Matematické struktury za Lieovými grupami

Def: Topologický prostor je množina X s kolekcí τ podmnožin X (nazývané topologie na X) splňující následující axiomy:

1) $\emptyset \in \tau$, $X \in \tau$
2) Sjednocení libovolného počtu množin z τ leží v τ
3) Průnik konečného počtu množin v τ leží v τ

Množiny z τ se nazývají otevřené, jejich doplňky v X uzavřené
($\Rightarrow$ $\emptyset$ a X jsou obojí)

Další pojmy z topologie:

spojitost: zobrazení $\phi : (X_1, \tau_1) \to (X_2, \tau_2)$ nazveme spojité, pokud vzor každé otevřené množiny v X_2 je otevřená množina v X_1.

okolí: Okolí bodu $x \in (X, \tau)$ je podmnožina X, jejíž otevřená podmnožina obsahuje x
tj. $U(x)$ je okolím x, pokud $\exists\, \mathcal{O} \in \tau : x \in \mathcal{O}$ a $\mathcal{O} \subset U(x)$

spojitost v bodě: ϕ je spojité v $x \in (X_1, \tau_1)$, pokud pro $\forall$ okolí $U_2(\phi(x)) \subset X_2$ $\exists\, U(x) \subset X_1$ takové, že $\phi(U(x)) \subseteq U_2(\phi(x))$.

$\Rightarrow$ ekvivalentní definice spojitosti: ϕ je spojité, pokud je spojité v každém bodě $x \in X_1$

homeomorfismus: zobrazení $\phi : (X_1, \tau_1) \to (X_2, \tau_2)$, které je prosté, spojité a jehož inverzní zobrazení $\phi^{-1} : \phi(X_1) \to X_1$ je též spojité.
- pokud existuje, jsou (X_1, τ_1) a (X_2, τ_2) homeomorfní $\Rightarrow$ třídy ekvivalence topologických prostorů

vnitřek množiny: největší otevřená ~~množina~~ podmnožina
uzávěr množiny: nejmenší uzavřená podmnožina
kompaktnost: Kompaktní množina M je podmnožina (X, τ) taková, že z každého jejího pokrytí otevřenými množinami ($M \subset \bigcup_{S \in D} S$, kde $D \subset \tau$) lze vybrat konečné podpokrytí ($D_0 \subset D$, konečný počet otevř. množin)
(v euklidovských prostorech jde o omezené a uzavřené množiny)
Je-li M celý topologický prostor, jde pak o kompaktní prostor.
lokální kompaktnost: Top. prostor je lokálně kompaktní, pokud má jeho každý bod kompaktní okolí.
- spojitý obraz kompaktní množiny je kompaktní

Terminologická poznámka:
řecky ὁμός (homos) = společný, stejný $\Rightarrow$ homomorfismus, homomorfní = mající stejnou strukturu (v algebraickém smyslu)

prakticky totéž {
ὅμοιος (homoios) = podobný, rovný (též rovnoprávný apod.) $\Rightarrow$ homeomorfismus, homeomorfní = mající podobný tvar (v topologickém smyslu)
ἴσος (isos) = stejný, rovný $\Rightarrow$ izomorfní = mající stejnou strukturu i obsah, tvar (v algebraickém i množinovém smyslu)
}

Matematické struktury za Lieovými grupami

Def: <u>Topologická varieta dimenze n</u> je topologický prostor, který je Hausdorffův ~~separabilní~~, má spočetnou bázi a je lokálně homeomorfní s Euklidovským prostorem (tj. ke každému bodu x existuje okolí homeomorfní s otevřenou množinou v $\mathbb{R}^n$ se standardní topologií)

- dimenze je jednoznačná
- každá top. varieta je lokálně kompaktní

<u>Hausdorffův prostor</u> je topol. prostor (X, τ), pokud pro $\forall x, y \in X$, $\exists U(x)$ a $V(y)$, pro které platí $U(x) \cap V(x)$

<u>báze B topologického prostoru</u> X je kolekce otevřených množin takových, že každá otevřená množina v X může být zapsána jako sjednocení množin z B

<u>Př.</u> $\mathbb{R}$ má spočetnou bázi otevřených množin (intervalů) se velikostmi a středy danými racionálními čísly $\Rightarrow$ i $\mathbb{R}^n$ má spočetnou bázi

- homeomorfismus otevřeného okolí x do $\mathbb{R}^n$ se nazývá <u>mapa</u> a jejich kolekce je <u>atlas</u>, pokud pokrývají celý prostor

Def. <u>Diferencovatelná varieta třídy C^k dimenze n</u> je topol. varieta X dimenze n, pro kterou má zobrazení $\phi_i \circ \phi_j^{-1} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ na $\phi_j(U_i \cap U_j)$ spojité derivace až do řádu k včetně.

(U_i, ϕ_i) jsou mapy na X a $\phi_i \circ \phi_j^{-1}$ je přechodová mapa (transition map)

<u>Hladká varieta</u> je dif. varieta třídy C^∞.

<u>Analytická varieta</u> je d. varieta třídy C^∞ s podmínkou, že $\phi_i \circ \phi_j^{-1}$ je analytické zobrazení

(Taylorův rozvoj je absolutně konvergentní na určitém otevřeném okolí)

~~Def~~

<u>souvislost</u>: <u>Množina</u> $S \subset (X, \tau)$ je souvislá, pokud <u>neexistují</u> <u>neprázdné</u> <u>otevřené</u> množiny A a $B \in \tau$ takové, že

$$S = A \cup B \quad a \quad A \cap B = \emptyset$$

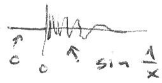
(tj. S není tvořena dvěma oddělenými otevřenými množinami)

<u>Topologický prostor je souvislý</u>, je-li svou vlastní souvislou podmnožinou.

(Př. SO(3) souvislý, O(3) nesouvislý – 2 komponenty, každá je zároveň otevřená i uzavřená množina ⇒ celý prostor je sjednocení 2 otevřených množin)

<u>Komponenta souvislosti</u> množiny $S \subset X$ je každá její maximální souvislá podmnožina.

<u>Obloukově souvislý</u> ~~...~~ <u>prostor</u> je top. prostor, jehož každé dva body lze spojit spojitým obloukem, tj. pro $\forall x, y \in X$ $\exists$ spojité zobrazení $\gamma : [0,1]$ se stand. topologií z R $\to (X, \tau)$ takové, že $\gamma(0) = x$ a $\gamma(1) = y$

(není totéž co souvislý prostor, obloukově souvislý je vždy souvislý, ale ne obráceně $\exists$, 

)

Top. prostor X je <u>lokálně souvislý v x</u>, pokud pro každou otevřenou množinu $V : x \in V$ existuje souvislá otevřená množina $U : x \in U \subset V$

Top. prostor je <u>lokálně souvislý</u>, je-li lok. souvislý v každém bodě.

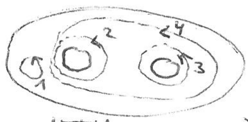
<u>jednoduše souvislý</u>: Top. prostor je <u>jednoduše souvislý</u>, pokud je obloukově souvislý a každý oblouk (křivka) mezi dvěma body lze převést na lib. jiný oblouk mezi těmito body, neboli každý uzavřený oblouk (spojité zobrazení $\gamma : S^1 \to X$) může být smrsknut do bodu, tj. $\exists$ spojité zobrazení $\phi : D^2$ (jednotkový disk v E^2) $\to X$ takové, že

$$\phi \restriction S^1 = \gamma \quad \text{(restrikce } \phi \text{ na } S^1 \text{ dává } \gamma)$$

[souvisí s pojmy homotopie (spojité deformace prostorů a zobrazení mezi nimi na sebe)

a fundamentální grupy (grupa tříd ekvivalence uzavřených oblouků v top. prostoru s operací skládání uzavř. oblouků

4 typy smyček + jejich násobky a různá ~~...~~ vícenásobná navíjení



~~...~~]

<u>pokrývací prostor</u>

Lieova grupa

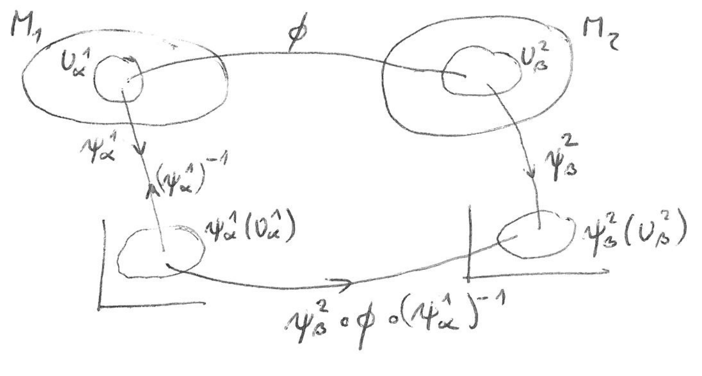
- jde o speciální případ spojité grupy, přesněji topologické grupy, která má navic ^vlastnosti diferencovatelné variety
- v literatuře lze najít mnoho definic a přístupů právě kvůli ~~[illegible]~~ specifické kombinaci algebraických a analytických struktur a při výkladu záleží na tom, z čeho se vychází a k čemu Lieovy grupy vlastně potřebujeme
  - fyzikové často používají jistou „pracovní" definici, většinou v termínech matic (lineární Lieovy grupy) či operátorů, neboť ty jsou izomorfní velké třídě fyzikálně zajímavých Lieových grup (ne však všechny fyzikálně zajímavé Lieovy grupy jsou izomorfní maticovým grupám, ~~[illegible]~~ např. grupa transformací, které neměni Einst. rovnice
  - jde totiž o věrné reprezentace abstr. LG na vektorových prostorech, ~~[illegible]~~ ať už konečně rozměrných či nekonečně rozměrných (např. Hilbertových)

Př. viz ilustrace vztahů mezi abstraktní grupou a její maticovými realizacemi

Def: Topologická grupa G je topologický prostor, který je zároveň grupou a navíc zobrazení $\phi : G \times G \to G$, $\phi : (a,b) \mapsto ab$, $i : G \to G$, $i : a \mapsto a^{-1}$ odpovídající grupové operaci a inverzi jsou spojitá.

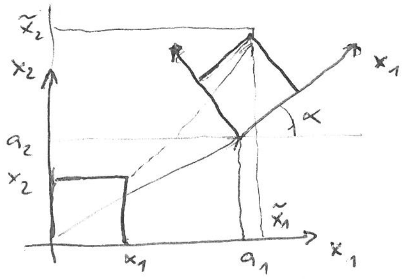
Def: Reálná Lieova grupa je topologická grupa, která je zároveň reálnou hladkou varietou a zobrazení ϕ a i jsou navíc hladká zobrazení (někdy ~~[illegible]~~ se požaduje silnější analytičnost)

Zobrazení $\phi : M_1 \to M_2$ mezi dvěma hladkými varietami je hladké, pokud je spojité a zobrazení $\psi^2_\beta \circ \phi \circ (\psi^1_\alpha)^{-1}$ pro ~~[illegible]~~ všechny mapy $(U^1_\alpha, \psi^1_\alpha)$ na M_1 a $(U^2_\beta, \psi^2_\beta)$ na M_2 je hladké zobrazení z $\mathbb{R}^{n_1}$ do $\mathbb{R}^{n_2}$



Př. Grupa transformací Euklidovské roviny, které zachovávají vzdálenosti a orientaci

$ISO(2)$ = grupa přemístění v rovině daných transformacemi



$$\tilde{x}_1 = x_1 \cos\alpha - x_2 \sin\alpha + a_1$$

$$\tilde{x}_2 = x_1 \sin\alpha + x_2 \cos\alpha + a_2$$

$$\tilde{x} = R(\alpha)\, x + a$$

- jde o 3-parametrickou Lieovu grupu - každý prvek závisí na (α, a_1, a_2)

přičemž grupová operace $\varphi : G \times G \to G$

$$\varphi(\alpha, a_1, a_2 ; \beta, b_1, b_2) = \varphi(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = \mathbf{C} = \mathbf{C}(\gamma, c_1, c_2)$$

je dána vztahy $\gamma = \alpha + \beta$ $\quad c_1 = a_1 \cos\beta - a_2 \sin\beta + b_1$

$c = R(\beta)\, a + b$ $\quad c_2 = a_1 \sin\beta + a_2 \cos\beta + b_2$

což jsou hladké (analytické) funkce

a inverzní operace $i : G \to G$

$$i(\alpha, a_1, a_2) = i(A) = A^{-1} = B(\beta, b_1, b_2)$$

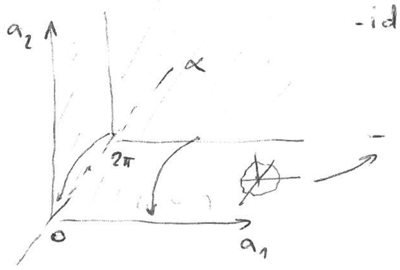
je dána vztahy $\beta = -\alpha$

$$b_1 = -a_1 \cos\alpha - a_2 \sin\alpha$$

$$b_2 = a_1 \sin\alpha - a_2 \cos\alpha$$

což jsou též hladké fce

abstraktní Lieova grupa $ISO(2)$ - 3-rozměrná hladká varieta



- identifikace rovin $\alpha = 0$ a $\alpha = 2\pi$

$\rightsquigarrow$ 3-rozm. válec ve 4D

- lokálně homeomorfní s jistým okolím $U \subset \mathbb{R}^3$

- pokryto 2 hladkými mapami - je mezi nimi lineární transformace

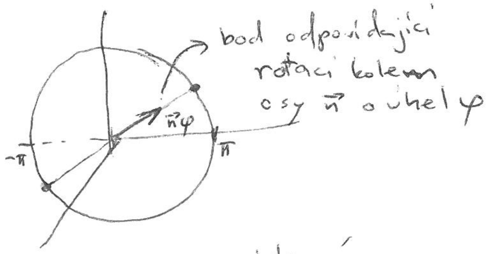
! nejde o direktní součin grup $SO(2)$ a $(\mathbb{R}^2, +)$, přestože jde o direktní součin $SO(2) \times \mathbb{R}^2$ ve smyslu topologickém

Ilustrace vztahů mezi abstraktní grupou a jejími maticovými a operátorovými realizacemi (věrnými reprezentacemi)

$SO(3)$ ~ grupa rotací 3-rozměrného euklid. prostoru ~ grupě operátorů $\overset{\text{rotace}}{}$ na Hilbertově prostoru

Abstraktní grupa =

3-rozměrná hladká varieta



3D koule o poloměru π, u které identifikujeme protilehlé body na povrchu

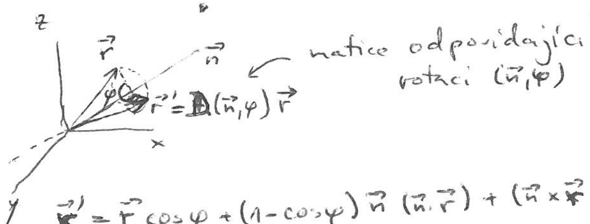
- jde o souvislý top. prostor, ne však jednoduše souvislý, neboť křivka

nelze smrsknout do bodu

~ Maticová grupa =

= grupa všech $\overset{\text{reálných}}{}$ matic 3×3, které jsou invertibilní (regulární) a pro něž platí $DD^T = D^TD = 1\!\!1$

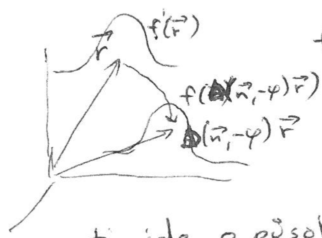
- jde o věrnou reprezentaci (realizaci) grupy $SO(3)$ na $\mathbb{R}^3$
- též o působení abstr. grupy $SO(3)$ na $\mathbb{R}^3$



$$\vec{r}' = \vec{r}\cos\varphi + (1-\cos\varphi)\,\vec{n}\,(\vec{n}\cdot\vec{r}) + (\vec{n}\times\vec{r})\sin\varphi$$

~ Operátorová grupa

= grupa všech $\overset{\text{unitárních}}{}$ operátorů $U(\vec{n},\varphi)$ na Hilbertově prostoru jednočásticových stavů, pro něž platí



$$f'(\vec{r}) = U(\vec{n},\varphi)f(\vec{r}) = f(D(\vec{n},-\varphi)\vec{r})$$

tj. jde o působení $SO(3)$ na $\mathcal{H}$, což je ∞-rozměrný vekt. prostor =>

=> jde o ∞-rozměrnou reprezentaci $SO(3)$

$so(3)$ – Lieova algebra příslušející k $SO(3)$

= Lieova algebra levoinvariantních vekt. polí s Lieovou závorkou jako komutátorem

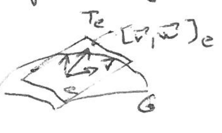
= tečný prostor v T_e, neboť každý vektor $\vec{v} \in T_e$ generuje jediné levoinv. vektorové pole

a též jedinou jednoparametrickou podgrupu $\gamma(t)$, jejíž tečný vektor v e je $\vec{v}$

– integrální křivka levoinv. vekt. pole

– pomocí $\gamma(t)$ definujeme exponenciální zobra

$G \ni \gamma(t) = e^{tX} \in G$



~ Lieova algebra matic, které jsou antisymetrické

- izomorfní, neboť každé levoinv. vekt. pole $SO(3)$ (a obecně $GL(n,F)$) je charakt. jedinou maticí a $[A,B]$ odpovídá $[\vec{v}_A,\vec{v}_B]$
- podmínka na matice algebry plyne z jednopar. podgrup $D(t)D(t)^T = 1$, $D(0) = 1\!\!1$, $\dot{D}(0) = C$

derivováním $\frac{d}{dt}\left(D(t)D(t)^T\right)\Big|_{t=0} = C^T + C = 0$

=> $C = -C^T$ ... antisymetr. matice nuly na diagonále

- báze $A_1 = \begin{pmatrix} 0&0&0\\ 0&0&-1\\ 0&1&0 \end{pmatrix}$ $A_2 = \begin{pmatrix} 0&0&1\\ 0&0&0\\ -1&0&0 \end{pmatrix}$ $A_3 = \begin{pmatrix} 0&-1&0\\ 1&0&0\\ 0&0&0 \end{pmatrix}$

splňující $[A_i, A_j] = \varepsilon_{ijk}A_k$

- exponenciála $D(\vec{n},t\varphi) = e^{t\varphi\vec{n}\cdot\vec{A}}$ pokrývá celou grupu

~ Lieova algebra operátorů působících na $\mathcal{H}$

- až na konstantu operátory momentu hybnosti
- operátor odpovídající jednoparam. podgrupě rotací $D(\vec{n},\varphi) = e^{\varphi A}$ (A je z algeby matic) $A = n_i A_i$

dostaneme limitou

$$T(A)f(\vec{r}) = \frac{dU(\vec{n},\varphi)}{d\varphi}\Big|_{\varphi=0} f(\vec{r}) = \lim_{\varphi\to0}\frac{f(e^{-\varphi A}\vec{r}) - f(\vec{r})}{\varphi} =$$

$$= \lim_{\varphi\to0}\frac{f(\vec{r}-\varphi A\vec{r}\ldots) - f(\vec{r})}{\varphi} = -\vec{r}^{\,T}A^T\nabla f(\vec{r})$$

=> $T(A) = -\vec{r}^{\,T}A^T\nabla$

a speciálně

$T(A_1) = -y\frac{\partial}{\partial z} + z\frac{\partial}{\partial y} = -\frac{i}{\hbar}L_x$ atd. $[L_x, L_y] = i\hbar L_z$

a tedy $U(\vec{n},\varphi) = e^{\varphi n_i T(A_i)} = e^{-\frac{i}{\hbar}\varphi n_i L_i}$