Symetrická grupa S_n (grupa permutací) ~~symetrická grupa~~

~~Cvičení Rep. Charaktery reprezentací S_n a repr. S_n indukce~~

~~Úvod~~:

- S_n = grupa ∀ permutací n-prvkové množiny - prvky ~~očíslujeme~~ uspořádáme do chlívků očíslovaných $1, \dots, n$

  Pak ~~s~~ přemístění prvků lze zapsat jako $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ p_1 & p_2 & \dots & p_n \end{pmatrix}$ kde p_i je číslo chlívku objektu, který byl v i-tém chlívku

- Máme identickou permutaci (žádné přemístění) $e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix}$

  inverzní permutaci k $g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ p_1 & \dots & p_n \end{pmatrix} \to g^{-1} = \begin{pmatrix} p_1 & \dots & p_n \\ 1 & \dots & n \end{pmatrix}$ $\quad gg^{-1} = e$

  neboť složením dvou permutací dostaneme jinou permutaci

  $$g_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ p_1 & \dots & p_n \end{pmatrix}, \quad g_2 = \begin{pmatrix} p_1 & \dots & p_n \\ q_1 & \dots & q_n \end{pmatrix} \implies g_2 g_1 = \begin{pmatrix} 1 & \dots & n \\ q_1 & \dots & q_n \end{pmatrix}$$

- Řád grupy permutací je $n!$

- Cayleyho teorém: Každá konečná grupa řádu n je izomorfní nějaké podgrupě symetrické grupy S_n. (každému $h \in G$ přiřadíme $\begin{pmatrix} g_1 & g_2 & \dots & g_n \\ hg_1 & hg_2 & \dots & hg_n \end{pmatrix}$)

  $\implies$ v principu ~~by~~ by mělo stačit se zabývat pouze touto grupou, ale prakticky je to příliš těžkopádné

- Cykly - hledáme ∀ permutaci řetězce, např. $g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 6 & 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$ obsahuje cykly $(1 \to 2 \to 4 \to 1) = (124)$, $(3 \to 6 \to 3) = (36)$ a (5)

  tj. g lze zapsat jako $g = (124)(36)\cancel{(5)} = (241)(36) = (36)(124)$

  tj. nezáleží na pořadí ~~v~~ cyklů, ani na tom, kterým prvkem cyklus začneme

- Transpozice = permutace obsahující jen jeden cyklus délky 2, tj. $g = (ij)$

  - každý cyklus (permutace) lze vyjádřit jako součin transpozic

    např. $(123) = (13)(12)$ a obecně $(12 \dots n) = (1n) \dots (13)(12)$ - $n-1$ transpozic

  - jde-li permutace rozložit na sudý počet transpozic $\to$ sudá permutace

    na lichý počet $\to$ lichá permutace

    Chybí důkaz, že daná permutace se vždy rozloží na sudý (lichý) počet transpozic

  - sudé permutace tvoří podgrupu (alternující grupa) A_n řádu $n!/2$

- Třídy sdružených prvků - všechny permutace, které mají stejný počet cyklů stejné délky tvoří třídu sdruž. prvků

  zde se přehazují celé sloupce!

  nechť $g = \begin{pmatrix} 1 & \dots & n \\ p_1 & \dots & p_n \end{pmatrix}$ a $h = \begin{pmatrix} 1 & \dots & n \\ q_1 & \dots & q_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 & \dots & p_n \\ q_{p_1} & \dots & q_{p_n} \end{pmatrix}$ $\quad h^{-1} = \begin{pmatrix} q_1 & \dots & q_n \\ 1 & \dots & n \end{pmatrix}$ Hammermesh má chybu!

  zde se permutuje zvlášť každý řádek

  pokud $p_i = j$, pak j nahoře bude nahr. q_j a $p_i = j$ dole též $q_j = q_{p_i}$ $\implies hgh^{-1} = \begin{pmatrix} q_1 & \dots & q_n \\ q_{p_1} & \dots & q_{p_n} \end{pmatrix}$ neboli nahradíme horní řádek permutování dle h a dolní řádek též

  $\implies$ zachovávají se struktura cyklů, neboť ~~nahradí~~ permutuje-me-li horní a dolní řádek stejně, nemá to vliv na délku cyklů

  např. $g = (12)(345)$ $\quad h = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 1 & 5 & 2 \end{pmatrix}$

  $$hgh^{-1} = (43)(152) = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 & 5 & 2 \\ 3 & 4 & \underset{5}{\cancel{4}} & 2 & \underset{1}{\cancel{1}} \end{pmatrix} \leftarrow g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 4 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

Cvičení: Grupa permutací

1) Dokažte pravidlo pro rozklad cyklu (nebo obráceně sloučení cyklů, které mají jeden společný prvek)

(*) $$(a \dots b\; c\; d \dots e) = (a \dots b\; c)(c\; d \dots e)$$

Řešení: ~~...~~ Přímým rozepsáním 2 permutací na pravé straně

$$\begin{pmatrix} a \dots b\; d \dots e\; c \\ \dots b\; c\; d \dots e\; a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \dots b\; c\; d \dots e \\ a \dots b\; d \dots e\; c \end{pmatrix} = (a \dots b\; c\; d \dots e) \quad \checkmark$$

2) Dokažte, že lib. permutaci lze ~~rozložit~~ zapsat jako součin transpozic typu $(1\,2), (2\,3), \dots (n{-}1\; n)$, tj. typu $(i\; i{+}1)$, $i = 1, \dots, n-1$

Řešení: 1) Pomocí pravidla (*) lze libovolný cyklus rozložit na transpozice

(např. $(2\,4\,1\,5) = (2\,4)(4\,1)(1\,5) = (2\,4)(1\,4)(1\,5)$)

takže stačí najít rozklad transpozice $(j\; j{+}k)$, kde $k > 1$ a $j+k \leq n$

To lze ~~indukcí~~ postupně takto: $(j\; j{+}k) = (j\; j{+}k{-}1)(j{+}k{-}1\; j{+}k)\cdot(j\; j{+}k{-}1)$

neboť jde o sdružení, tj. záměnu $j+k-1$ číslem j

a pokračujeme s $(j\; j{+}k{-}1)$, $(j\; j{+}k{-}2)$ .... až dostaneme k transpozici $(j\; j{+}1)$.

Všimněme si ještě, že budeme dostávat vedle sebe ~~...~~ např. transpozice

$$(j{+}k{-}2\; j{+}k{-}1)(j\; j{+}k{-}2)(j{+}k{-}1\; j{+}k)(j\; j{+}k{-}2)(j{+}k{-}2\; j{+}k{-}1)$$

tyto lze přehodit a zrušit s

$\Rightarrow$

$$(j\; j{+}k) = (j\; j{+}1)(j{+}1\; j{+}2) \dots (j{+}k{-}1\; j{+}k)(j{+}k{-}2\; j{+}k{-}1)(j{+}k{-}3\; j{+}k{-}2) \dots (j\; j{+}1)$$

(např. $(2\,5) = (2\,3)(3\,4)(4\,5)(3\,4)(2\,3) = (2\,3\,4\,5)(4\,3\,2)$)

2) z příkladu je patrné, že stačí ukázat, že $(j\; j{+}k) = (j\; j{+}1 \dots j{+}k)(j{+}k{-}1 \dots j)$

což je zřejmé z rozepsání

$$(j\; j{+}k) = \left\{\begin{matrix} 1 \dots j{-}1 & j & j{+}1 \dots & j{+}k{-}1 & j{+}k \dots & n \\ 1 \dots j{-}1 & j{+}k{-}1 & j \dots & j{+}k{-}2 & j{+}k \dots & n \\ 1 \dots j{-}1 & j{+}k & j{+}1 \dots & j{+}k{-}1 & j \dots & n \end{matrix}\right\}$$

3) Určete ~~Dokažte, že~~ počet prvků třídy sdruž. prvků, která je charakterizována rozkladem $(\nu) = (1^{\nu_1}, 2^{\nu_2}, \dots, n^{\nu_n})$.

Řešení

$$\# C_{(\nu)} = \frac{n!}{1^{\nu_1}\nu_1!\; 2^{\nu_2}\nu_2! \dots n^{\nu_n}\nu_n!}$$

neboť cykly můžou být permutovány $\Rightarrow$ faktory $\nu_i!$ a též cykleny $\Rightarrow i^{\nu_i}$

a speciálně pro grupu S_4:

Cvičení: Grupa permutací (pokračování)

3) pro S_4: cykly

cykly	počet	prvky	T_d
(1^4)	$\#C_{(1^4)} = \frac{4!}{1^4\,4!} = 1$	- jednotkový prvek	E
$(1^2 2)$	$\#C_{(1^2 2)} = \frac{4!}{1^2\,2!\,2^1\,1!} = 6$	(12), (13), (14), (23), (24), (34)	$6\sigma_d$
$(1^1 3^1)$	$\#C_{(13)} = \frac{4!}{3} = 8$	(123), (124), (134), (213), (214), (234), (314), (324)	$8C_3$
(2^2)	$\#C_{(2^2)} = \frac{4!}{2^2\,2!} = 3$	(12)(34), (13)(24), (14)(23)	$3S_4$
(4^1)	$\#C_{(4)} = \frac{4!}{4^1 1!} = 6$	(1234), (1243), (1324), (1342), (1423), (1432)	$6C_2$

4) Ukažte, že grupa S_n je generována 2 permutacemi (12) a $(12\ldots n)$

Řešení: stačí vygenerovat transpozice $(i\ i{+}1)$.

Protože $(12\ldots n)^{-1} = (12\ldots n)^{n-1}$, tj $(12\ldots n)$ generuje svoji inverzi,

můžeme postupně z (12) generovat (23), (34) ... pomocí sdružení

např. $(12\ldots n)(34)(12\ldots n)^{-1} = (45)$ ...

obecně libovolný cyklus na délku cyklu je identita (zřejmé přímým rozepsáním - jen posun)

a tedy $\underbrace{(ab\ldots)}_{k}{}^{-1}(ab\ldots)^{k-1} = (ab\ldots)^k = 1$