Přímý součin reprezentací

- motivace – atom helia (bez spinu)

$$H = -\frac{1}{2}\Delta_1 - \frac{1}{2}\Delta_2 - \frac{Z}{r_1} - \frac{Z}{r_2} + \frac{1}{|r_1 - r_2|} = H_1 + H_2 + V_{int}$$

- pokud by elektrony neinteragovaly → systém popsán součinem vlastních fcí H_1 a H_2 $\quad |\Psi\rangle = |k_1 l_1 m_1\rangle |k_2 l_2 m_2\rangle$

grupa symetrie (základní) $\quad SO(3) \otimes SO(3)$

pro dané $k_1 l_1$ a $k_2 l_2$ $\quad (2m_1+1)(2m_2+1)$ vlastních stavů tvořících IR této „velké" grupy

- pokud ale interagují, má celý systém symetrii pouze $SO(3)$ – musíme rotovat oba elektrony najednou, pak podprostor o $(2m_1+1)(2m_2+1)$ stavech už není ireducibilní (vůči $SO(3)$) a lze tedy rozložit na ired. inv. podpr. charakterizované celkovým impulsmomentem L

- obecně: mějme $\psi_j^{(\mu)}$ $j = 1, \dots d_\mu$ tvořící bázi IR $\Gamma^{(\mu)}$ grupy G, pro kterou při působení grupy G platí

$$U_g \psi_j^{(\mu)} = \sum_i \psi_i^{(\mu)} D_{ij}^{(\mu)}(g)$$

a druhou sadu $\varphi_l^{(\nu)}$, $l = 1, \dots d_\nu$ jako bázi IR $\Gamma^{(\nu)}$ téže grupy G, pro níž máme

$$U_g \varphi_l^{(\nu)} = \sum_k \varphi_k^{(\nu)} D_{kl}^{(\nu)}(g)$$

pak $\psi_j^{(\mu)}\varphi_l^{(\nu)}$ tvoří bázi nové (obecně reducibilní) reprezentace $\Gamma^{(\mu\times\nu)}$, které říkáme přímý (direktní, Kroneckerův) součin repr. $\Gamma^{(\mu)}$ a $\Gamma^{(\nu)}$ pro níž platí

$$U_g \psi_j^{(\mu)}\varphi_l^{(\nu)} = \sum_{ik} \psi_i^{(\mu)}\varphi_k^{(\nu)} D_{ij}^{(\mu)}(g)\, D_{kl}^{(\nu)}(g) =$$

$$= \sum_{ik} \psi_i^{(\mu)}\varphi_k^{(\nu)} D_{ik,jl}^{(\mu\times\nu)}(g)$$

kde matice $D^{(\mu\times\nu)}(g)$ je přímým součinem matic

$$D^{(\mu)} \otimes D^{(\nu)} = D^{(\mu\times\nu)} = \begin{pmatrix} D_{11}^{(\mu)} D^{(\nu)} & D_{12}^{(\mu)} D^{(\nu)} & \cdots \\ D_{21}^{(\mu)} D^{(\nu)} & \ddots & \\ \vdots & & D_{d_\mu d_\mu}^{(\mu)} D^{(\nu)} \end{pmatrix}$$

báze $\psi_j^{(\mu)}\varphi_l^{(\nu)}$ je řazena postupně $(\psi_1\varphi_1, \psi_1\varphi_2, \dots, \psi_1\varphi_{d_\nu}, \psi_2\varphi_1, \dots, \psi_{d_\mu}\varphi_{d_\nu})$

- že jde vskutku o repr. se lze přesvědčit přímo výpočtem $D_{ik,jl}^{(\mu\times\nu)}(g_1 g_2) = \sum_{rs} D_{ik,rs}^{(\mu\times\nu)}(g_1)\, D_{rs,jl}^{(\mu\times\nu)}(g_2)$, neboť platí $(A\otimes B)(A'\otimes B') = (AA')\otimes(BB')$

- charakter přímého součinu je dán jednoduše

$$\chi^{(\mu\times\nu)}(g) = \sum_{ik} D_{ik,ik}^{(\mu\times\nu)}(g) = \sum_i D_{ii}^{(\mu)}(g) \sum_k D_{kk}^{(\nu)}(g) = \chi^{(\mu)}(g)\,\chi^{(\nu)}(g)$$

- symetrické a antisymetrické součiny

- pokud je $\mu=\nu$ ale $\psi_j^{(\mu)}$ a $\varphi_l^{(\mu)}$ jsou lineárně nezávislé (ale příslušející stejné IR)

lze z jejich součinů vytvořit symetrické a antisym. fce

které se transformují mezi sebou $\Rightarrow$ $D^{(\mu\times\mu)}$ pro $d_\mu>1$ je vždy reducibilní

a lze zapsat jako přímý součet

maticově $$D^{(\mu)}\otimes D^{(\mu)} = \underbrace{\left[D^{(\mu)}\otimes D^{(\mu)}\right]}_{\text{symetrická část}} \oplus \underbrace{\left\{D^{(\mu)}\otimes D^{(\mu)}\right\}}_{\text{antisymetrická část}}$$

neboli symbolicky $$\Gamma^{(\mu)}\otimes\Gamma^{(\mu)} = \underbrace{\left[\Gamma^{(\mu)}\otimes\Gamma^{(\mu)}\right]}_{\Gamma^{[\mu\times\nu]}} \oplus \underbrace{\left\{\Gamma^{(\mu)}\otimes\Gamma^{(\mu)}\right\}}_{\Gamma^{\{\mu\times\nu\}}}$$

neboť sečtením a odečtením rovnic

$$O_g\left(\psi_j^{(\mu)}\varphi_l^{(\mu)}\right) = \sum_{ik}\psi_i^{(\mu)}\varphi_k^{(\mu)} D_{ij}^{(\mu)}(g)\, D_{kl}^{(\mu)}(g)$$

$$O_g\left(\psi_l^{(\mu)}\varphi_j^{(\mu)}\right) = \sum_{ik}\psi_i^{(\mu)}\varphi_k^{(\mu)} D_{il}^{(\mu)}(g)\, D_{kj}^{(\mu)}(g)$$

dostaneme (s využitím, že $D^{(\mu)}$ jsou pro ψ a φ stejné)

$$O_g\left(\psi_j^{(\mu)}\varphi_l^{(\mu)}+\psi_l^{(\mu)}\varphi_j^{(\mu)}\right) = \frac{1}{2}\sum_{ik}\left(\psi_i^{(\mu)}\varphi_k^{(\mu)}+\psi_k^{(\mu)}\varphi_i^{(\mu)}\right)\left[D_{ij}^{(\mu)}(g)\,D_{kl}^{(\mu)}(g)+D_{il}^{(\mu)}(g)\,D_{kj}^{(\mu)}(g)\right]$$

$$O_g\left(\psi_j^{(\mu)}\varphi_l^{(\mu)}-\psi_l^{(\mu)}\varphi_j^{(\mu)}\right) = \frac{1}{2}\sum_{ik}\left(\psi_i^{(\mu)}\varphi_k^{(\mu)}-\psi_k^{(\mu)}\varphi_i^{(\mu)}\right)\left[D_{ij}^{(\mu)}(g)\,D_{kl}^{(\mu)}(g)-D_{il}^{(\mu)}(g)\,D_{kj}^{(\mu)}(g)\right]$$

$[\Gamma^{(\mu)}\otimes\Gamma^{(\mu)}]$ je $\frac{1}{2}d_\mu(d_\mu+1)$-rozměrná repr.
$\{\Gamma^{(\mu)}\otimes\Gamma^{(\mu)}\}$ je $\frac{1}{2}d_\mu(d_\mu-1)$-rozměrná repr.
} obě opět též obecně reducibilní

pro jejich charaktery lze odvodit

$$\chi^{[\mu\times\nu]}(g) = \frac{1}{2}\left[\chi(g)^2+\chi(g^2)\right]$$

$$\chi^{\{\mu\times\nu\}}(g) = \frac{1}{2}\left[\chi(g)^2-\chi(g^2)\right]$$

- pro $\mu=\nu$ a $\varphi_i^{(\mu)}=\psi_i^{(\mu)}$ jsou antisym. kombinace nulové

$\Rightarrow$ jen $\frac{1}{2}d_\mu(d_\mu+1)$ nezávislých bázových fcí

$\Rightarrow$ automaticky symetrické repr. $\Gamma^{[\mu\times\nu]}$