 2 IR na komplexních konečně-rozm. prostor grupy G a nechť jsou tyto repr. neekvivalentní, je-li $\mu \neq \nu$.

Pak pro konečnou grupu G platí

$$\boxed{\sum_g \chi^\mu(g^{-1})\chi^\nu(g) = \#G\, \delta_{\mu\nu}}$$

a pro kompaktní LG máme

$$\int_G \chi^\mu(g^{-1})\chi^\nu(g)\, dg = V \delta_{\mu\nu} \qquad V = \int_G dg$$

Pozn: Protože lib. konečně-rozm. repr. pro konečné či komp. LG je ekvivalentní nějaké unit. repr., platí $\chi(g^{-1}) = \chi(g)^*$ neboť unit. matice mají vlastní hodnoty λ: $|\lambda|^2 = 1 \Rightarrow \lambda_i^{-1} = \lambda_i^*$.

takže můžeme psát

$$\sum_g \chi^\mu(g)^* \chi^\nu(g) = \#G\, \delta_{\mu\nu}$$

a pod. pro komp. LG.

Dk: přímočarý vysčítáním relací ortogonalit matic D^μ a D^ν

$$\sum_{i,k}\sum_g D^\mu_{ii}(g^{-1})\, D^\nu_{kk}(g) = \sum_g \chi^\mu(g^{-1})\chi^\nu(g) =$$

$$= \sum_{i,k} \frac{\#G}{d_\mu}\delta_{ik}\delta_{ik}\delta_{\mu\nu} = \frac{\#G}{d_\mu} d_\mu \delta_{\mu\nu} = \#G\, \delta_{\mu\nu}$$

- vezmeme-li v úvahu rovnost charakterů pro sdružené prvky, můžeme psát

$$\boxed{\sum_{k=1}^{N} n_k \chi^{\mu}(C_k)^* \chi^\nu(C_k) = \#G\, \delta_{\mu\nu}}$$

kde N je počet tříd sdruž. prvků

a n_k počet prvků v třídě C_k

a $\chi^\mu(C_k)$ je charakter na třídě C_k, tj $\chi^\mu(C_k) = \chi^\mu(g)$ kde g je libovolný prvek třídy C_k

- z výše uvedeného vidíme, že charaktery neekviv. IR tvoří ortogonální systém vektorů z určitého vekt. prostoru (#G-dimenzionálního) nad $\mathbb{C}$ (pro konečné grupy)

a navíc omezíme-li se na fce tříd, tvoří $\chi^\mu(C_k)$ neekv. ired. reprezentací ortogonální systém v N-rozměrném vekt. prostoru nad $\mathbb{C}$

$\Rightarrow$ #IR (neekviv.) $\leq N$ = # tříd sdruž. prvků

uvidíme =