# Věta o jednoznačnosti rozkladu (až na ekvivalenci)

Nechť $T(g)$ tvoří repr. konečné či komp. Lieovy grupy $G$ na konečně-dim. vekt. pr. $V$ a nechť $V = \sum_{i=1}^{r} \oplus V_i = \sum_{j=1}^{r'} \oplus V_j'$

jsou 2 rozklady na inv. ireduc. podprostory při působení $G$.

Pak $r = r'$ a $V_j'$ lze uspořádat tak, že $V_i \cong V_i'$ pro $i = 1, \dots, r$

Dk: $r = r'$ plyne ze vztahu

$$\alpha_\mu = \frac{1}{\# G} \sum_g \chi^\mu(g)^* \chi(g)$$

nebcť říká, že ~~které~~ a kolikrát jsou ~~IR~~ neekv. IR obsaženy v lib. rozkladu

uspořádání je zřejmé, i když obecně nemusí dát přeuspořádání

tytéž inv. podpr.

Př. $\{1s, 2s\}$ - orbitaly tvoří reduc. vekt. pr. $\mathcal{H}^{1s \oplus 2s}$

lze rozložit např. na $\mathcal{H}^{1s} \oplus \mathcal{H}^{2s}$ či na $\underbrace{\mathcal{H}^{\alpha(1s)+\beta(2s)}}_{\text{je též inv. podpr.}} \oplus \mathcal{H}^{\gamma(1s)+\delta(2s)}$

# Ekvivalence reprezentací $\Leftrightarrow$ mají-li stejné charaktery (pro konečné a kompaktní LG)

Dk: $\Rightarrow$ triviální

$\Leftarrow$ Nechť $\chi(g)$ a $\chi'(g)$ jsou charakt. 2 repr. $T(g)$ a $T'(g)$

1) Nechť ~~[illegible]~~ jsou obě ireducibilní, $\chi(g) = \chi'(g)$ a předpokládejme, že nejsou ekvivalentní.

Pak ale $\sum_g \chi'(g)^* \chi(g) \overset{\text{ireduc.}}{=} 0 \quad \wedge \quad \sum_g \chi(g)^* \chi(g) \overset{\text{též ired.}}{=} \# G$ spor

2) Nechť nejsou ireducibilní (tedy alespoň jedna). Pak jsou úplně reducibilní

$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} \chi(g) = \sum_\mu \alpha_\mu \chi^\mu(g) \\ \chi'(g) = \sum_\mu \alpha'_\mu \chi^\mu(g) \end{array}\right\}$ pro $\forall g \in G$ $\underset{\substack{\text{z rovnosti} \\ \chi' = \chi}}{\Rightarrow}$ $\sum_{\mu} (\alpha_\mu - \alpha'_\mu) \chi^\mu(g) = 0$

$\Rightarrow 0 = \sum_\mu (\alpha_\mu - \alpha'_\mu) \sum_g \chi^\nu(g)^* \chi^\mu(g) = \# G \sum_\mu (\alpha_\mu - \alpha'_\mu) \delta_{\mu\nu} = \# G (\alpha_\mu - \alpha'_\mu)$

$\Rightarrow \alpha_\mu = \alpha'_\mu$

$\Rightarrow$ tedy dva rozklady obsahují ty samé IR (až na ekvival.)

a jsou tedy ekvivalentní

# Frobeniovo kritérium ireducibility

- pro konečné grupy je každá reduc. konečně-rozm. repr. úplně reducibilní

tj.

$$D(g) = \begin{pmatrix} D_1^{(1)}(g) & 0 & & & & \\ 0 & D_1^{(1)}(g) & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & D^{(2)}(g) & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & D^{(n)}(g) \\ & & & & & & \ddots \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \chi(g) = \sum_\mu \alpha_\mu \chi^{(\mu)}(g)$$

$\forall$ neekv. IR

(bloky $D^{(1)}$ opakované $\alpha_1$-krát, $D^{(2)}$ $\alpha_2$-krát, $D^{(\mu)}$ $\alpha_\mu$-krát)

z relací ortogonality dostaneme

$$\sum_g \chi^{\nu}(g)^* \chi(g) = \sum_\mu \alpha_\mu \sum_g \chi^\nu(g)^* \chi^\mu(g) = \alpha_\nu \# G$$

neboli

$$\boxed{\alpha_\mu = \frac{1}{\# G} \sum_g \chi^\mu(g)^* \chi(g) = \frac{1}{\# G} \sum_{k=1}^{N} n_k \chi^\mu(C_k)^* \chi(C_k)}$$

přes třídy sdruž. prvků

- takto tedy spočteme, kolikrát je daná IR $D^\mu(g)$ obsažena v rozkladu reduc. repr. $D(g)$, stačí znát charaktery

$\rightarrow$ jeden z důvodů proč jsou charaktery tabelovány

- spočteme nyní $\sum_g \chi(g)^* \chi(g) = \sum_g \sum_{\mu,\nu} \alpha_\mu \alpha_\nu \chi^\mu(g)^* \chi^\nu(g) = \# G \sum_\mu \alpha_\mu^2$

$\Rightarrow$ pokud je $D(g)$ ireducibilní, pak $\sum_\mu \alpha_\mu^2 = 1$ neboť $\chi(g) = 1 \cdot \chi^\mu(g)$ pro nějaké $\mu$

$\Rightarrow$ $\boxed{\sum_g \chi(g)^* \chi(g) = \# G}$ $\Leftrightarrow$ $D(g)$ je ireducibilní

Frobeniovo kritérium ireducibility

Pozn. pokud je $D(g)$ reduc., je nutně $\sum_\mu \alpha_\mu^2 > 1$ !