Ireducibilní reprezentace konečných grup

- ## regulární reprezentace grupy G

  - nechť $n = \# G$ a nechť $g_1, \dots, g_n$ jsou prvky (konečné) grupy G

pak
$$D^{reg}(g_s)_{k\ell} = \begin{cases} 1 & \text{pokud } g_s g_\ell = g_k \\ 0 & \text{pokud } g_s g_\ell \neq g_k \end{cases}$$

$$\begin{array}{l|lll} g_1 g_1 & g_1 g_2 & g_1 g_3 & \dots \\ \hline g_2 g_1 & g_2 g_2 & g_2 g_3 & \\ g_3 g_1 & g_3 g_2 & g_3 g_3 & \\ \vdots & & & \ddots \end{array} \qquad \begin{array}{c|cc} e & a & b \\ \hline a & b & e \\ b & e & a \end{array}$$

$$D^{reg}(e) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} g_1 = e \\ g_2 = a \\ g_3 = b \end{array}$$

$$D^{reg}(a) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$D^{reg}(b) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

jde vskutku o reprez., neboť

$$D^{reg}(e) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \\ 0 & 1 & \\ & & 1 \dots \end{pmatrix}$$

$$\sum_\ell \underbrace{D^{reg}(g_r)_{k\ell}}_{\substack{1 \text{ pro} \\ g_r g_\ell = g_k}} \underbrace{D^{reg}(g_s)_{\ell m}}_{\substack{1 \text{ pro} \\ g_s g_m = g_\ell}} = D^{reg}(g_r g_s)_{km}$$

$\Rightarrow \quad g_r g_s g_m = g_k$ ✓

- charaktery
$$\chi^{reg}(g_s) = \begin{cases} \# G & \text{pokud } g_s = e \\ 0 & \text{pokud } g_s \neq e \end{cases}$$
neboť $D^{reg}(g_s)_{kk} = \begin{cases} 1 & \text{pro } g_s = e \\ 0 & \text{pro } g_s \neq e \end{cases}$

plyne z $g_s g_k = g_k \iff g_s = e$

$$\Rightarrow \quad \alpha_\mu^{reg} = \frac{1}{\# G} \sum_g \chi^{reg}(g)^* \chi^\mu(g) = \frac{1}{\# G} \chi^{reg}(e)^* \chi^\mu(e) = d_\mu$$

tj. $\forall$ IR je v regul. repr. obsažena d_μ-krát

avšak $\dim D^{reg} = \boxed{\# G = \sum_\mu d_\mu^2}$

- ## násobení tříd sdružených prvků

  - označme $\mathcal{C}_k$ třídu sdruž. prvků grupy G a nechť n_k je # prvků $\mathcal{C}_k$

pro $\mathcal{C}_k$ platí: $\quad g \mathcal{C}_k g^{-1} = \mathcal{C}_k \quad$ pro $\forall g \in G$ (plyne přímo z věty o přeuspořádání)

Dk. z definice $\mathcal{C}_k$ je jasné, že $g \mathcal{C}_k g^{-1} \subset \mathcal{C}_k$

dále musí být $\left. \begin{array}{l} g a_1 g^{-1} = b \\ g a_2 g^{-1} = b \end{array} \right\} \Rightarrow a_1 = a_2 \Rightarrow n_k$ prvků se zobrazí na n_k různých prvků c.b.d.

- nechť $\mathcal{C} = \sum_k a_k \mathcal{C}_k$ kde $a_k = \begin{cases} 1 & \text{pokud } \mathcal{C}_k \subset \mathcal{C} \\ 0 & \text{pokud } \mathcal{C}_k \not\subset \mathcal{C} \end{cases}$ je množina složená z několika tříd

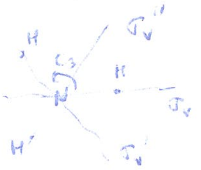
i pro $\mathcal{C}$ platí $\underbrace{g \mathcal{C} g^{-1} = \mathcal{C} \quad \forall g \in G}$

a též naopak pokud $\underbrace{}_{\text{toto}}$, pak $\mathcal{C}$ je sjednocení některých tříd sdruž. prvků

Dk. zřejmé z toho, že to platí pro všechny $g \in G$ a tedy jeli $h \in \mathcal{C}$ pak též $\forall$ prvky sdruž. s h patří do $\mathcal{C}$

• násobení tříd $\mathcal{C}_k\mathcal{C}_\ell = \{g_k g_\ell,\ g_k\in\mathcal{C}_k,\ g_\ell\in\mathcal{C}_\ell\}$ přičemž pokud je některý prvek $g\in G$ v $\mathcal{C}_k\mathcal{C}_\ell$ vícekrát, počítáme ho vícekrát

<u>Př.</u> grupa symetrie NH_3 $\mathcal{C}_1$ = prvky $\{E\}$, $\mathcal{C}_2 = \{C_3, C_3^2\}$, $\mathcal{C}_3 = \{\sigma_v, \sigma_v', \sigma_v''\}$



pak
$$\mathcal{C}_2\mathcal{C}_2 = \{C_3, C_3^2\}\{C_3, C_3^2\} = \{C_3^2, E, E, C_3^4 = C_3\} = 2\mathcal{C}_1 + \mathcal{C}_2$$
a podobně
$$\mathcal{C}_2\mathcal{C}_3 = 2\mathcal{C}_3 \quad \text{atd.}$$

platí obecně
$$(*) \qquad \mathcal{C}_i\mathcal{C}_j = \sum_{k=1}^{N_c} c_{ij}^k\, \mathcal{C}_k\,,$$
kde c_{ij}^k se nazývají „konstanty tříd" class constants

<u>Dk.</u> protože $g\mathcal{C}_i\mathcal{C}_j g^{-1} = g\mathcal{C}_i g^{-1} g\mathcal{C}_j g^{-1} = \mathcal{C}_i\mathcal{C}_j$ a tedy $\mathcal{C}_i\mathcal{C}_j$ je součet $\mathcal{C}_k$

• konstanty c_{ij}^k se objevují v důležitém vztahu pro násobení charakterů
$$(**) \qquad n_i n_j\, \chi^\alpha(\mathcal{C}_i)\,\chi^\alpha(\mathcal{C}_j) = d_\alpha \sum_{k=1}^{N_c} c_{ij}^k\, n_k\, \chi^\alpha(\mathcal{C}_k)$$
, kde χ^α jsou charakt. nějaké <u>ireduc.</u> repr.

<u>Dk:</u> 1) protože platí $g\mathcal{C}_k = \mathcal{C}_k g$ pro lib. $g\in G$

bude též $D^\alpha(g)\,A_k = A_k\, D^\alpha(g)$ pro $\forall g\in G$ kde
$$A_k = \sum_{h\in\mathcal{C}_k} D^\alpha(h)$$
– suma matic, které repr. prvky $h\in\mathcal{C}_k$ v repr. D^α

(Pozn. <u>neplatí</u> však $D^\alpha(g)D^\alpha(h) = D^\alpha(h)D^\alpha(g)$ pro $h\in\mathcal{C}_k$)

z 2. Schur. lemmatu plyne $A_k = \lambda_k \mathbb{1}$, je-li $D^\alpha(g)$ ireduc. matic. repr.

λ_k určíme opět stopou:
$$\mathrm{Tr}\, A_k = n_k\chi(\mathcal{C}_k) = \lambda_k \mathrm{Tr}\,\mathbb{1} = \lambda_k d_\alpha \Rightarrow \lambda_k = \frac{n_k\chi(\mathcal{C}_k)}{d_\alpha}$$

2) nyní ze vztahu (*) plyne
$$A_i A_j = \sum_{k=1}^{N_c} c_{ij}^k A_k$$
a dosazením $A_k = \frac{n_k\chi(\mathcal{C}_k)}{d_\alpha}\mathbb{1}$

dostaneme žádaný vztah (**).

• dokažme nyní, že počet IR = počtu tříd sdruž. prvků

1) z relací ortogonality pro charaktery
$$\sum_g \chi^\alpha(g)^*\chi^\beta(g) = \sum_k n_k\, \chi^{\alpha *}(\mathcal{C}_k)\,\chi^\beta(\mathcal{C}_k) = \#G\,\delta_{\alpha\beta}$$
plyne $N_r \le N_c$

neboť $\chi^{\alpha}(\mathcal{C}_k)$ tvoří ortogonální systém v N_c-rozm. prostoru

2) pokud $\mathcal{C}_1 = E$, pak pro regulární repr. platí
$$\sum_\alpha d_\alpha \chi^\alpha(\mathcal{C}_k) = \#G\,\delta_{k1} = \chi^{reg}(\mathcal{C}_k)$$

sečteme nyní (**) přes všechny IR a použijeme, dostaneme
$$n_i n_j \sum_\alpha \chi^\alpha(\mathcal{C}_i)\,\chi^\alpha(\mathcal{C}_j) \overset{!}{=} \#G\, c_{ij}^1$$
, neboť $n_1 = 1$ $(\{E\})$

$\Leftarrow$ $c_{ij}^1 = n_i\,\delta_{ij'}$ kde $\mathcal{C}_{j'}$ je třída sdruž. prvků inv k prvkům $\mathcal{C}_j$ (může být $\mathcal{C}_j = \mathcal{C}_{j'}$), vždy $n_j = n_{j'}$, navíc $\chi^\alpha(\mathcal{C}_{j'}) = \chi^\alpha(\mathcal{C}_j)^*$

$$\Leftarrow \quad n_j \sum_\alpha \chi^\alpha(\mathcal{C}_i)^*\,\chi^\alpha(\mathcal{C}_j) = \#G\,\delta_{ij}$$

$N_r = N_c$

$\Uparrow$

$N_c \le N_r$

Důkaz #IR = # tříd sdružených prvků ($N_r = N_c$)

1) z relací ortogonality pro charaktery

$$\sum_g \chi^\alpha(g)^* \chi^\beta(g) = \sum_k \overset{\#C_k}{n_k} \chi^\alpha(C_k)^* \chi^\beta(C_k) = \#G\,\delta_{\alpha\beta}$$

plyne $N_r \leq N_c$, neboť $\chi^\alpha(C_k)$ tvoří ortogonální systém v N_c-rozm. prostoru.

2) Dokážeme, že též platí $n_j \sum_\alpha \chi^\alpha(C_i)^* \chi^\alpha(C_j) = \#G\,\delta_{ij}$

a tedy $\chi^\alpha(C_k)$ tvoří též ortogonální systém v N_r-rozm. prostoru

neboli $N_c \leq N_r$ (nyní α je index a C_k označuje jednotlivé vektory)

Dk 2): Víme, že pro třídy platí

$$n_i n_j \chi^\alpha(C_i)\chi^\alpha(C_j) = d_\alpha \sum_{k=1}^{N_c} c_{ij}^k n_k \chi^\alpha(C_k)$$

, kde χ^α jsou charaktery některé IR

sumou přes všechny IR a použitím vztahu

$$\chi^{reg}(C_k) = \delta_{k1}\#G = \sum_\alpha d_\alpha \chi^\alpha(C_k)$$

(pokud $C_1 = E$)

dostaneme

$$n_i n_j \sum_\alpha \chi^\alpha(C_i)\chi^\alpha(C_j) = c_{ij}^1 \#G$$

Protože však $c_{ij}^1 = n_i \delta_{ij'}$, kde $C_{j'}$ je třída sdruž. prvků, které jsou inverzní k prvkům třídy C_j [někdy je $C_{j'} = C_j$, ale obecně různé třídy, avšak vždy $n_j = n_{j'}$ a $\chi^\alpha(C_j)^* = \chi^\alpha(C_{j'})$, protože $\forall$ konečně-rozm. repr. je ekv. nějaké unitární $\Rightarrow \chi(g^{-1}) = \chi^\alpha(g)^*$; a dále je-li $a \sim b \in C_j$ a $a^{-1} \in C_{j'}$, pak $b^{-1} \in C_{j'}$, neboť

$$a = gbg^{-1} \Rightarrow a^{-1} = (gbg^{-1})^{-1} = g b^{-1} g^{-1}$$]

nakonec dostáváme

$$\cancel{n_i}\, n_{j'} \sum_\alpha \chi^\alpha(C_i)\chi^\alpha(C_{j'})^* = \cancel{n_i}\, \delta_{ij'} \#G$$

a přeznačíme $j' \to j$ a komplexně sdružíme.