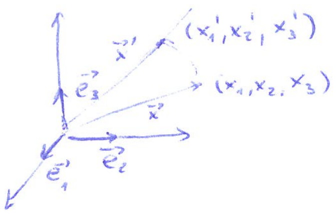
# Transformace vektorů, pseudovektorů a tenzorů 2. řádu při působení O(3) a bod. grup na $\mathbb{R}^3$

- budeme uvažovat transf. souřadnic bodů $\vec{x}$




$$\vec{x} = \sum_{i=1}^{3} x_i \vec{e}_i \xrightarrow{g} \vec{x}' = \sum_{i=1}^{3} x_i' \vec{e}_i$$ , kde $x_i' = \sum_k D_{ik}(g)\, x_k$

- $g \mapsto D(g)$ je 3-rozm. maticová repr. grupy O(3) či nějaké její podgrupy
- pro O(3), SO(3) a někt. další podgrupy jde o ired. reprezentaci, pro ~~[illegible]~~ podgrupy (grupy s jednou hlavní osou) jako $C_n$, $D_n$, $C_{nv}$, ... jde o reducibilní repr.

  a volbou osy z jako hlavní osy dostaneme jednorozm. repr. (z) a buď dvourozm. ired. repr. (x, y) nebo někdy i další dvě jednorozm. ired. repr. (x), (y)

- tato repr. se obecně nazývá <u>vektorová reprezentace</u> (transf. se takto vektory) a značí se někdy V
- ~~[illegible]~~ vlastní rotace o stejný úhel $\varphi$ kolem lib. osy tvoří třídu sdruž. prvků v grupy O(3) a SO(3), podobně pro nevlastní rotace v O(3)
- charakter lib. <u>vlastní</u> rotace o úhel $\varphi$ kolem lib. osy je $\chi(C_\varphi) = 1 + 2\cos\varphi$

  a charakter lib. <u>nevlastní</u> ——— " ——— je $\chi(S_\varphi) = -1 + 2\cos\varphi$

<u>Proč?</u>

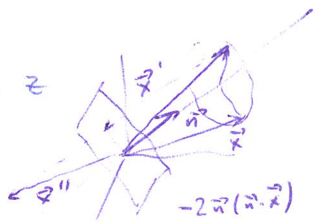
$$D_{ij}(C_\varphi^{\vec{n}}) = \delta_{ij}\cos\varphi + (1-\cos\varphi)\, n_i n_j - \varepsilon_{ijk} n_k \sin\alpha$$

$$\mathrm{Tr}\, D(C_\varphi^{\vec{n}}) = 3\cos\varphi + (1-\cos\varphi)\underbrace{(n_1^2+n_2^2+n_3^2)}_{1} - 0 = 1 + 2\cos\varphi$$

$$D_{ij}(S_\varphi^{\vec{n}}) = \delta_{ij}\cos\varphi + (-1-\cos\varphi)\, n_i n_j - \varepsilon_{ijk} n_k \sin\alpha$$ (stačí od $\vec{x}'$ u $C_\varphi^{\vec{n}}$ odečíst $2\vec{n}(\vec{n}\cdot\vec{x})$)

$$\mathrm{Tr}\, D(S_\varphi^{\vec{n}}) = -1 + 2\cos\varphi$$

jde-li o rotace kolem osy z, pak $\pm 1$ je příspěvek od z a $2\cos\varphi$ od transf. (x, y)




- <u>pseudovektorová reprezentace</u> $\varepsilon V$

  nechť $\vec{x}$ a $\vec{X}$ se transf. podle vekt. repr., tj. $x_i' = \sum D_{ik}^{(g)} x_k$, $X_i = \sum D_{ik}^{(g)} X_k$

  uvažujme vekt. součin $\vec{R} = \vec{x} \times \vec{X}$, tj. $R_1 = x_2 X_3 - x_3 X_2$, $R_2 = x_3 X_1 - x_1 X_3$, $R_3 = x_1 X_2 - x_2 X_1$

  při působení g dostaneme

$$\Big[\; R_1' = x_2' X_3' - x_3' X_2' = \sum_{k,l} D_{2k}(g) D_{3l}(g)(x_k X_l - x_l X_k) =$$

$$= \underbrace{(D_{22}D_{33} - D_{23}D_{32})}_{(\det D)\,(D^{-1})_{11}} R_1 + \underbrace{(D_{23}D_{31} - D_{21}D_{33})}_{(\det D)\,(D^{-1})_{21}} R_2 + \underbrace{(D_{21}D_{32} - D_{22}D_{31})}_{(\det D)\, D^{-1}_{31}} R_3$$

$$= \det D\,[D_{11}R_1 + D_{12}R_2 + D_{13}R_3] = \sum_k (\det D)\, D_{1k} R_k \;\Big]$$

$$\vec{R}' = \underbrace{\det D(g) \cdot \check{D}(g)}\, \vec{R}$$

$\Rightarrow$ pseudovekt. reprezentace má otočené znaménko

u nevlastních rotací, zrcadlení a inverze

$\rightarrow \chi(C_\varphi) = 1 + 2\cos\varphi \quad , \quad \chi(S_\varphi) = 1 - 2\cos\varphi$

- fce $x^2, y^2, z^2, xy, yz, zx$ tvoří bázi reducibilní repr. grupy $O(3)$ a jejích podgrup

pro grupy $O(3)$, $SO(3)$, $I$ a $I_h$ se redukuje na 2 IR

1) jednorozm. s bází $x^2+y^2+z^2$ ~ s-orbitaly

2) pětirozm. s bází $\{2z^2-x^2-y^2, x^2-y^2, xy, yz, zx\}$ ~ d-orbitaly

pro menší grupy se redukují dále, pokud je přítomna 1 hlavní osa symetrie

pak báze jednotlivých repr. jsou $\{x^2+y^2\}$ a $\{z^2\}$ – triviální repr.

$\{x^2-y^2, xy\}$ a $\{xz, yz\}$ – obvykle dvourozm. repr., pokud je hlavní osa $C_n$ $n \geq 3$