Subdukované a indukované reprezentace

aneb vztah reprezentací grup a jejich podgrup

- směrem od grupy k podgrupě je to přímočaré (omezíme se na prvky podgrupy)
- opačným směrem o něco složitější, ale obecně lze z lib. repr. podgrupy vytvořit jistou repr. grupy.
- obecně nás budou zajímat subdukce a indukce z ireducibilních repr., čímž obecně dostaneme reducibilní reprezentace →
  → rozklad na ireducibilní
  - v ideálním případě bychom chtěli z ireducibilních repr. podgrupy či podgrup vytvářet přímo ireducibilní repr. grupy – to lze pro speciální grupy, které jsou direktním nebo semidirektním (polopřímým) součinem dvou svých podgrup, jejichž ired. repr. známe

---

Subdukované reprezentace

- mějme reprezentaci Γ grupy G danou např. maticemi $D(g)$ a nechť H je podgrupou grupy G, pak matice $D(h)$ pro $\forall h \in H$ tvoří tzv. <u>subdukovanou reprezentaci grupy H</u>, kterou značíme $\Gamma \downarrow H$ (příp. $g|_H$) a která je obecně reducibilní, i když Γ je ireducibilní
- pokud máme IR grupy G, řekněme Γ_G^μ, pak známe-li charaktery $\chi_H^\nu(h)$ IR podgrupy H, můžeme určit kolikrát se v subdukované repr. vyskytuje IR podgrupy H pomocí

$$a_\nu^{\mu\downarrow H} = \frac{1}{\#H} \sum_{h \in H} \chi_H^\nu(h)^* \chi_G^\mu(h)$$

kde $\chi_G^\mu(h)$ je charakter prvku $h \in H$ v IR Γ_G^μ grupy G

Př. $G = C_{3v}$, $H = \{E, \sigma_v\} \sim C_s$

H	E	σ_v	
A'	1	1	charaktery IR podgrupy H
A''	1	-1	
$A_1\downarrow H$	1	1	subdukované IR grupy C_{3v} na podgrupu H
$A_2\downarrow H$	1	-1	
$E\downarrow H$	2	0	

rozklady:

$A' = A_1\downarrow H$

$A'' = A_2\downarrow H$

$A' \oplus A'' = E\downarrow H$

tj. např.

$a_{A'}^{A_1\downarrow H} = 1$

$a_{A''}^{A_1\downarrow H} = 0$

$a_{A'}^{E\downarrow H} = 1$ ...

Indukované reprezentace pro konečné grupy

- mějme grupu G a její podgrupu H, G lze tedy rozložit na levé třídy $G = g_1H + g_2H + \dots + g_MH$, kde g_i lze volit libovolně z daných tříd,

  avšak položíme $g_1 = e$ (tedy první třída je H)

  index podgrupy H v G je $M = \frac{\# G}{\# H}$

- nechť $D_H(h)$ je lib. maticová repr. podgrupy H a nechť $\phi_1, \dots, \phi_d$ je báze této reprezentace (která je tedy d-rozměrná) – jde o bázi určitého invariantního ireduc. podprostoru při působení H, ne však obecně při působení G

  tj. $T(h)\phi_i = \sum_j \phi_j D_H(h)_{ji}$ pro $\forall h \in H$

- definujme formálně (tj. nebudeme zkoumat konkrétní případ, předpokládejme, že takto dostaneme lineárně nezávislé fce)

  $\phi_{ti} = T(g_t)\phi_i$, kde g_t definují levé třídy H v G, $t = 1, \dots, M$, $i = 1, \dots, d$

  ukážeme, že tyto fce tvoří bázi Md-rozměrné repr. grupy G, tj. že platí

$$T(g)\phi_{ti} = \sum_{sj} \phi_{sj} D_G(g)_{sj,ti}$$

- působením g postupně dostáváme

$$T(g)\phi_{ti} = T(gg_t)\phi_i = T(g_s)T(g_s^{-1}gg_t)\phi_i =$$

– neboť gg_t určitě náleží do nějaké levé třídy, řekněme $g_sH \Rightarrow g_s^{-1}gg_t \in H$

$$= T(g_s)\sum_j \phi_j D_H(g_s^{-1}gg_t)_{ji}$$

$$= \sum_j \phi_{sj} D_H(g_s^{-1}gg_t)_{ji}$$

a tedy $T(g)\phi_{ti}$ je lin. kombinací ϕ_{sj} a dokonce pouze pro taková s, pro něž platí $gg_t \in g_sH$ $\Rightarrow$ matici $D_G(g)$ dostaneme přidáním $\delta_{st}(g) \begin{cases} 1 & \text{pro } gg_t \in g_sH \\ 0 & \text{jindy} \end{cases}$

neboli

$$\boxed{D_G(g)_{sj,ti} = \delta_{st}(g) D_H(g_s^{-1}gg_t)_{ji}}$$

– toto je indukovaná repr. grupy G z repr. $D_H(h)$ podgrupy H, $D_G = D_H \uparrow G$

- snadno ověříme, že jde vskutku o reprezentaci grupy G

  neboť 1) pro $g = e$ dostaneme $g_t = g_s$ $\Rightarrow$ $D_G(e) = \mathbb{1}_{Md \times Md}$

2) mělo by též platit $D_G(g)D_G(g') = D_G(gg')$

rozepsání dostaneme

$$\sum_{rk} D_G(g)_{sj,rk}\, D_G(g')_{rk,ti} = \sum_{rk} \underbrace{\delta_{sr}(g)\,\delta_{rt}(g')}_{\substack{\parallel \\ 1 \text{ pokud } gg_r = g_s h \text{ pro } h\in H \\ g' g_t = g_r h' \text{ pro } h' \in H}} D_H(g_s^{-1} g g_r)_{jk}\, D_H(g_r^{-1} g' g_t)_{ki} =$$

$\Big\}\; gg'g_t = g_s \underbrace{hh'}_{\in H}$

$$= \delta_{st}(gg')\, D_H(g_s^{-1} gg' g_t)_{ji}$$

$$= D_G(gg')_{sj,ti}$$

- pokud je $D_H(h)$ unitární, pak též $D_G(g)$ je unitární, neboť

$$\left[D_G(g)^{-1}\right]_{sj,ti} = \delta_{st}(g^{-1})\, D_H(g_s^{-1} g^{-1} g_t)_{ji} \underset{\uparrow}{=} \delta_{ts}(g)\, D_H\left((g_t^{-1} g g_s)^{-1}\right)_{ji} =$$

unitarita D_H $\qquad\qquad$ $g^{-1} g_t = g_s h \Rightarrow g g_s = g_t \underbrace{h^{-1}}_{\in H}$

$$\overset{\downarrow}{=} \delta_{ts}(g)\, D_H(g_t^{-1} g g_s)^*_{ij} = D_G(g)^*_{ti,sj} = \left[D_G(g)^\dagger\right]_{sj,ti}$$

- pro charakter indukované repr. dostaneme

$$\chi_G(g) = \sum_{sj} \delta_{ss}(g)\, D_H(g_s^{-1} g g_s)_{jj} = \sum_s \delta_{ss}(g)\, \chi_H(g_s^{-1} g g_s)$$

- indukovaná repr. je obecně reducibilní, i když začneme s ireducibilní repr. Γ_H^ν podgrupy H, dostáváme rozklad

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{charakter indukované} \\ \text{repr. z IR } \Gamma_H^\nu}}{\chi^{\nu\uparrow G}(g)} = \sum_\mu a_\mu^{\nu\uparrow G} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{charaktery IR } \Gamma_G^\mu \text{ grupy G}}}{\chi_G^\mu(g)}$$

což můžeme též vyjádřit jako

nahradíme sumu přes H prvků g_s sumou přes prvky G s podmínkou $g'^{-1} g g' \in H$

$$\chi^{\nu\uparrow G}(g) = \sum_s \delta_{ss}(g)\, \chi_H^\nu(g_s^{-1} g g_s) \overset{\downarrow}{=} \underset{\uparrow}{\frac{1}{\#H}} \sum_{\substack{g' \in G \\ g'^{-1} g g' \in H}} \chi_H^\nu(g'^{-1} g g')$$

musíme dělit #H, neboť tolik různých g_s bychom mohli zvolit

- tedy $a_\mu^{\nu\uparrow G}$ nám říká, kolikrát se IR Γ_G^μ grupy G vyskytuje v indukované repr., kterou dostaneme z IR Γ_H^ν podgrupy H

- $a_\mu^{\nu\uparrow G}$ úzce souvisí s $a_\nu^{\mu\downarrow H}$, které jsme měli u rozkladu subdukované repr. podgrupy H, když jsme startovali s IR Γ_G^μ grupy G

viz Frobeniův reciproční teorém

Frobeniův reciproční teorém

víme

$$\chi_G^{\nu\uparrow G}(g) = \sum_s \delta_{ss}(g)\, \chi_H^{\nu}(g_s^{-1} g g_s)$$

zde suma přes $\forall g_s$ takové, že $g_s^{-1} g g_s \in H$

$$= \frac{1}{\# H} \sum_{\substack{g' \in G \\ g'^{-1} g g' \in H}} \chi_H^{\nu}(g'^{-1} g g')$$

neboť zde je tato suma přes celou grupu

- subdukovanou repr. i indukovanou můžeme rozložit na ireducibilní repr. vezmeme Γ_H^{ν} a Γ_G^{μ}, pak můžeme psát

$$\chi_G^{\nu\uparrow G}(g) = \sum_\mu a_\mu^{\nu\uparrow G} \chi_G^{\mu}(g) \quad \text{a} \quad \chi_H^{\mu\downarrow H}(h) = \sum_\nu a_\nu^{\mu\downarrow H} \chi_H^{\nu}(h)$$

- Frobeniův recipr. teorém říká:

Kolikrát se IR Γ_G^{μ} grupy G vyskytuje v rozkladu ~~indukované~~ repr. $\Gamma_G^{\nu\uparrow G}$, která je indukovanou repr. z IR Γ_H^{ν} podgrupy H, tolikrát se vyskytuje IR Γ_H^{ν} v rozkladu repr. $\Gamma^{\mu\downarrow H}$, která je subdukovanou repr. z IR Γ_G^{μ} grupy G, tj.

$$a_\mu^{\nu\uparrow G} = a_\nu^{\mu\downarrow H}$$

Dk.

$$a_\mu^{\nu\uparrow G} = \frac{1}{\# G} \sum_{g \in G} \chi_G^{\mu}(g)^* \frac{1}{\# H} \sum_{\substack{g' \in G \\ g'^{-1} g g' \in H}} \chi_H^{\nu}(g'^{-1} g g') =$$

substituce
$h = g'^{-1} g g' \in H$
$g = g' h g'^{-1}$

$$= \frac{1}{\# G} \frac{1}{\# H} \sum_{h \in H} \sum_{g' \in G} \chi_G^{\mu}(\underbrace{g' h g'^{-1}}_{h})^* \chi_H^{\nu}(h) =$$

$$\sum_{g' \in G} 1 \longrightarrow \quad = \frac{\cancel{\# G}}{\cancel{\# G}} \frac{1}{\# H} \sum_{h \in H} \chi_G^{\mu}(h)^* \chi_H^{\nu}(h) = a_\nu^{\mu\downarrow H}$$

$$a_\nu^{\mu\downarrow H} = \frac{1}{\# H} \sum_{h \in H} \chi_H^{\nu}(h)^* \chi_G^{\mu}(h)$$

a protože $a_\nu^{\mu\downarrow H}$ je reálné číslo

platí též