Jednoparametrické podgrupy a exponenciální zobrazení

- jsou důležité, neboť pomocí nich lze často snadno najít příslušnou Lieovu algebru (maticově či operátorově) a navíc jim odpovídají zákony zachování (viz letní semestr)

Def: Jednoparametrická podgrupa Lieovy grupy je křivka $\gamma(t)$, pro kterou platí
$$\gamma(t+s) = \gamma(t)\gamma(s) \quad , \quad \gamma(0) = e \quad , \quad t,s \in \mathbb{R}$$
jde tedy o homomorfismus $\gamma : (\mathbb{R},+) \xrightarrow{do} G$

- je zřejmé, že lib. prvek této podgrupy lze zapsat $\gamma(t) = \gamma(\varepsilon)^n$, kde $\varepsilon = \frac{t}{n}$

kde ε může být lib. malé $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ každé $\gamma(t)$ lze vyjádřit jako součin prvků z okolí e

(vzpomeňme limitní přechod $R^z(\varphi) \cong \underbrace{\left(1 - i\frac{\varphi}{n}L_z\right)^n}_{\text{„malá rotace kolem osy z"}} \xrightarrow[n\to\infty]{\lim} e^{-i\varphi L_z}$ ← nalezení jednopar. podgrupy SO(3) tedy přesněji její reprezentace)

Pozn:

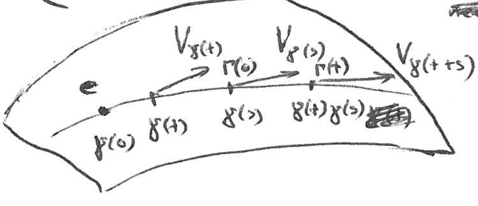
1) není ovšem zaručeno, že libovolný prvek G lze takto zapsat a ani to není obecně pravda (viz DÚ pro $SL(2,\mathbb{R})$)
2) lze však lib. prvek grupy vyjádřit jako součin prvků z různých jednopara. podgrup, tj. „součinu exponenciál" - viz níže)
3) jednopar. podgrupa $\gamma(t)$ je defin. pro $\forall t \in \mathbb{R}$, neboť $\gamma(t)\gamma(s)$ má vždy v grupě smysl $\Rightarrow$ u kompaktních grup však nejde o prostý homomorf.

Věta: Každá jednoparametrická podgrupa G je integrální křivkou jistého levoinvariantního vekt. pole na G a naopak, integrální křivka levoinv. v. pole startující v e je jednopar. podgrupa G.

Dk: $\Rightarrow$ nechť $\gamma(t)$ je jednopar. podgrupa a $\dot\gamma(0)$ je její tečný vektor v e

stačí ukázat, že roznesením $(L_{\gamma(t)})_* \dot\gamma(0)$ dostaneme $\dot\gamma(t)$
$$\dot\gamma(t) = \frac{d}{ds}\Big|_{s=0} \gamma(t+s) = \frac{d}{ds}\Big|_{s=0} \gamma(t)\gamma(s) = \frac{d}{ds}\Big|_{s=0} L_{\gamma(t)}\gamma(s) = (L_{\gamma(t)})_* \frac{d\gamma(s)}{ds}\Big|_{s=0} = (L_{\gamma(t)})_* \dot\gamma(0)$$
z def. push-forward

$\Leftarrow$ nechť $\gamma(t)$ je int. křivka pole V



křivka $\Gamma(t) = \gamma(t+s)$ je integr. křivkou levoinv. pole V startující v $\gamma(s)$ (neboť $\frac{d(t+s)}{dt} = 1$)

a zároveň int. křivkou pole $(L_{\gamma(s)})_* V$ (V je levoinvariantní)

ovšem int. křivkou $(L_{\gamma(s)})_* V$ je $L_{\gamma(s)}\gamma(t) = \gamma(s)\gamma(t)$ c.b.d.

Př. jednoparam. podgrupy $GL(n,\mathbb{R})$

- víme, že levoinv. vekt. pole na $GL(n,\mathbb{R})$ jsou $V_C = x^i_k C^k_j \frac{\partial}{\partial x^i_j}$, kde C je libovolná matice $n \times n$

$\Rightarrow$ int. křivky $\gamma(t) = (x^1_1(t), \dots x^n_n(t))$ splňují ~~[illegible]~~ rovnice

$$\dot{x}^i_j(t) = x^i_k(t)\, C^k_j \quad \text{s poč. podmínkou} \quad x^i_j(0) = \delta^i_j$$

tato soustava má řešení
$$x^i_j(t) = (\exp tC)^i_j = \delta^i_j + tC^i_j + \frac{t^2}{2!}(C^2)^i_j + \dots$$

neboli maticově
$$\dot{x}(t) = x(t)\,C\,,\; x(0) = \mathbb{1} \;\Rightarrow\; x(t) = e^{tC}$$

$\Rightarrow$ pro ~~[illegible]~~ $GL(n,\mathbb{R})$ jsou jednoparam. podgrupy dány pomocí exponenciály matice C odpovídající levoinv. vekt. poli V_C

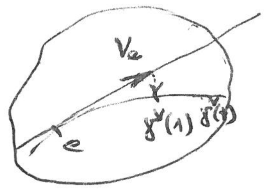
přičemž víme, že existuje vzájemně jednoznačné přiřazení mezi

tečnými vektory v $T_e(G)$ $\longleftrightarrow$ ~~[illegible]~~ levoinv. vekt. pole na G $\longleftrightarrow$ jednoparam. podgrupami v G

$\Rightarrow$ to motivuje zavést obecné exponenc. zobrazení z Lieovy alg. do Lieovy grupy

Def. Nechť $\gamma^V(t)$ je jednoparam. podgrupa grupy G odpovídající levoinv. vekt. poli V ~~z~~ Lieovy algebry $\mathcal{G}$ této grupy, tj. $\dot{\gamma}^V(t) = V_{\gamma(t)}$

pak exponenciální zobrazení $\exp: \mathcal{G} \to G$ je definováno vztahem
$$\exp: V \mapsto e^V = \gamma^V(1)$$



Věta: Jednoparam. podgrupa $\gamma^V(t)$ je dána pomocí exp. zobrazení jako $\gamma^V(t) = e^{tV}$

Dk: dle definice $e^{tV} = \gamma^{tV}(1) = \gamma^V(t)$ neboť obecně $\gamma^{tV}(k) = \gamma^V(tk)$

protože tV je tečný vektor v $k=0$ křivky $\gamma^{tV}(k)$, ale též $\gamma^V(tk)$
$$\left.\frac{d\gamma^V(tk)}{dk}\right|_{k=0} = \left.\frac{d\gamma^V(tk)}{d(tk)}\right|_{tk=0} \left.\frac{d(tk)}{dk}\right|_{k=0} = tV$$

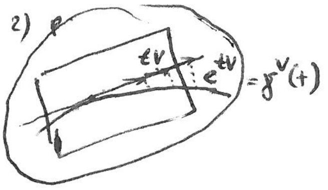
a navíc $\gamma^{tV}(0) = e = \gamma^V(t \cdot 0)$

a jde tedy o stejné křivky

Pozn: 1) speciálně pro $t=0$ $\quad e^0 = \gamma^V(0) = e$

$t=-1$ $\quad e^{-V} = \gamma^V(-1) = \gamma^V(1)^{-1} = (e^V)^{-1}$

2) ~~p~~

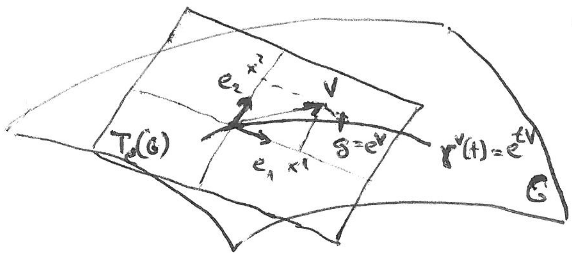


pohybujeme-li se v Lieově algebře ve směru V, pak v grupě se pohybujeme po jednoparam. podgrupě generované vektorem V

Pokrytí grupy exponenciálním zobrazením z její Lieovy algebry

<u>Věta:</u> Každý bod $g \in G$ z jistého okolí e lze zapsat ve tvaru $g = e^V$, $V \in \mathcal{G} = T_e(G)$ přičemž V je z okolí 0 v $\mathcal{G}$.

- protože $\mathcal{G} \sim \mathbb{R}^n$, lze takto zavést lokální souřadnice v okolí e tzv. normální souřadnice, tj. bodu $g = e^V$ z okolí e přiřadíme $(x^1, \dots, x^n)$, což jsou souřadnice v rozvoji V v bázi $e_j \in \mathcal{G}$, $V = x^j e_j$



- obecně však nelze každý prvek $g \in G$ zapsat jako e^V, $V \in \mathcal{G}$
  - např. když máme více komponent souvislosti (např. $O(3)$ apod.), ale existují i grupy souvislé, kde to nelze (např. $SL(2,\mathbb{R})$)
  - exponenciála ~~pak~~ zobrazuje pouze do komponenty souvislosti obsahující jednotkový prvek
  - pokud $G = \exp \mathcal{G}$ nazývá se někdy exponenciální grupou

<u>Pozn:</u> lze definovat i tzv. <u>lokální</u> Lieovu grupu a platí, že pro lib. reálnou Lieovu algebru existuje ~~pak~~ lokální LG, jejíž Lieova alg. je izomorfní dané reálné LA.
(viz např. Pontryagin: Topological Groups, & více o lok. LG v letním semestru)

<u>Věta:</u> Každý bod $g \in G$ (Lieovy grupy) z její souvislé podgrupy lze zapsat jako konečný součin exponenciál z její Lieovy algebry.

[Body v komp. souvislosti lze spojit s bodem tvaru e^V a okolí tohoto bodu je pomocí e^{-V} zobrazeno do okolí e, ~~kde~~ všude každý bod je tvaru e^W pro nějaké $W \in \mathcal{G}$. Postupně se dostaneme (zbytek založený na tom, že prvky G tvaru $e^{V_1} e^{V_2} \dots e^{V_k}$ pro konečné, ale libovolné k tvoří podgrupu G)]

<u>Věta:</u> Každá reálná Lieova algebra je izomorfní reálné Lieově algebře určité lineární Lieovy grupy. (Freudenthal, de Vries: Linear Lie Groups AP 1969)

<u>Věta:</u> Pokud G je kompaktní Lieova grupa, pak každý prvek souvislé podgrupy G lze vyjádřit jako e^V, $V \in \mathcal{G}$ (Price: Lie groups and Compact Groups, Cambridge 1977)

<u>Def:</u> Topologický prostor T je kompaktní, pokud každé jeho otevřené pokrytí (souhrn otevř. množin, jejichž sjednocení je T) obsahuje konečné podpokrytí (sjednocení je opět celé T).

<u>Heine-Borel:</u> Podmnožina $\mathbb{R}^n$ je kompaktní, právě tehdy, když je uzavřená a omezená (vzdálenost všech bodů je konečná). (Uzavřenost důležitá, např. $\mathbb{R}$ lze namapovat na konečný, ale otevřený interval)

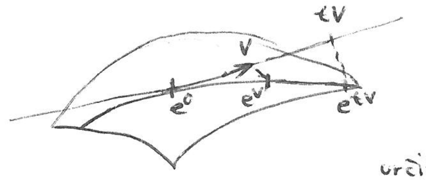
Odvozený homomorfismus Lieových algeber

- viděli jsme, že lze obecně přes jednoparam. podgrupy $\gamma^V(t)$ příslušné levoinv. vekt. poli V definovat exponenciální zobrazení

$$\exp : g \to G \quad : \quad V \to e^V = \gamma^V(1)$$

přičemž se ukázalo, že celá $\gamma^V(t)$ je obrazem přímky tV. v tečném prostoru $T_e(G)$, neboli

$$\gamma^V(t) = e^{tV} = \gamma^{tV}(1)$$



- lze ukázat, že $\forall g \in G$ z určitého okolí e lze zapsat jako $g = e^X$, $X \in g$

(protože $g \sim R^n$, lze na G zavést „normální souřadnice" x^a pomocí $X = x^a E_a$, $g = e^X$, kde E_a je báze g
v těchto souřadnicích je $\gamma^X(t) = (x^1 t, x^2 t, \dots x^n t)$)

- platí triviálně $e^0 = e$, $e^{-X} = (e^X)^{-1}$, $e^{(t+s)V} = e^{tV} e^{sV}$

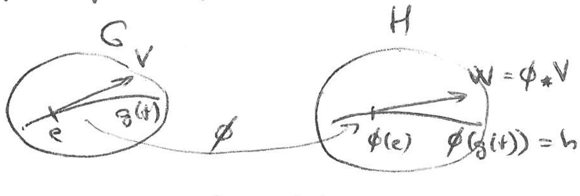
Př. $GL(n,R)$ - víme, že $\gamma^C(t) = e^{tC}$ $\to$ $\exp : C \in gl(n,R) \to e^C$

- nechť $\phi : G \to H$ je homomorfismus Lieových grup

a $g(t) = \gamma^V(t) = e^{tV}$ je jednopar. podgrupa na G

pak $h(t) = \phi(g(t))$ je jednopar. podgrupa na H a tedy $h(t) = e^{tW}$, $W \in h$

a navíc $W = \phi_* V$



a dále $\phi_* : g \to h$ je homomorfismus Lieových algeber tj. zachovává se komutátor atd.

platí komutační diagram tzv. <u>odvozený homomorfismus LA</u>

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\phi"] & H \\ g \arrow[u, "\exp"] \arrow[r, "\phi_*"] & h \arrow[u, "\exp"'] \end{tikzcd}$$

$$\phi \circ \exp = \exp \circ \phi_* \quad , \quad \phi(e^V) = e^{\phi_* V}$$

Dk: že $\phi(g(t))$ je jednopar. podgrupa plyne z toho, že jde o homomorfismus,*

zbytek např. v Ishamovi