Youngovo schéma, Youngova tabulka, Yamanouchiho symbol

- **Cyklická struktura** permutace skládající se z ν_1 cyklů délky 1, ν_2 — " — 2, ⋮, ν_n — " — n (maximálně 1)

  je symbol $(\nu) = (1^{\nu_1}, 2^{\nu_2}, \dots n^{\nu_n})$

  - charakterizuje třídy, platí
  $$\nu_1 + 2\nu_2 + 3\nu_3 \dots + n\nu_n = n \quad \rightarrow \text{ některá } \nu_i \text{ vždy nulová}$$

- ~~[illegible]~~

- \#ireduc. repr = \# tříd, avšak k označení ired. repr. se obvykle používá jiných symbolů, a sice každé cykl. struktuře (ν) je jednoznačně přiřazena n-tice čísel $[\lambda] = [\lambda_1, \dots \lambda_n]$ vztahy

$$\lambda_k = \sum_{j=k}^{n} \nu_j, \quad k = 1, \dots, n \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=1}^{n} \lambda_k = n$$
, tj. $[\lambda]$ je rozklad čísla n

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n \geq 0$$

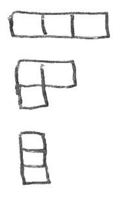
$$(\lambda_1 = \nu_1 + \nu_2 + \dots + \nu_n, \ \lambda_2 = \nu_2 + \nu_3 \dots + \nu_n \dots) \quad \Rightarrow \quad \nu_i = \lambda_i - \lambda_{i+1} \text{ pro } i = 1, \dots n-1, \quad \nu_n = \lambda_n$$

.. v rozkladu $[\lambda]$ se obvykle vynechávají nuly

$\Rightarrow$ každému rozkladu $[\lambda]$ čísla n odpovídá jedna třída sdruž. prvků a tedy též jedna ireduc. repr. $D^{[\lambda]}$ grupy S_n a lze ho graficky znázornit pomocí **Youngova schématu** (n buněk uspořádaných do řádků ~~[illegible]~~ pod sebou o délkách $\lambda_1, \lambda_2 \dots \lambda_r$)

Pro S_3 např. dostaneme

standardní uspořádání $\nu_1 \downarrow \nu$



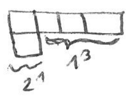
$[3] \longleftrightarrow$ □□□ $\longleftrightarrow (1^3)$

$[21] \longleftrightarrow$ □□/□ $\longleftrightarrow (1^1 2^1)$

$[1^3] \longleftrightarrow$ □/□/□ $\longleftrightarrow (3^1)$

třídy sdruž. prvků

obecně „~~[illegible]~~" Young. schéma odpovídající struktuře ~~[illegible]~~ třídy sdruž. prvků, dostaneme kreslením pozadu ~~[illegible]~~ sloupečků dané délky o počtu ν_i



$[41] \longleftrightarrow$ $\underbrace{}_{2^1}$ $\underbrace{}_{1^3}$ $\longleftrightarrow (1^3 2^1)$

$\Rightarrow$ počet ~~[illegible]~~ ireduc. repr. je dán počtem možných rozkladů čísla n do $[\lambda_1, \lambda_2 \dots \lambda_r]$, kde $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_r > 0$ $\quad \sum \lambda_i = n$

- dosud není znám vzorec pro tento počet

- dimenze $d^{[\lambda]}$ ired. repr. $D^{[\lambda]}$ je dána počtem tzv. **standardních Youngových tabulek** = Young. schéma vyplněné čísly $1, \dots, n$ tak, že v každém řádku, resp. sloupci čísla rostou zleva doprava, resp. shora dolů.

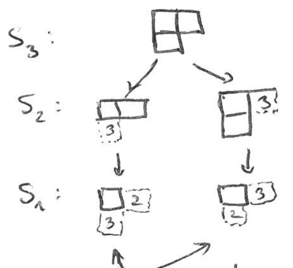
př. S_3

~~[illegible]~~ slovníkové uspořádání →

$$
\left.
\begin{array}{lll}
[3] \longleftrightarrow \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&2&3\\\hline\end{array} & \Longrightarrow & d^{[3]} = 1 \\[1em]
[21] \longleftrightarrow \begin{array}{|c|c|}\hline 1&2\\\hline 3&\\\cline{1-1}\end{array} < \begin{array}{|c|c|}\hline 1&3\\\hline 2&\\\cline{1-1}\end{array} & \Longrightarrow & d^{[21]} = 2 \\[1em]
[1^3] \longleftrightarrow \begin{array}{|c|}\hline 1\\\hline 2\\\hline 3\\\hline\end{array} & \Longrightarrow & d^{[1^3]} = 1
\end{array}
\right\}
\begin{array}{l} A_1 \\ E \text{ v souladu s } C_{3v} \simeq S_3 \\ A_2 \end{array}
$$

- toto souvisí jednak s výpočtem charakterů pro jednotk. prvek (1^n) (viz později) a jednak s rozkladem subdukovaných repr. z S_n na S_{n-1}, pak na S_{n-2} ... S_1, neboť platí, že omezíme-li se v S_n na podgrupu $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n-1 & n \\ p_1 & p_2 & \dots & p_{n-1} & n \end{pmatrix} \sim S_{n-1} \subset S_n$ pak <u>ireduc. repr. S_n odp. Young. schématu $[\lambda]$ subdukovaná na S_{n-1}</u> je <u>direktním součtem ired. repr. S_{n-1} odpovídajících Young. schématům vzniklých z $[\lambda]$ oddělením jednoho čtverečku všemi možnými způsoby</u>, tak, aby vzniklo výsledné schéma bylo vskutku Youngovo

Př.



→ 2 možné odebrání odpovídají 2 možným výskytům 3 ve standardní Young. tabulce pro schéma $\begin{array}{|c|c|}\hline & \\\hline & \\\cline{1-1}\end{array}$

už jednorozměrné repr. $\Rightarrow D^{[21]}$ je 2-rozměrná

$\Longrightarrow$ z ~~[illegible]~~ tohoto řetězce subdukcí lze vytušit, že každé standardní Y. tabulce odpovídá právě jeden vektor báze příslušné repr. $D^{[\lambda]}$ (~~[illegible]~~ který je též vektorem báze některé ireduc. repr. v rozkladech subdukovaných repr.)

→ k jejich označení se obvykle používá tzv. <u>Yamanouchiho symbolů</u> $\{r\} = \{r_n, r_{n-1}, \dots r_2, r_1\}$ kde r_i udává číslo řádku, ve kterém se nachází číslo i ve stand. Y. tab.

Př. $\begin{array}{|c|c|}\hline 1&2\\\hline 3&\\\cline{1-1}\end{array} \longleftrightarrow \{2,1,1\}$ $\quad$ $\begin{array}{|c|c|}\hline 1&3\\\hline 2&\\\cline{1-1}\end{array} \longleftrightarrow \{1,2,1\}$

- lze ukázat, že <u>dim. ired. repr. $D^{[\lambda]}$</u> je pro $[\lambda] = [\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_r]$

$$\boxed{d^{[\lambda]} = n! \, \frac{\prod_{i<k} (l_i - l_k)}{l_1! \, l_2! \dots l_r!}} \qquad l_i = \lambda_i + r - i \, , \quad i = 1, \dots r$$

Př. $d^{[21]} = 3! \, \dfrac{2}{3! \, 1!} = 2$ $\qquad$ $d^{[3]} = 3! \, \dfrac{1}{3!} = 1$ $\qquad$ $d^{[1^3]} = 3! \, \dfrac{1 \cdot 2 \cdot 1}{3! \, 2! \, 1!} = 1$

$r=2$; $\lambda_1 = 2$, $l_1 = 2+2-1 = 3$; $\lambda_2 = 1$, $l_2 = 1+2-2 = 1$

$r=1$; $\lambda_1 = 3$; $l_1 = 3$

$r=3$; $\lambda_1 = 1$, $l_1 = 3$; $\lambda_2 = 1$, $l_2 = 2$; $\lambda_3 = 1$, $l_3 = 1$

Hák, háková tabulka, hákové pravidlo pro dimenzi, charaktery ir. repr. S_n

délka háku z políčka (i,j)

- ~~Hák~~ h_{ij} = počet políček v Young. schématu napravo a dolů od j-tého políčka v i-tém řádku ~~(bez ...)~~ +1 za toto políčko

- Young. schéma vyplněné ~~...~~ délkami háků se nazývá háková tabulka (diagram)

Př. $\begin{array}{|c|c|}\hline 3 & 1 \\ \hline 1 \\ \cline{1-1}\end{array}$ $\quad \begin{array}{|c|c|c|}\hline 3 & 2 & 1 \\ \hline\end{array}$ $\quad \begin{array}{|c|}\hline 3 \\ \hline 2 \\ \hline 1 \\ \hline\end{array}$ $\quad \begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline 8 & 5 & 4 & 2 & 1 \\ \hline 5 & 2 & 1 \\ \cline{1-3} 2 \\ \cline{1-1} 1 \\ \cline{1-1}\end{array}$

- dimenzi ired. repr. $D^{[\lambda]}$ grupy S_n lze vyjádřit pomocí hákového pravidla

taktо $$d^{[\lambda]} = \frac{n!}{\prod_{i,j} h_{ij}}$$

$(h_{i1} = \lambda_i + r - i = l_i)$

Př. S_3 $\quad d^{[3]} = \frac{3!}{3\cdot 2} = 1$

$d^{[2,1]} = \frac{3!}{3} = 2$

$d^{[1^3]} = \frac{3!}{3\cdot 2} = 1$

- Charaktery ireduc. repr. S_n pomocí háků (viz Coleman: Adv. Quant. Chem 4, 83) 1968

  - označme první sloupec hákové tabulky jako
  $$D = |h_{11}\ h_{21} \dots h_{r1}| = |h_1\ h_2 \dots h_r|$$
  a zavedeme pravidla 1) $D = 0$ pokud lib. $h_i < 0$ nebo pokud $h_i = h_j$ pro nějaké i,j

  2) D změní znaménko, pokud přehodíme lib. h_i a h_j

  3) ~~...~~ $D_0 = |r-1\ r-2 \dots 2\ 1\ 0| = 1$

  4) „násobení" číslem μ
  $$\mu D = |h_1-\mu\ h_2 \dots h_r| + |h_1\ h_2-\mu\ h_3 \dots h_r| + \dots + |h_1 h_2 \dots h_r-\mu|$$

  - nyní chceme-li spočítat charakter třídy $(\nu) = (1^{\nu_1}, 2^{\nu_2}, \dots, n^{\nu_n})$, násobíme postupně ν_n-krát n, ν_{n-1} $n-1$, … ν_1-krát 1 a postupně zjednodušujeme až na D_0

  $\rightarrow$ dostaneme tak charakter $\chi^{[\lambda]}(\nu)$

Př. charaktery S_4:

	S_4	1 (1^4)	6 $(1^2,2)$	8 $(1,3)$	3 (2^2)	6 (4)
$D=\lvert 4\rvert$ ←	$\chi^{[4]}$	1	1	1	1	1
$D=\lvert 41\rvert$ ←	$\chi^{[3,1]}$	3	1	0	−1	−1
$D=\lvert 32\rvert$	$\chi^{[2,2]}$	2	0	−1	2	0
$D=\lvert 421\rvert$	$\chi^{[2,1^2]}$	3	−1	0	−1	1
$D=\lvert 4321\rvert$	$\chi^{[1^4]}$	1	−1	1	1	−1

$D = |41|$ $\quad 4D = -|10| = -1$

$3D = 0$

$2D = |21|$

$2^2D = -1$ $\quad 1^2(2D) = |10| = 1$

$1D = |31| + |40|$

$1^2D = |21| + 2|30|$

$1^3D = 3|20|$ $\quad 1^4D = 3|10|$

$D = |32|$ $\quad 2D = -|21| + |30|$

$1D = |31|$ $\quad 1^2D = |21| + |30|$

$D = |421|$ $\quad 2D = -|410|$

$1D = |321| + |420|$

$1^2D = |320| + |320| + |410|$

$1^3D = 3|310|$

$1^4D = 3$

$D = |4321|$ $\quad 3D = |4210|$ $\quad 1(2D) = -|4210|$

$2D = -|4310|$

Maticové reprezentace symetrické grupy (tzv. ortogonální repr.)

- odvozeno Alfredem Youngem na začátku 20. století

pro transpozice $(i\ i{+}1)$ grupy S_n lze zkonstruovat ~~mat~~ matice ired. repr. příslušné Young. schématu $[\lambda]$ následovně:

1) zkonstruuj standardní Young. tabulky pro $[\lambda]$ ve vzestupném pořadí (Yamanouchi sestupně)
   $i, i+1 = j$ se ~~vy~~ vyskytují v každé tabulce
   přičemž nastává jedna z možností
   a) i a j ve stejném řádku
   b) i a j ve stejném sloupci
   c) ani a), ani b), avšak i a j lze prohodit a dostaneme opět YT

2) čísluj řádky a sloupce matice YT příp. Yamanouchiho symboly
   a vyplň ji následovně pro (ij)
   a) pro YT, kde ij jsou ve stejném řádku, vyplň 1 na diagonálu a nuly jinde
   b) stejný sloupec $\rightarrow$ -1 na diagonálu
   c) z ~~do~~ průsečíků 2 ~~stejných~~ řádků a 2 sloupců označených YT, ve kterých i a j neleží ve stejném řádu či sloupci a jsou v YT prohozeny vyplň hodnoty

$$\begin{pmatrix} -\rho & \sqrt{1-\rho^2} \\ \sqrt{1-\rho^2} & \rho \end{pmatrix}$$

kde ρ^{-1} je počet kroků z políčka i do j (délka háku -1)

Př. 3-rozm. repr. S_4 pro $[\lambda] = [3,1]$

1) $\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 4 & & \end{array}$ $\quad \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 4 \\ 3 & & \end{array}$ $\quad \begin{array}{ccc} 1 & 3 & 4 \\ 2 & & \end{array}$

$\{2,1,1,1\}$ $\quad \{1,2,1,1\}$ $\quad \{1,1,2,1\}$

2) pro $P = (12)$

$$D^{[3,1]}(12) = \begin{array}{c} \{2,1,1,1\} \\ \{1,2,1,1\} \\ \{1,1,2,1\} \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$D^{[3,1]}(23) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \sqrt{\frac{3}{4}} \\ 0 & \sqrt{\frac{3}{4}} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$D^{[3,1]}(34) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{\sqrt{8}}{3} & 0 \\ \frac{\sqrt{8}}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- „obhajoba" větvícího pravidla pro subdukované repr. podgrupy S_{n-1}
  - omezíme-li ir. repr $[\lambda]$ na S_{n-1} vynecháním posledního prvku
    (tj. S_{n-1} je generována transp. $(12), (23), \dots (n{-}2\ n{-}1)$)
  - díky vhodnému (Youngovu) uspořádání YT a Yamanouchiho symbolů
    odpovídá odebrání čísla n z YT odebrání prvního prvku Yamanouchiho symbolu