Cvičení: SO(3) a SU(2) jsou pokryty exponenciálním zobrazením

① $SO(3)$ – podgrupa $SL(3,\mathbb{R})$ $(\det A = 1)$ ortogonálních matic $A^TA = AA^T = \mathbb{1}$

→ 3 volné parametry, např. Eulerovy úhly či $(\vec{n},\varphi)$, $|\vec{n}|^2 = 1$
otočení o úhel φ kolem osy $\vec{n}$

a) Lieova algebra: derivování $x^T(t)\,x(t) = \mathbb{1}$ podle t pro $t=0$

dostaneme $\frac{d}{dt}\left(x^T(t)\,x(t)\right)\Big|_{t=0} = \dot{x}^T(0)\,x(0) + x^T(0)\,\dot{x}(0) =$

$$\begin{pmatrix} x(0) = \mathbb{1} \\ \dot{x}(0) = C \end{pmatrix} = C^T + C = \frac{d\mathbb{1}}{dt} = 0$$

⇒ LA je tvořena antisymetrickými maticemi $C = -C^T$

→ nulové prvky na diagonále a ty pod diagonálou určeny těmi nad diagonálou →

$\dim so(3) = 3$ $\left(\dim so(n) = \frac{n(n-1)}{2}\right)$

b) ze vztahu $C = -C^T$ vidíme, že ~~matic~~ jako bázi $so(3)$ lze volit matice typu $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \dots$ standardní volba $(L_i)_{ke} = -\varepsilon_{ike}$

$$L_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},\quad L_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix},\quad L_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

které mají standardní komutační relace $[L_i, L_j] = \varepsilon_{ijk} L_k$ tj. $c_{ij}^k = \varepsilon_{ijk}$

→ obecný prvek $so(3)$ lze psát jako

$$L = \varphi\,\vec{n}\cdot\vec{L}$$

c) Jaké jsou jednoparametrické grupy? Pokrývají celou grupu $SO(3)$?

$$A^{\vec{n}}(\varphi) = e^{\varphi\,\vec{n}\cdot\vec{L}} = \mathbb{1} + \varphi\,\vec{n}\cdot\vec{L} + \frac{\varphi^2}{2!}(\vec{n}\cdot\vec{L})^2 + \dots$$

$$A^{\vec{n}}(\varphi)_{ij} = \delta_{ij}\cos\varphi + (1-\cos\varphi)\,n_i n_j - \varepsilon_{ijk}\,n_k \sin\varphi$$

neboť $(\vec{n}\cdot\vec{L})_{ij} = -n_k\varepsilon_{kij}$ neboť $(L_k)_{ij} = -\varepsilon_{kij}$

$(\vec{n}\cdot\vec{L})^2_{ij} = n_i n_j - \delta_{ij}$ $\sum_s \varepsilon_{ijs}\varepsilon_{kes} = \delta_{ik}\delta_{je} - \delta_{ie}\delta_{jk}$

$(\vec{n}\cdot\vec{L})^3_{ij} = n_k\varepsilon_{kij}$

$(\vec{n}\cdot\vec{L})^4_{ij} = -n_i n_j + \delta_{ij}$

a tedy
$$A^{\vec{n}}(\varphi)_{ij} = \delta_{ij}\underbrace{\left(1 - \frac{\varphi^2}{2!} + \frac{\varphi^4}{4!} - \dots\right)}_{\cos\varphi} + n_i n_j \underbrace{\left(\frac{\varphi^2}{2!} - \frac{\varphi^4}{4!} + \dots\right)}_{1-\cos\varphi} - n_k \underbrace{\varepsilon_{kij}}_{\varepsilon_{ijk}} \underbrace{\left(\varphi - \frac{\varphi^3}{3!} + \dots\right)}_{\sin\varphi} \checkmark$$

d) Jak působí $A^{\vec n}(\varphi)$ na $\vec x \in \mathbb{R}^3$?

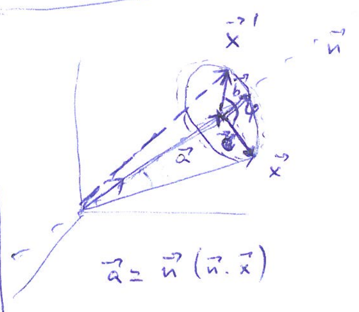
$$x_i' = \sum_j A^{\vec n}(\varphi)_{ij}\, x_j = x_i \cos\varphi + (1-\cos\varphi)\, n_i \Big(\sum_j n_j x_j\Big) + \sum_{k,j} \varepsilon_{ikj}\, n_k x_j \sin\varphi$$

$$\vec x' = \vec x \cos\varphi + (1-\cos\varphi)(\vec n\cdot\vec x)\,\vec n + (\vec n\times\vec x)\sin\varphi$$

což je právě otočení kolem osy $\vec n$ o úhel φ

$\Rightarrow$ $\forall$ otočení lze napsat jako $e^{\varphi \vec n\cdot\vec L}$ pro vhodné $(\varphi, \vec n)$

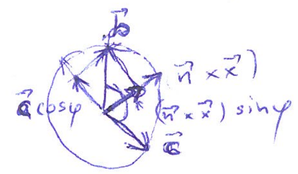
tj. $SO(3)$ je tzv. exponenciální grupa



$\vec a = \vec n(\vec n\cdot\vec x)$

$\vec c = \vec x - \vec n(\vec n\cdot\vec x)$

$\vec x' = \vec a + \vec b =$
$= \vec n(\vec n\cdot\vec x) +$
$+ [\vec x - \vec n(\vec n\cdot\vec x)]\cos\varphi$
$+ (\vec n\times\vec x)\sin\varphi$ ✓



---

② $SU(2)$ – podgrupa $SL(2,\mathbb{C})$ unitárních matic $A^\dagger A = AA^\dagger = \mathbb{1}$
s $\det A = 1$

a) Lieova algebra $su(2)$: matice (komplexní) C

splňující $C^\dagger = -C$, $\operatorname{Tr} C = 0$

neboť $x^\dagger(t)\,x(t) = \mathbb{1} \xrightarrow{\text{derivování}} C^\dagger + C = 0$

z $\det e^C = e^{\operatorname{Tr} C} = 1 \to \operatorname{Tr} C = 0$

$\Rightarrow$ obecně pro $SU(n)$. $C^\dagger = -C$ dává n^2 parametrů

diagonála musí být imaginární $\to n$

nad ní je $\frac{n(n-1)}{2}$ komplexních čísel

$\Rightarrow \#\text{par} = 2\frac{n(n-1)}{2} + n = n^2$

$\operatorname{Tr} C = 0$ ubírá ještě jeden parametr

$\to SU(n)$ má n^2-1 parametrů

$SU(2)$ má 3

b) báze $su(2)$: obecný prvek $C = \begin{pmatrix} ia & b+ic \\ -b+ic & -ia \end{pmatrix}$ neboli $C = i\left[a\underbrace{\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}}_{\sigma_3} + b\underbrace{\begin{pmatrix}0&-i\\i&0\end{pmatrix}}_{\sigma_2} + c\underbrace{\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}}_{\sigma_1}\right]$

Pauliho matice

tj. ~~báze~~ bázi lze volit např.

$$L_i = -\frac{i}{2}\sigma_i$$

strukturní konstanty $[L_i, L_j] = \varepsilon_{ijk} L_k \to C_{ij}^k = \varepsilon_{ijk}$

neboť $[\sigma_i, \sigma_j] = 2i\,\varepsilon_{ijk}\,\sigma_k$

c) jednoparametrické podgrupy, $C = -\frac{i}{2}\alpha\,\vec n\cdot\vec\sigma$, $|\vec n| = 1$
$= \vec n\cdot\vec L$

vynechat t

$$e^{tC} = e^{-\frac{i}{2}t\alpha\vec n\cdot\vec\sigma} = \mathbb{1}\cos\frac{t\alpha}{2} - i(\vec n\cdot\vec\sigma)\sin\frac{t\alpha}{2}$$

$\varphi = \frac{t\alpha}{2}$

$\Leftarrow$ $\sigma_i\sigma_j = i\varepsilon_{ijk}\sigma_k + \delta_{ij}\mathbb{1}$

$\Rightarrow$ $e^{-i\varphi\vec n\cdot\vec\sigma} = \mathbb{1} - i\varphi(\vec n\cdot\vec\sigma) - \frac{\varphi^2}{2} + \dots$
$+ i\frac{\varphi^3}{3!}(\vec n\cdot\vec\sigma) + \dots$

neboť $(n_i\sigma_i)(n_j\sigma_j) = n_i n_j (i\varepsilon_{ijk}\sigma_k + \delta_{ij}\mathbb{1})$
$= n_i n_i \mathbb{1} = \mathbb{1}$

nejobecnější $A \in SU(2)$ má tvar

$$A = \begin{pmatrix} a & -b^* \\ b & a^* \end{pmatrix} = \mathbb{1}\,x_0 + i(\vec x\cdot\vec\sigma) = \begin{pmatrix} x_0 + ix_3 & x_2 + ix_1 \\ -x_2 + ix_1 & x_0 - ix_3 \end{pmatrix}$$

přičemž $|a|^2 + |b|^2 = x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$

lze volit $x_0 = \cos\varphi$ $x_i = n_i \sin\varphi$