

Wignerov - Eckartův teorém

Věta: Necht A_r^s je ireducibilní tenzorový operátor na \mathcal{R} při působení grupy G na \mathcal{R} pomocí unit. operatorů $U(g), U(g)^\dagger$.

$$U(g) A_r^s U(g)^{-1} = \sum_t A_t^s D_{tr}^s(g)$$

potom maticové elementy

$$M = \int_{\mathcal{R}} d\tau \psi_k^{(m)*} A_r^s \varphi_l^{(n)}$$

mezi vektory $\psi_k^{(m)}$ a $\varphi_l^{(n)}$, které se transformují podle k -tého, resp. l -tého sloupce ireducibilních reprezentací Γ^m, Γ^n grupy G

lze spočítat pomocí

$$M = \sum_{\lambda_m} (s, r, \nu | \lambda_m k) \underbrace{(\psi^{(m)} | A^s | \varphi^{(n)})}_{h_{\lambda_m}^{(s, \nu, \lambda)}}$$

kde redubovaný maticový element $h_{\lambda_m}^{(s, \nu, \lambda)}$ nezávisí na r, l a k , ale závisí na λ_m , které přísluší ireduc. repr. Γ^m , pokud ~~je~~ v rozkladu $\Gamma^s \otimes \Gamma^\nu$ obsažena vícekrát.

Důk: Více, že pro inv. op. Ω platí

$$\int_{\mathcal{R}} d\tau \psi_k^{(m)*} \Omega \varphi_l^{(n)} = \delta_{mn} \delta_{kl} h^{(m)} \quad (*)$$

Vektory $A_r^s \varphi_l^\nu$ tvoří bázi přímého součinu reprezentací $\Gamma^s \otimes \Gamma^\nu$

$$\text{neboť} \quad U(g) A_r^s U(g) U(g)^{-1} \varphi_l^\nu = \sum_{t,i} A_t^s \varphi_i^\nu \underbrace{D_{tr}^s(g) D_{il}^\nu(g)}_{[D^s(g) \otimes D^\nu(g)]_{ti, r, l}}$$

a může je vyjádřit

$$A_r^s \varphi_l^\nu = \sum_{\sigma, \lambda_\sigma, s} (s, r, \nu | \sigma \lambda_\sigma k) \underbrace{\bar{\Psi}_s^{\sigma(\nu)} \lambda_\sigma}_{\text{tvoří báze ireduc. repr. } \Gamma^s}$$

Odtud již snadno dostaneme

$$M = \sum_{\sigma, \lambda_\sigma, s} (s, r, \nu | \sigma \lambda_\sigma k) \int_{\mathcal{R}} d\tau \psi_k^{(m)*} \bar{\Psi}_s^{\sigma(\nu)} \lambda_\sigma = \begin{matrix} \text{zde využijeme (*) pro} \\ \Omega = \mathbb{1} \\ \text{zvolíme soum přes } \sigma \text{ a } s \end{matrix}$$

$$= \sum_{\lambda_\sigma} (s, r, \nu | \lambda_\sigma k) \left(\frac{1}{d_m} \sum_j \int_{\mathcal{R}} d\tau \psi_j^{(m)*} \bar{\Psi}_j^{m(s, \nu)} \lambda_m \right) = \sum_{\lambda_\sigma} (s, r, \nu | \lambda_\sigma k) (\psi^{(m)} | A^s | \varphi^{(n)})_{\lambda_m}$$

zde jsou obkryta výběrová pravidla