Rozklad pří-ého součinu reprezentací $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ Clebschova-Gordonova řada, Clebschovy-Gordanovy koeficienty

- přímým použitím vzorců $$\chi^{(\mu\times\nu)}(g) = \chi^{(\mu)}(g)\,\chi^{(\nu)}(g)$$

a $$a_\sigma^{\mu\nu} = \frac{1}{\# G}\sum_g \chi^{(\sigma)}(g)^*\chi^{(\mu\times\nu)}(g)$$

dostaneme rozklad $$\Gamma^{(\mu\times\nu)} = \sum_\sigma \oplus\, a_\sigma^{\mu\nu}\,\Gamma^{(\sigma)} = \sum_\sigma \oplus\, (\mu\nu\sigma)\,\Gamma^{(\sigma)}$$

kterému se říká Clebschova-Gordonova řada

čísla $(\mu\nu\sigma)$ jsou jednoznačně dány pro libovolnou konečnou (Lieovu kompaktní) grupu např. pro C_{3v} máme

$\Gamma^{(\sigma)}$	E	$2C_3$	$3\sigma_v$
A_1	1	1	1
A_2	1	1	-1
E	2	-1	0

$\Rightarrow$

	$\Gamma^{(\mu\times\nu)}$	E	$2C_3$	$3\sigma_v$	
	$A_1\otimes A_1$	1	1	1	$= A_1$
	$A_1\otimes A_2$	1	1	-1	$= A_2$
	$A_1\otimes E$	2	-1	0	$= E$
	$A_2\otimes A_2$	1	1	1	$= A_1$
	$A_2\otimes E$	2	-1	0	$= E$
	$E\otimes E$	4	1	0	$= \underbrace{A_1\oplus A_2\oplus E}$
báze $\varphi_1\varphi_1,\ \varphi_1\varphi_2+\varphi_2\varphi_1,\ \varphi_2\varphi_2$ $\rightarrow$	$[E\otimes E]$	3	0	1	$= A_1\oplus E$
báze $\varphi_1\varphi_2-\varphi_2\varphi_1$ $\rightarrow$	$\{E\otimes E\}$	1	1	-1	$= A_2$

- fyzikálně zajímavější je ale nalezení báze, která by byla bází pro jednotlivé ireducibilní repr., tj. chtěli bychom přejít od $\varphi_j^{(\mu)}\varphi_\ell^{(\nu)}$ k bázi $\Psi_s^{(\sigma\lambda_\sigma)}$, $s=1,\dots d_\sigma$, $\lambda_\sigma=1,\dots,(\mu\nu\sigma)$, kde λ_σ čísluje jednotlivé ireducibilní inv. podprostory příslušející téže IR $\Gamma^{(\sigma)}$

- fce $\Psi_s^{(\sigma\lambda_\sigma)}$ musí být lin. kombinací $\varphi_j^{(\mu)}\varphi_\ell^{(\nu)}$ a naopak, tedy

$$\Psi_s^{(\sigma\lambda_\sigma)} = \sum_{j\ell}\varphi_j^{(\mu)}\varphi_\ell^{(\nu)}\underbrace{(\mu j,\nu\ell\,|\,\sigma\lambda_\sigma s)}$$

Clebschovy-Gordanovy koeficienty tvoří matici $d_\mu d_\nu \times d_\mu d_\nu$

- speciálně pro grupu rotací jsou často nazývány též Wignerovy koeficienty (ale někdy se liší ~~konst.~~ faktorem)

- Clebschovy-Gordanovy koeficienty nejsou jednoznačně určené, pokud $(\mu\nu\sigma)=1$ pro nějaké λ, pak jsou určeny až na fázový faktor $e^{i\omega}$, pro $(\mu\nu\lambda)>1$ až na unitární matici $(\mu\nu\lambda)\times(\mu\nu\lambda)$

Příklad na Clebschovy - Gordanovy koeficienty

- starý známý příklad H_3^+
  - báze 1s a 2s orbitalů ⇒
    ⇒ symetricky adoptovaná báze (viz strana 26)

    preznačme bázi takto

$$\psi_1^{A_1} = \frac{1}{\sqrt{3}}(\phi_1^{1s}+\phi_2^{1s}+\phi_3^{1s})$$ a podobně pro ϕ^{2s} záměnou $\psi \to \varphi$

$$\psi_1^{E} = \frac{1}{\sqrt{6}}(2\phi_1^{1s}-\phi_2^{1s}-\phi_3^{1s})$$

$$\psi_2^{E} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_2^{1s}-\phi_3^{1s})$$

- máme-li 2 elektrony (opět neuvažujeme spin a tedy ani Pauliho vylučovací princip) dostali bychom 36 kombinací $\psi_1^{A_1}(r_1)\psi_1^{A_1}(r_2), \dots, \varphi_2^{E}(r_1)\varphi_2^{E}(r_2)$

- uvažujme ~~...~~ podmnožinu této báze, a sice $\psi_1^E(r_1)\varphi_1^E(r_2), \dots, \psi_2^E(r_1)\varphi_2^E(r_2)$ která je dána tensor. součinem $\{\psi_1^E,\psi_2^E\}\otimes\{\varphi_1^E,\varphi_2^E\}$ → ta tvoří bázi jisté reducibilní repr. $E\otimes E$ grupy C_{3v}, pro niž jsme dostali Clebschovu - Gordanovu řadu $E\otimes E = A_1\oplus A_2\oplus E$ tj. $(EEA_1)=(EEA_2)=(EEE)=1$

- chtěli bychom přejít k bázi $\Psi_s^{(\lambda\tau_\lambda)} = \sum_{jl}\psi_j^E\varphi_l^E(Ej,El|\lambda\tau_\lambda s)$ v rozkladu C-G řady. ~~...~~ jejíž prvky přísluší jednotlivým IR to lze opět provést pomocí projekčních (symetrizačních) v případě konečných grup operátorů např.

$$P^{A_1}\psi_1^E\varphi_1^E = \frac{1}{\#G}\sum_g \overbrace{\chi^{A_1}(g)^*}^{1} O_g(\psi_1^E\varphi_1^E) = \frac{1}{6}\sum_g\sum_{jl}\psi_j^E\varphi_l^E D_{j1}^E(g)D_{l1}^E(g)$$

dosazením

$$= \frac{1}{6}\left[3\psi_1^E\varphi_1^E + 3\psi_2^E\varphi_2^E\right] \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\psi_1^E\varphi_1^E+\psi_2^E\varphi_2^E\right] = \Psi_1^{A_1}$$

$$\Rightarrow (E1,E1|A_1 1)=\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad (E2,E2|A_1 1)=\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad (E1,E2|A_1 1)=(E2,E1|A_1 1)=0$$

podobně $P^{A_2}\psi_1^E\varphi_1^E = 0$

$$P^{A_2}\psi_1^E\varphi_2^E \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_1^E\varphi_2^E-\psi_2^E\varphi_1^E)=\Psi_1^{A_2} \Rightarrow$$

$(E1E1,A_2 1)=0$ $\quad (E2E1|A_2 1)=-\frac{1}{\sqrt{2}}$

$(E1E2,A_2 1)=\frac{1}{\sqrt{2}}$ $\quad (E2E2|A_2 1)=0$

$$P^E\psi_1^E\varphi_1^E \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_1\varphi_1-\psi_2\varphi_2) = \Psi_1^E$$

$$P^E\psi_1^E\varphi_2^E \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_1\varphi_2+\psi_2\varphi_1) = \Psi_2^E$$