Vztah reprezentací Lieových grup a jejich algeber

- tak jako je přímočarý postup od LG k její LA, tak také můžeme snadno přejít od repr. LG k repr. odpovídající LA
- obráceně je to obtížnější, ~~*~~ neboť obecně ne každá repr. LA dává repr. LG a též je problém s exp. zobr., které ne vždy pokrývá celou grupu (viz př. $SL(2,\mathbb{R})$) → *
- v následujícím se budeme zabývat maticovými grupami, které jsou ve fyzice nejčastější, tj. grupou $GL(n, \mathbb{R}$ či $\mathbb{C})$ a jejími podgrupami

* obecně však platí, že každý prvek libovolné souvislé podgrupy lib. Lieovy grupy může být vyjádřen jako konečný součin exponenciál prvků gdp. reálné Lieovy algebry.

Př. $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \in SL(2,\mathbb{R})$, ale nelze zapsat jako $e^{\varphi_i a_i}$, kde $a_i \in sl(2,\mathbb{R})$

a_i jsou bezestopé matice

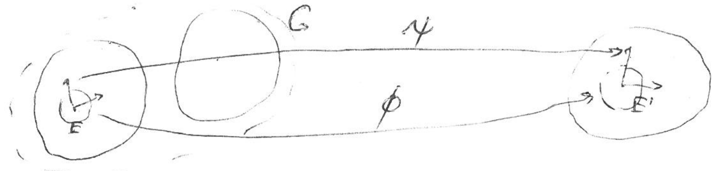
lze však zapsat jako $A = e^{+\ln 2\, a_1} e^{\pi a_2}$

kde $a_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $a_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in sl(2,\mathbb{R})$

- obecně je problém s komponentami souvislosti, neboť exponenciálou se nemůžeme dostat na jinou komp. souvislosti, než tu, která obsahuje identitu

platí tvrzení: Pokud jádro $\mathrm{Ker}\,\phi$ homomorfismu ϕ z Lieovy grupy G na ~~grup~~ Lieovu grupu G' je diskrétní (konečné, či spočetné), pak odvozený homomorfismus ~~LA~~ ψ Lieových algeber $\left(\psi(X) = \frac{d\phi(e^{tX})}{dt}\Big|_{t=0} \right)$ $\mathcal{G}$ a $\mathcal{G}'$ je izomorfismus těchto l. algeber.

Dk.



v malém okolí E není prvek takový, že $\phi(g) = E'$

$\Rightarrow U_E$ a $U_{E'}$ mají stejnou dim.

$\rightarrow \mathcal{G}$ a $\mathcal{G}'$ mají stejnou dim.

$\Rightarrow$ Lieova grupa není plně určena svou Lieovou algebrou, 2 neizomorfní LG mohou mít izomorfní LA → LA určuje strukturu LG pouze ~~k~~ lokálně.

Př. $SU(2)$ pokrývá $SO(3)$, $\mathrm{Ker}\,\phi = \{1, -1\}_2$ (Cornwell Vol II p. 402)

Reprezentace Lieových algeber

obecně lin. repr. Lieovy alg. $\mathcal{G}$ na prostoru V je homom. $\phi : \mathcal{G} \to End(V)$

Spec. ~~repr~~ definice pro matic. repr:

Nechť ~~...~~ $\mathcal{G}$ je Lieova alg. nad F. ~~d~~-rozm. maticová repr. $\mathcal{G}$ nazveme ~~matici~~ matice $D(X)$, $X \in \mathcal{G}$

pro které platí 1) $D(\alpha X + \beta Y) = \alpha D(X) + \beta D(Y)$ pro $\forall\ \alpha, \beta \in F$ a $X, Y \in \mathcal{G}$

2) $D([X,Y]) = [D(X), D(Y)]$ pro $\forall\ X, Y \in \mathcal{G}$

tj jde o homomorfismus $\phi : \mathcal{G} \to End(V)$ ~~...~~ ≈ Lieově algebře matic $d \times d$

- nulová repr. $D(X) = 0$ pro $\forall X \in \mathcal{G}$
- chceme-li specifikovat plně nějakou repr. LA stačí (díky linearitě) vrčit repr. báze tj. matice (operátory) $D(X_i)$ kde X_i je báze $\mathcal{G}$

- ~~koncepty~~ pojmy reducibilní, ireducibilní, ekvivalentní, úplně reducibilní jsou definovány zcela stejně jako pro repr. grup

když ověřujeme ~~i~~redukc. či úplnou redukc., stačí též vyčnit vše pro bázi díky linearitě

- Schurovo lemma platí též pro Lieovy alg. a též důsledek o jednorozm. komplexních ~~1) Nechť~~ ired. repr. ~~LA~~ ~~je~~ abelovské LA ($[X,Y]=0$ pro $\forall X, Y \in \mathcal{G}$) je v platnosti

Připomenutí (maticové): 1) Nechť $D(X)$ a $D'(X)$ jsou dvě ired. repr. L.a. $\mathcal{G}$ dimenze d a d' a nechť $\exists$ $d \times d'$ matice A: $D(X)A = AD'(X)$ pro $\forall X \in \mathcal{G}$

Pak $A = 0$ nebo $d = d'$ a $\det A \neq 0$ tj. D a D' jsou ekvivalentní,

2) Nechť $D(X)$ je d-rozm. komplexní IR L.a. $\mathcal{G}$ a B je $d \times d$ matice komutující s $D(X)$ pro $\forall X \in \mathcal{G}$ $\Rightarrow$ $B = \lambda \mathbb{1}$, $\lambda \in \mathbb{C}$

- Vraťme se ke vztahu repr. LG a ~~též~~ její LA. Abychom mohli počítat repr. LA z repr. LG musíme umět derivovat → pojem analytické repr.

Analytická repr. Lieovy grupy G je repr. G, jejíž prvky $D(g(\alpha_1, \dots \alpha_n))$ jsou analytickými fcemi ~~fcí~~ parametrů (lokálních souřadnic na varietě grupy) $\alpha_1, \dots \alpha_n$, tj. každý prvek matice $D(g)$ lze rozvinout do Tayl. řady v $\alpha_1, \dots \alpha_n$ v jistém okolí identity (obvykle $g(0,0,\dots 0) = e$).

→ na celé grupě roznesením pomocí levého násobení, které je analytické.

Repr. Lieovy alg. z repr. LG

- Nechť $D_G(g)$ je d-rozm. maticová analyt. repr. L. grupy G (lineární maticové)

jejíž odpovídající L. algebru označíme $\mathcal{G}$

1) Matice (operátory) definované pro lib. $X \in \mathcal{G}$ (vzpomeňme, že $e^{tX} \in G$ pro lib. t)

jako
$$D_{\mathcal{G}}(X) = \frac{d}{dt} D_G(e^{tX})\Big|_{t=0} \qquad (*)$$

tvoří d-rozm. repr. Lieovy algebry $\mathcal{G}$

a pro $\forall X \in \mathcal{G}$ a $\forall t \in \mathbb{R}$ platí
$$e^{t D_{\mathcal{G}}(X)} = D_G(e^{tX}) \qquad (**)$$

Dk. Nejde o nic jiného než odvozený homomorfismus Lieových algeber

$D_G(g)$ je homomorfismus z G do $Aut(V)$ d-rozm. prostoru V z nějaké báze.

$D_{\mathcal{G}}(X)$ je potom odv. hom. z $\mathcal{G}$ do $End(V)$ - což je repr. Lieovy alg. $\mathcal{G}$ na V

přičemž díky analyt. má ~~p~~ smysl derivovat rovnici $(**)$

čímž dostaneme $(*)$

2) Pokud jsou $D_G(g)$ a $D'_G(g)$ dvě d-rozm. analyt. repr. L. grupy G a nechť $D_{\mathcal{G}}(X)$ a $D'_{\mathcal{G}}(X)$ jsou odpov. repr. L. a. $\mathcal{G}$ def. pomocí $(*)$

pak $D_{\mathcal{G}}(X)$ je ekviv. $D'_{\mathcal{G}}(X)$ pokud $D_G(g)$ je ekviv. $D'_G(g)$.

Obrácená implikace platí tehdy, je-li G souvislá grupa.

Proč? $\Rightarrow$
$$D'_{\mathcal{G}}(X) = \frac{d}{dt}\left(A^{-1} D_G(e^{tX}) A\right)\Big|_{t=0} = \frac{d}{dt}\left(A^{-1} e^{t D_{\mathcal{G}}(X)} A\right)\Big|_{t=0} =$$
$$= \frac{d}{dt} e^{t A^{-1} D_{\mathcal{G}}(X) A}\Big|_{t=0} = A^{-1} D_{\mathcal{G}}(X) A$$

$\Leftarrow$ z $(**)$ plyne $D'_G(e^{tX}) = A^{-1} D_G(e^{tX}) A$ a je-li G souvislá je tento vztah možno rozšířit na celou grupu G, neboť lib. $g \in G$ lze psát jako konečný součin $\prod_{i=1}^{n} e^{t_i X_i}$

3) Pokud $D_G(g)$ je ~~i~~reducibilní repr., pak $D_{\mathcal{G}}(x)$ je ~~i~~reduc. repr.

Obráceně opět pro souvislou grupu

Podobně pro úplně reducibilní a ireduc. repr.

Dk: exponenciála zachovává strukturu blokově diagon. matic a pomocí 2) se tak reducibilita atd. přenáší z repr. grupy na repr. odp. algebry, neboť např. reduc. znamená ekvivalenci s $\left(\begin{array}{c|c} M_1 & M \\ \hline 0 & M_2 \end{array}\right)$ atd.

4) Pokud $D_G(g)$ je unitární repr., pak $D_{\mathcal{G}}(x)$ je anti-Hermitovská ~~repr.~~ pro $\forall X \in \mathcal{G}$. Obráceně opět pro souvislou grupu.

Dk: Pro unit. repr. platí $D_G^{-1}(g) = D_G^{+}(g)$

$$e^{-t D_{\mathcal{G}}(x)} = e^{t D_{\mathcal{G}}^{+}(x)} \Rightarrow D_{\mathcal{G}}(x) = -D_{\mathcal{G}}^{+}(x)$$

! Pozn. Z výše uvedeného <u>neplyne</u>, že každá repr. $D_{\mathcal{G}}(x)$ L.a. $\mathcal{G}$ dává reprez. grupy G pomocí exp. Pouze to, že <u>pokud $D_G(g)$</u> je <u>anal. repr. grupy G</u>, <u>pak</u> $D_G(g)$ může být obdržena z repr. odp. L.a. $\mathcal{G}$ pomocí exp.

A to i tehdy, pokud $e^{t D_{\mathcal{G}}(x)}$ je dobře definované pro $\forall X \in \mathcal{G}$ a $\forall t \in \mathbb{R}$. Tyto matice nemusí nutně tvořit repr. grupy G, <u>je nutno ověřit</u>.

Z tohoto je také zřejmé, že obecně ne všechny repr. L.alg. $\mathcal{G}$ lze získat ~~d~~ diferencováním repr. přísl. grupy. Toto funguje pokud je G jednoduše souvislou grupou (sama sobě univerz. pokrývací grupou)

Obdobně lze vše udělat pro operátory, i když ~~to~~ je třeba říci, co je anal. závislost oper. na parametrech. Pokud na V máme bázi ψ_k, pak op. odpr. $D_G(e^{tX})$ je $O_G(e^{tX})\psi_j = \sum_{k=1}^{d} D_G(e^{tX})_{kj}\psi_k$ odkud dostaneme

$$O_{\mathcal{G}}(x) = \frac{d}{dt} O_G(e^{tX})\Big|_{t=0} \quad \text{pro} \ \forall X \in \mathcal{G}$$

vše operuje na V a ψ_k je báze repr. G i $\mathcal{G}$

Př. Ne každá repr. LA dává repr. LG

a) Uvažujme grupu $SO(2)$ a její L.algebru $so(2)$

- $so(2)$ je jednorozměrná LA matic 2x2, pro které platí $C = -C^T$ a tedy za bázi můžeme zvolit $L_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ +1 & 0 \end{pmatrix}$ a každý prvek $SO(2)$ můžeme vyjádřit jako $e^{tL_1} = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}$ pro vhodné $t \in \mathbb{R}$
- jako (ireducibilní) repr. $so(2)$ vezmeme

$$D_{so(2)}(L_1) = (z), \text{ kde } z \text{ je lib. komplexní číslo}$$

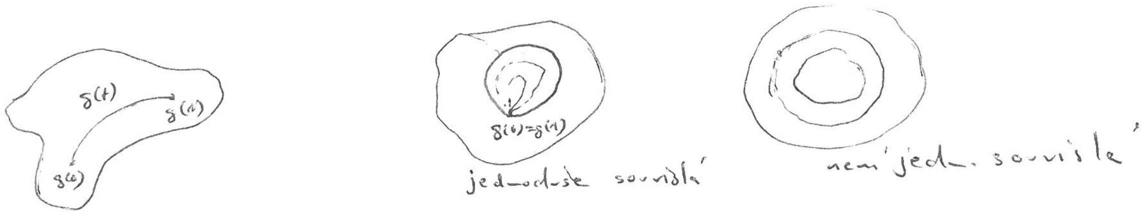
[Jde vskutku o repr. $so(2)$, neboť linearita i nulovost komutátoru jsou splněny navíc $so(2)$ je komutativní, a dle důsledku Schurova lemmatu má $so(2)$ pouze jednorozměrné ired. repr., pro každé z navzájem neekvivalentní]

- exponenciálou této repr. dostaneme $e^{tD(L_1)} = e^{tz}$ aby šlo o repr. $SO(2)$ muselo by platit $e^{(t+2\pi)z} = e^{tz}$, neboť $e^{(t+2\pi)L_1} = e^{tL_1}$ to ovšem obecně není splněno, pouze pokud $z = ik$, kde $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ pouze pro tato z dostáváme jednoznačnost

b) Dalším příkladem je $SO(3)$ a její LA $so(3) \sim su(2)$

Pozn. k univerzální pokrývací grupě

- již bylo zmíněno, že Lieova grupa je <u>souvislá</u>, pokud ~~všech~~ lib. ~~dva~~ prvky grupy lze spojit spojitou křivkou, a <u>jednoduše souvislá</u>, pokud každá uzavřená křivka na G je „smrsknutelná" do bodu.



Př. $SO(3)$ je souvislá, ale ne jednoduše × $SU(2)$

- centrum $Z(G)$ grupy G = podgrupa všech prvků, které komutují se všemi prvky G, tj. $Z(G) = \{h \in G : hg = gh \text{ pro } \forall g \in G\}$

  $\Rightarrow$ $Z(G)$ je abelovská a invariantní podgrupa = centrální inv. podgr.(

- základní výsledek:

  Nechť G je souvislá L. grupa. Pak $\exists$ <u>jednoduše souvislá</u> L. g. $\tilde{G}$ (jediná až na izomorfismus) taková, že

  1) G je izomorfní faktor-grupě $\tilde{G}/K$, kde K je <u>diskrétní</u> centrální inv. podgrupa $\tilde{G}$.
  2) pokud G je jednoduše souvislá, je $G \sim \tilde{G}$
  3) reálná L.a. grupy $\tilde{G}$ je izomorfní reálné L.a. G
  4) <u>každá</u> repr. reálné L. alg. $\tilde{G}$ je L.a. některé repr. L.grupy $\tilde{G}$.

  díky jednoznačnosti se grupě $\tilde{G}$ říká univerzální pokrývací grupa a též se používá, že G je pokryta grupou $\tilde{G}$.

  Př. $SU(2)$ je un. pokr. grupou $SO(3)$

- vztah mezi reprezentacemi G a $\tilde{G}$

  Každá repr. grupy $\tilde{G}$ dává repr. grupy G pomocí ~~izo~~ homomorfismu $\phi : \tilde{G} \to G$ ~~který lze~~ s jádrem $\mathrm{Ker}\,\phi = K$

  $$D_G(\phi(g)) = D_{\tilde{G}}(g)$$

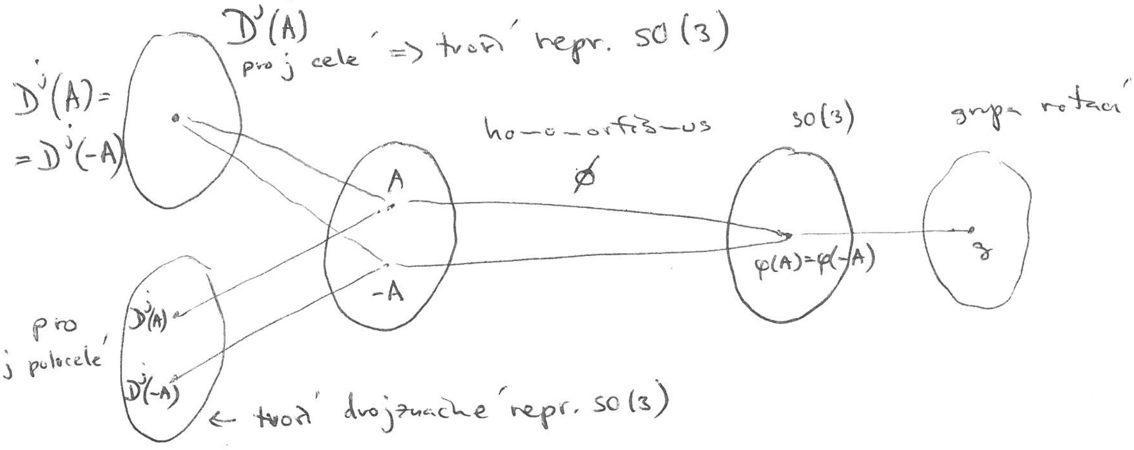
  ~~pokud~~ pro lib. ~~kde~~ $k \in K$ ~~pokud~~ platí

  $$D_{\tilde{G}}(g) = D_{\tilde{G}}(gk) \quad \text{pro } \forall g \in \tilde{G}$$

• pokud $D_{\tilde G}(g) \neq D_{\tilde G}(kg)$ mluvíme o víceznačných reprezentacích

více = # prvků K, ~~pro~~ které mají různé reprezentace

Př. vztah repr. $SU(2)$ a $SO(3)$



=> vidíme, že každá repr. $SO(3)$ dává repr. $SU(2)$, a obecně každá repr. G dává repr. $\tilde G$ pomocí

$$D_{\tilde G}(gK) = D_G(\phi(g))$$

• lze též ukázat, že pokud Lieovy alg. $\mathcal{G}_1$ a $\mathcal{G}_2$ dvou jednoduše souvislých L. grup $\tilde G_1$ a $\tilde G_2$ jsou izomorfní, pak $\tilde G_1$ a $\tilde G_2$ jsou izomorfní

=> říkáme, že $\tilde G$ je též univer. pokrývací grupa Lieovy algebry $\mathcal{G}$.

neboli ke každé reálné L. alg. $\mathcal{G}$ existuje jediná (až na izom.) jednoduše souvislá Lieova grupa $\tilde G$ taková, že každá grupa G, jejíž L. alg. je $\mathcal{G}$, je izomorfní $\tilde G/K$, kde K je nějaká diskrétní centrální podgrupa $\tilde G$

• obecně ne každá $\tilde G$ je lineární Lieova grupa (tj. grupa matic), ani pro G lineární

ale platí to pro kompaktní a abelovské Lieovy grupy