Maticové grupy a jejich algebry

- základní grupou je $GL(n,\mathbb{R})$ či $GL(n,\mathbb{C})$

vlastnosti grupy $GL(n,\mathbb{R})$ – n^2 rozměrná, matice $n\times n$ $\det A \neq 0$, nesouvislá

1) levoinvariantní vekt. pole – parametrizovány maticí C – libovolnou

$\mathfrak{X}_L(GL(n,\mathbb{R}))$ $$V_C(x) = x^i_k c^k_\ell \partial^\ell_i = Tr(xC\partial) \qquad \text{kde } \partial^\ell_i = \frac{\partial}{\partial x^i_\ell}$$

což lze psát v bázi

$$e^\ell_k = x^i_k \partial^\ell_i$$ získané položením $C = E^\ell_k$, kde E^ℓ_k je tzv. Weylova báze matic $n\times n$ $(E^\ell_k)^i_j = \delta^\ell_j \delta^i_k$

jako $$V_C(x) = c^k_\ell e^\ell_k(x)$$

- pro bázi e^ℓ_k lze určit komutační relace $[e^j_i, e^\ell_k] = \delta^j_k e^\ell_i - \delta^\ell_i e^j_k$ (1)

2) tečný prostor $T_e(GL(n,\mathbb{R}))$ – vektory $V_C(e)$

neboli pro $e: x^i_j = \delta^i_j$ – jednotková matice $\Rightarrow$ standardní souřadnicová báze $e^j_i = \partial^j_i$

$\Rightarrow V_C(e) = c^i_j \partial^j_i|_e$

ovšem komutátor definovaný pomocí (1)

- komutátor obecný: $$[V_C, V_D] = [c^i_j e^j_i, d^k_\ell e^\ell_k] = c^i_j d^k_\ell (\delta^j_k e^\ell_i - \delta^\ell_i e^j_k) =$$
$$= c^i_k d^k_\ell e^\ell_i - d^k_i c^i_j e^j_k =$$
$$= [C,D]^i_\ell e^\ell_i = V_{[C,D]}$$

kromě toho
$$V_{\alpha C + \beta D} = \alpha V_C + \beta V_D$$

$\Rightarrow$ 3) maticová Lieova algebra grupy $GL(n,\mathbb{R})$

= všechny matice C s komutátorem $[C,D] = CD - DC$

- izomorfní s $\mathfrak{X}_L$ a T_e grupy $GL(n,\mathbb{R})$

$\rightarrow$ lze mluvit jen o jedné Lieově algebře grupy $GL(n,\mathbb{R})$

– značí se $gl(n,\mathbb{R})$

podgrupy grupy $GL(n,\mathbb{R})$ –

- obecně platí: Je-li $H \subset G$ Lieovou podgrupou, pak Lieova algebra $\mathfrak{h}$ je podprostorem L.A. $\mathfrak{g}$

speciálně pro podgrupu $H \subset GL(n,\mathbb{R})$, bude $\mathfrak{h}$ izomorfní s podprostorem matic $n\times n$, tedy podalgebrou

takže např. pro $SO(3) \subset GL(3,\mathbb{R})$, značíme $so(3)$ odpovídající LA a nerozlišujeme, zda jde o levoinv. vekt. pole, ~~tečný~~ $T_e(SO(3))$ či matice

PGMF 13

Podgrupy Lieovy grupy $GL(n,R)$

Př. Lieova algebra $O(n,R) \subset GL(n,R)$

- ortogonální matice: $x^T x = 1$ (x souřadnice v GL) protože $x(0) = e = 1$

$\Rightarrow$ pro jednopar. podgrupy (a obecně lib. křivky $x(t)$) na $O(n,R)$

musí platit $x(0) = 1 = x^T(0)$ v $GL(n,R)$ víme, že

$x^T(t)\, x(t) = 1$ $\dot{x}(0) = C$

derivování $\left.\frac{d}{dt}\left(x^T(t)\, x(t)\right)\right|_{t=0} = \dot{x}^T(0) \cancel{x(0)}^{1} + \cancel{x^T(0)}^{1} \dot{x}(0) = C^T + C = \frac{d1}{dt} = 0$

$\Rightarrow$ Lieova algebra grupy $O(n,R)$ jakožto tečný prostor v 1 je

dána jako vekt. prostor matic C splňujících $C^T = -C$

tj. jde o <u>antisymetrické matice</u> $\Rightarrow$

nulové prvky na diagonále a prvky pod diagonálou určeny

těmi nad diagonálou $\Rightarrow$ $\dim O(n,R) = \frac{n(n-1)}{2}$

- obecně: matice C z algebry příslušející podgrupě $G \subset GL(n,R)$

dostaneme tak, že derivujeme v $t=0$ křivky z $x(0) = 1$ v souřadnicích $x(t) \in G \subset GL(n,R)$ a najdeme $C = \dot{x}(0)$ splňující příslušnou podmínku

protože (pro jednopar. podgrupy) $x(t) = e^{tC} = 1 + tC + \frac{t^2}{2} C^2 + \dots \Rightarrow \dot{x}(0) = C$

lze ~~to~~ to udělat i tak, že dosadíme za $x(t)$ a necháme členy do řádu t, koeficient u t je potřebná podmínka

$\eta = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$ (r jedniček, s minus jedniček)

grupa	$GL(n,R)$	$O(r,s)$	$SO(r,s)$	$O(n)$	$SO(n)$	$U(n)$	$SU(n)$	$SL(n,R)$
podmínka na A	$\det A \neq 0$	$A^T \eta A = \eta$	+ $\det A = 1$	$A^T A = 1$	+ $\det A = 1$	$AA^{\dagger} = 1$	+ $\det A = 1$	$\det A = 1$
Lieova algebra	$gl(n,R)$	$o(r,s)$	$= so(r,s)$	$o(n)$	$= so(n)$	$u(n)$	$su(n)$	$sl(n,R)$
podmínka na C	—	$(\eta C)^T = -\eta C$	— " —	$C^T = -C$	— " —	$C^{\dagger} = -C$	+ $\mathrm{Tr}\, C = 0$	$\mathrm{Tr}\, C = 0$
dimenze	n^2	$\frac{n(n-1)}{2}$	$\frac{n(n-1)}{2}$	$\frac{n(n-1)}{2}$	$\frac{n(n-1)}{2}$	n^2	n^2-1	n^2-1

diagonála imaginární
nad diag. $2\frac{n(n-1)}{2} + n = n^2$