Levoinvariantní vekt. pole na Lieových grupách

- Lieova grupa je hladkou varietou, a proto lze v každém bodě zkonstruovat <u>tečný prostor</u> $T_g(G)$ v bodě $g \in G$
  - několik možností zavedení (např. tečné vektory ke křivkám jdoucím bodem g či směrové derivace hladkých fcí na G)
  - nejčastěji se báze tohoto prostoru zapisuje jako $\vec{e}_j = \frac{\partial}{\partial x^j_g}\Big|_g$, kde x_j značí souřadnice v okolí g
    která odpovídá směrovým derivacím podél jednotlivých souřadnic
    neboli podél tzv. souřadnicových křivek $\gamma_j(t) = (x^1_g(g), \dots, x^j_g(g) + t, \dots x^n_g(g))$
    z čehož $\vec{e}_j = \frac{d\gamma_j(t)}{dt}\Big|_{t=0} = (0, \dots, 1, \dots 0) = \left(\frac{dx^1_g(t)}{dt}\Big|_{t=0}, \dots \right)$
    a též $\vec{e}_j(f) = \frac{d f(\gamma_j(t))}{dt}\Big|_{t=0} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^i}\Big|_g \underbrace{\frac{d x^i_g(\gamma_j(t))}{dt}\Big|_{t=0}}_{\delta_{ij}} = \frac{\partial f}{\partial x^j_g}\Big|_g$
  - tečné prostory v různých bodech navzájem izomorfní
  = lineární funkcionál na $F(M)$
- přiřadíme-li každému bodu $g \in G$ jeden tečný vektor z $T_g(G)$ dostaneme <u>vektorové pole</u> V na G, jde o zobrazení $V: G \to T(G)$ = tečný bandl variety G

  též lze říci, že jde o zobrazení $V: F(G) \to F(G)$ = prostor fcí na G, definované pomocí $Vf(g) = V_g(f) \in \mathbb{R}$ → nová fce pro $\forall g$

  operátor, fce, bod, tečný vektor v g, tj. $V_g \in T_g(G)$

  - speciálně <u>hladké vektorové pole</u> je vekt. pole, které z hladké fce (souřadnicově) dělá opět hladkou fci
  - množina $\forall$ hladkých vekt. polí $\mathfrak{X}(G) = \mathcal{T}^1_0(G)$ = tenzorové pole typu $\binom{1}{0}$ tvoří ∞-rozměrný vekt. prostor
  - souřadnicově: $V = \underbrace{V^i(x)}_{\text{složky pole - hladké fce}} \frac{\partial}{\partial x^i}$, tj. V je dif. operátor 1. řádu $(Vf)(x) = V^i(x)\frac{\partial f}{\partial x^i}$

    x … lokální souřadnice v okolí g

    změna souřadnic $V'^i(x') = J^i_j(x)\, V^j(x)$, kde Jacobiho matice $J^i_j = \frac{\partial x'^i}{\partial x^j}(g)$

- <u>integrální křivky vekt. pole V</u> = křivka $\gamma(t)$ na G, jejíž tečný vektor v každém bodě je dán vektorem $V_{\gamma(t)}$ – symbolicky $\dot{\gamma}(g) = V_g$

  souřadnicově $\dot{\gamma}(\gamma(t)) = \dot{x}^i(t) \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_{\gamma(t)} = V_{\gamma(t)} = V^i(x(t)) \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_{\gamma(t)} \Rightarrow \begin{matrix} \dot{x}^1(t) = V^1(x^1, \dots x^n) \\ \vdots \\ \dot{x}^n(t) = V^n(\dots) \end{matrix}$

  - kongruence int. křivek = G je hustě vyplněná mnoha int. křivkami, které se neprotínají
    ⇒ jednoparam. třída zobr. $\phi_t: G \to G$, $\gamma(0) \mapsto \gamma(t)$ = (lokální) <u>tok generovaný V</u>

• Lieova závorka (komutátor) dvou polí V, W na G

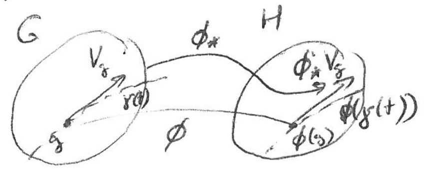
je vekt. pole $[V,W]$, které v bodě g je dáno pomocí $[V,W]_g : F(G) \to \mathbb{R}$

$$[V,W]_g(f) = V_g(Wf) - W_g(Vf)$$

přičemž platí $[V,W]_g \in T_g(G)$

- jde o dif. op. 1. řádu (na rozdíl od součinu VW – 2. řádu)
- souřadnicově $\quad [V,W]^k(x) = \sum_{i=1}^{n} V^i \frac{\partial W^k}{\partial x^i} - W^i \frac{\partial V^k}{\partial x^i}$

• push-forward vekt. polí (tečné zobrazení) indukovaný zobrazením $\phi : G \to H$



je zobrazení $\phi_* : T_g(G) \to T_{\phi(g)}(H)$

dané předpisem $\quad \phi_*\left(\frac{d\gamma(t)}{dt}\Big|_{t=0}\right) = \frac{d(\phi(\gamma(t)))}{dt}\Big|_{t=0}$

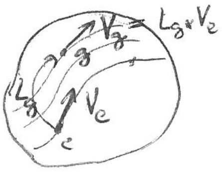
souřadnicově $\quad x^i \to y^a(x)$

$$\phi_*\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right) = \underbrace{\frac{\partial y^a}{\partial x^i}}_{J^a_i} \frac{\partial}{\partial y^a} \quad , \quad \phi_*\left(V^i \frac{\partial}{\partial x^i}\right) = \left(J^a_i V^i\right) \frac{\partial}{\partial y^a}$$

• pokud ϕ je difeomorfismus (hladké, prosté a na), pak

$$\phi_*[V,W] = [\phi_* V, \phi_* W]$$

Def.: Nechť G je Lieova grupa a L_g, resp. R_g značí levé, resp. pravé posunutí na G (jde o difeomorfismy G na sebe, neboť jde o hladké zobr. z def.) pak vekt. pole V na G je levo-, resp. pravoinvariantní, pokud platí



$(L_g)_* V = V$, resp. $(R_{g*} V = V)$ pro $\forall g \in G$, souřadnicově

$$\underbrace{J^a_i(x)\, V^i(x)}_{\text{posunuté z } *} \frac{\partial}{\partial y^a} = \underbrace{V^a(y)}_{\text{původní v } y} \frac{\partial}{\partial y^a}$$

• tato pole jsou dána hodnotou v neutrálním prvku e (a obecněji hodnotou v lib. jiném bodě)

$$V_g = L_{g*} V_e$$

a jsou hladká (neboť gh je hladké zobr.)

$\Rightarrow$ levo-, pravoinv. vekt. pole tvoří n-rozměrný vekt. prostor izomorfní $T_e(G)$, budeme ho značit $\mathcal{L}(G)$

• navíc díky push-forward Lieovy závorky je zřejmé, že

$$L_{g*}[V,W] = [L_{g*}V, L_{g*}W] = [V,W] \quad , \text{pokud } V \text{ a } W \in \mathcal{L}(G)$$

a tedy i $[V,W] \in \mathcal{L}(G)$

$\Rightarrow$ $\mathcal{L}(G)$ tvoří Lieovu algebru s komutátorem $\quad [V,W]f = V(Wf) - W(Vf)$

která je izomorfní Lieově algebře $T_e(G)$ s komutátorem

$$[V_e, W_e] = [V,W]_e$$

= Lieova algebra Lieovy grupy G

Lieova algebra jako matematická struktura

Def: Reálná Lieova algebra $\mathcal{L}$ dimenze n je reálný vekt. prostor dim. n, na kterém je definována binární operace, tzv. komutátor $[a,b]$ pro $\forall a,b \in \mathcal{L}$ splňující

1) $[a,b] \in \mathcal{L}$ pro $\forall a,b \in \mathcal{L}$
2) $[\alpha a+\beta b, c] = \alpha[a,c]+\beta[b,c]$ (linearita)
3) $[a,b] = -[b,a]$ (antisymetričnost)
4) $[a,[b,c]] + [b,[c,a]] + [c,[a,b]] = 0$ (Jacobiho identita)

$\left.\right\}$ pro $\forall a,b,c \in \mathcal{L}$ a $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ $[a, \beta b + \gamma c] = \beta[a,b] + \gamma[a,c]$ (bilinearita)

Pozn: Zcela obdobně lze definovat komplexní LA, jen $\alpha,\beta \in \mathbb{C}$ a jde o komplexní vekt. pr.

Př: 1) vekt. prostor matic $n\times n$ s komut. $[A,B]=AB-BA$ je triválně Lieova algebra

2) n-rozm. vekt. prostor levoinv. vekt. polí tvoří Lieovu algebru, neboť z definice Lieovy závorky dvou vekt. polí plyne Jacobi

3) obecně Lieova algebra lineárních operátorů s komutátorem $[a,b]f = a(bf) - b(af)$

- nespecifikuje-me-li komutátor $\rightarrow$ abstraktní Lieovy algebry (mnohdy izomorfní s mnoha realizacemi pomocí matic či operátorů)

ve skutečnosti vždy

Adoův teorém: Každá abstr. Lieova algebra je izomorfní s nějaké Lieově algebře matic se stand. komutátorem.

Def: Nechť e_i, $i=1,\dots n$ tvoří bázi v $\mathcal{L}$. Pak $[e_i, e_j] = \sum_k c^k_{ij} e_k$ je vždy lineární kombinace těchto báz. prvků. Konstanty c^k_{ij} se nazývají <u>strukturní konstanty</u> lin. alg. $\mathcal{L}$ vzhledem k bázi e_i.

- c^k_{ij} jsou závislé na bázi, transformují se jako „tensor 3. řádu"
- ~~zápis~~ každý komut. lze vyjádřit pomocí c^k_{ij}: $[a,b] = a^k b^\ell c^m_{k\ell} e_m$
  kde $a = a^k e_k$, $b = b^\ell e_\ell$
- z podmínek 3) a 4) v def. LA plyne

$$c^k_{ij} = -c^k_{ji} \quad , \quad c^s_{pq} c^t_{rs} + c^s_{qr} c^t_{ps} + c^s_{rp} c^t_{qs} = 0$$

Pozn:
- protože okolí e Lieovy grupy je difeomorfní s okolím 0 odpovídající Lieovy algebry a Lieova algebra Lieovy grupy je určena jednoznačně až na izomorfismus, nazýváme c^k_{ij} též strukturní konstanty příslušné Lieovy grupy