Reprezentace SO(2) pomocí homogenních polynomů - podrobněji

- lib. prvek SU(2) lze zapsat $A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b^* & a^* \end{pmatrix}$ $|a|^2+|b|^2=1$

  který působí na $\mathbb{C}^2$: $\begin{pmatrix} \eta \\ \xi \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} \eta' \\ \xi' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\eta + b\xi \\ -b^*\eta + a^*\xi \end{pmatrix}$

- uvažujme homogenní polynomy f^n v proměnných η a ξ, n = stupeň polynomu

  pro $n=0$: $f^0(\eta,\xi) = c$ = konst. $\Rightarrow$ triviální reprezentace $\psi_1 = 1$

  působení SO(2): $U(A)f^0(\eta,\xi) = f^0(\eta,\xi)$ $\qquad D^{(0)}(A) = (1)$

  pro $n=1$: $f^1(\eta,\xi) = c_1\xi + c_2\eta = c_1\psi_1 + c_2\psi_2$, kde $\psi_2 = \eta$, $\psi_1 = \xi$ je báze těchto polynomů

  působení $U_A f(\eta,\xi) = f(A^{-1}(\eta,\xi)) = f(a^*\eta - b\xi,\ b^*\eta + a\xi)$ neboť $A^{-1} = A^+$

  což lze psát ~~jako~~ pro bázi jako $U_A\psi_i = \sum_{k=1}^{2} \psi_k D_{ki}(A)$, konkrétně

$$U_A\xi = b^*\eta + a\xi$$
$$U_A\eta = a^*\eta - b\xi \qquad \Rightarrow \qquad D(A) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b^* & a^* \end{pmatrix}$$

reprezentace ekvivalentní repr. dané maticemi A, neboť $D(A) = SAS^{-1}$, kde $S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

pro $n=2$: $f^2(\eta,\xi) = c_1\xi^2 + c_2\xi\eta + c_3\eta^2 = \sum_{i=1}^{3} c_i\psi_i$

$$U_A\psi_1 = U_A\xi^2 = (b^*\eta + a\xi)^2 = (b^*)^2\eta^2 + 2b^*a\,\eta\xi + a^2\xi^2$$
$$= \psi_1 a^2 + \psi_2\, 2b^*a + \psi_3 (b^*)^2$$
$$U_A\psi_2 = U_A\xi\eta = (a^*\eta - b\xi)(b^*\eta + a\xi) = \psi_1(-ab) + \psi_2(a^*a - bb^*) + \psi_3 a^*b^*$$
$$U_A\psi_3 = U_A\eta^2 = (a^*\eta - b\xi)^2 = \psi_1 b^2 + \psi_2(-2a^*b) + \psi_3(a^*)^2$$

$$\Rightarrow \quad D(A) = \begin{pmatrix} a^2 & -ab & b^2 \\ 2ab^* & a^*a - b^*b & -2a^*b \\ (b^*)^2 & a^*b^* & (a^*)^2 \end{pmatrix}$$

též reprezentace SO(2) - 3-rozměrná, avšak není unitární

atd.

- zavádí se báze $(n+1)$-rozměrné repr. grupy SO(2), která už je unitární, takto:

  položme $n = 2j$, pak $j = 0, \frac{1}{2}, 1, \ldots$ a máme $2j+1$ polynomů

$$\psi^j_\mu(\eta,\xi) = \frac{\eta^{j+\mu}\xi^{j-\mu}}{\sqrt{(j+\mu)!(j-\mu)!}}, \quad \mu = -j,\ldots,j$$

tento faktor je právě kvůli unitaritě

nyní pro $j=1$ $(n=2)$ máme

$$\psi^1_1 = \frac{\xi^2}{\sqrt{2}},\ \psi^1_0 = \xi\eta,\ \psi^1_1 = \frac{\eta^2}{\sqrt{2}} \quad \Rightarrow \quad D^{(1)}(A) = \begin{pmatrix} a^2 & -\sqrt{2}ab & b^2 \\ \sqrt{2}b^*a & |a|^2-|b|^2 & -\sqrt{2}a^*b \\ (b^*)^2 & \sqrt{2}(ab)^* & (a^*)^2 \end{pmatrix}$$

což už je unitární

• obecně lze ukázat:

$$U_A \psi^j_\mu(\eta,\xi) = \frac{(a^*\eta - b\xi)^{j+\mu}(b^*\eta + a\xi)^{j-\mu}}{\sqrt{(j+\mu)!}\ \sqrt{(j-\mu)!}} =$$

$$= \sum_{\mu'} \psi^j_{\mu'}(\eta,\xi) \underbrace{\sum_{k} (-1)^k \frac{\sqrt{(j+\mu)!(j-\mu)!\,(j+\mu')!\,(j-\mu')!}}{k!(j-\mu'-k)!\,(j+\mu-k)!\,(k+\mu'-\mu)!} a^{j-\mu'-k} (a^*)^{j+\mu-k} \times b^k (b^*)^{k+\mu'-\mu}}_{D^{(j)}_{\mu'\mu}(A)}$$

kde má smysl

speciálně pro $\mu' = j$ (spodní řádek)

$$D^{(j)}_{j\mu}(A) = \sqrt{\frac{(2j)!}{(j+\mu)!(j-\mu)!}} (a^*)^{j+\mu} (b^*)^{j-\mu}$$

• lze ukázat (viz např. Wigner (1959), kap. 15), že jde o unitární, ireducibilní komplexní reprezentace $SU(2)$ a že $SU(2)$ nemá žádné další IR

např. ireducibilita se ukáže tak, že jediná matice, která komutuje s $D^{(j)}_{\mu'\mu}(A)$ je násobkem $\mathbb{1}$, neboť speciálně pro $b=0$, $a = e^{-\frac{1}{2}i\varphi}$ máme

$$D^{(j)}_{\mu'\mu}\left(A(b=0, a=e^{-\frac{1}{2}i\alpha})\right) = \delta_{\mu\mu'} e^{i\mu\varphi}$$

a má-li být $SD^{(j)} = D^{(j)}S \Rightarrow S$ musí být diagonální

a protože $D^{(j)}_{j\mu}(A)$ jsou obecně všechny nenulové (pouze pro speciální volbu a, b jsou nulové) musí být i všechny prvky na diagonále rovny, neboť musí platit

$$D^{(j)}_{j\mu} S_{\mu\mu} = S_{jj} D^{(j)}_{j\mu} \quad \text{pro } \forall \mu = -j, \dots j \Rightarrow S_{\mu\mu} = S_{jj}$$

a to, že jsou to $\forall$ IR $SU(2)$, je možné ukázat pomocí relací ortogonalit tzv. charakterů ~~t~~ ired. repr. (stop matic $D^{(j)}$), viz později

• reprezentace příslušné Lieovy algebry $su(2)$ bychom dostali např. tak, že bychom přeparametrizovali A pomocí

$$a = \cos\frac{\varphi}{2} - i n_3 \sin\frac{\varphi}{2}$$
$$b = -n_2 \sin\frac{\varphi}{2} - i n_1 \sin\frac{\varphi}{2}$$

ve shodě s nalezenými jednopar. podgrupami

$$e^{\varphi C} = \mathbb{1}\cos\frac{\varphi}{2} - i(\vec{n}\cdot\vec{\sigma})\sin\frac{\varphi}{2}$$

např. pro $n_3 = 1$, $n_2 = n_1 = 0$ je $(a = e^{-i\frac{\varphi}{2}}, b = 0)$

$$D^{(j)}_{\mu'\mu} = \delta_{\mu\mu'} e^{i\mu\varphi} \Rightarrow D^{(j)}(X_3) = \begin{pmatrix} -j & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -j+1 & & 0 \\ 0 & 0 & & 0 \\ 0 & \dots & & j \end{pmatrix}$$

zvolena hermitovská matice

atd.

Reprezentace SO(3) z repr. SU(2)

- ired. repr. SO(3) lze konstruovat i přímo jako řešení Laplaceovy rovnice

$$\Delta f(x,y,z) = 0 \quad (\text{která je invariantní při rotacích})$$

ve formě homogenních polynomů určitého stupně l

$\Rightarrow$ ve sféř. souř. jde o řešení $f = r^l Y_{lm}(\theta,\varphi)$, kde

Y_{lm} jsou známé kulové fce splňující rovnici

$$L^2 Y_{lm} = -\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right) Y_{lm} = l(l+1)\, Y_{lm}$$

která má $2l+1$ nezávislých řešení pro $m = -l, \dots, l$, přičemž

závislost na φ je dána pomocí $Y_{lm} = \dfrac{\Theta_{lm}(\theta)}{\sqrt{2\pi}}\, e^{im\varphi}$

- lze ukázat, že těchto $2l+1$ nezávislých řešení tvoří bázi IR grupy SO(3)

tj. $$U(\vec{n},\varphi)\, r^l Y_{lm}(\theta,\varphi) = \sum_{m'=-l}^{l} D^{(l)}_{m'm}(\vec{n},\varphi)\, r^l Y_{lm'}(\theta,\varphi)$$

(např. tak, že jediná matice komut. s $D^{(l)}$ je násobkem jednotkové)

a navíc jde o všechny IR (z relací ortog. pro charaktery - viz Wigner)

- Tyto IR lze získat též z IR grupy SU(2), neboť víme, že existuje

2-1 homomorfismus mezi SU(2) a SO(3) (matici A a $-A$ odpovídá jediná)

- matici $A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b^* & a^* \end{pmatrix}$ odpovídá matice

$$R_A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(a^2+a^{*2}-b^2-b^{*2}) & \frac{i}{2}(a^2-a^{*2}+b^2-b^{*2}) & a^*b^*+ab \\ \frac{i}{2}(a^{*2}-a^2+b^2-b^{*2}) & \frac{1}{2}(a^2+a^{*2}+b^2+b^{*2}) & i(a^*b^*-ab) \\ -(a^*b+ab^*) & i(a^*b-ab^*) & (aa^*-bb^*) \end{pmatrix}$$

- z repr. SU(2) daných maticemi $D^{(j)}_{\mu'\mu}(A)$ lze získat repr. SO(3) pro

rotaci R_A danou např. Euler. úhly α, β, γ např. pomocí substituce

$$a = e^{-i\frac{\alpha}{2}} \cos\frac{\beta}{2}\, e^{-i\frac{\gamma}{2}}, \quad b = -e^{-i\frac{\alpha}{2}} \sin\frac{\beta}{2}\, e^{i\frac{\gamma}{2}}$$

avšak pozor!, jednoznačné repr. pouze pro celočíselné j, pro které

$D(A) = D(-A)$, pro poločíselné je $D(-A) = -D(A)$

a tedy dostáváme tzv. dvojznačné repr. SO(3)

- jiná možnost než $D(A) = \pm D(-A)$ není díky Schur. lemmatu, neboť

musí platit $D(A)D(-1) = D(-1)D(A)$ (-1 komutuje s A)

$\Rightarrow D(-1) = \lambda \mathbb{1}$ a navíc $D^2(-1) = \mathbb{1}$ a tedy $\lambda^2 = 1$, $\lambda = \pm 1$

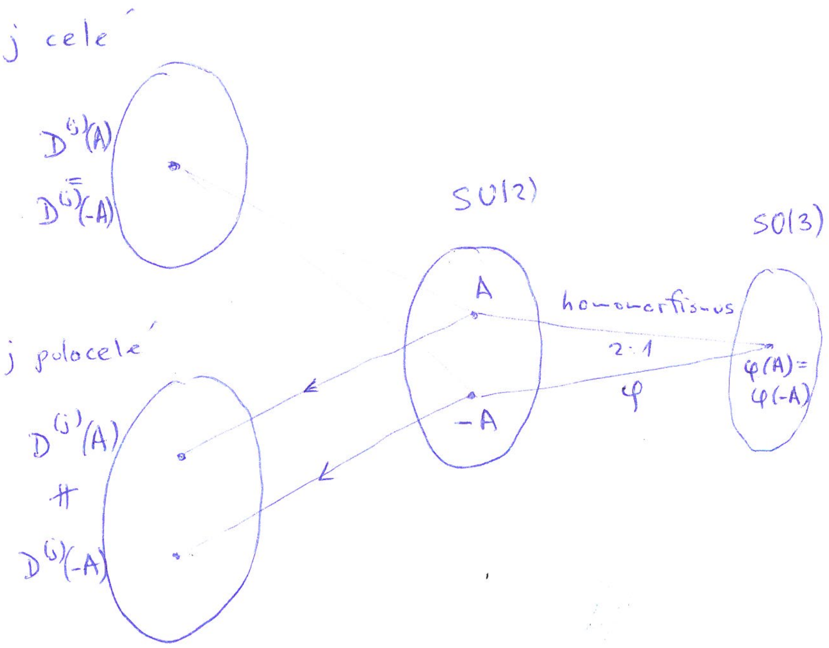
- dostaneme takto všechny IR grupy SO(3), pokud máme všechny IR SU(2)

Př $$D^{(1/2)}(\alpha,\beta,\gamma) = \begin{pmatrix} \cos\frac{\beta}{2}\, e^{-i\frac{\alpha+\gamma}{2}} & -\sin\frac{\beta}{2}\, e^{-i\frac{\alpha-\gamma}{2}} \\ \sin\frac{\beta}{2}\, e^{i\frac{\alpha-\gamma}{2}} & \cos\frac{\beta}{2}\, e^{i\frac{\alpha+\gamma}{2}} \end{pmatrix} = -D^{1/2}(\alpha+2\pi,\beta,\gamma)$$ [vyskočí faktory $e^{i\pi}$ nebo $e^{-i\pi}$ „$=-1$"]

víme
$$A(\alpha,\beta,\gamma) = \underbrace{\begin{pmatrix} e^{-i\frac{\alpha}{2}} & 0 \\ 0 & e^{i\frac{\alpha}{2}} \end{pmatrix}}_{\text{odpovídá rotaci kolem } z \text{ o } \alpha} \underbrace{\begin{pmatrix} \cos\frac{\beta}{2} & -\sin\frac{\beta}{2} \\ \sin\frac{\beta}{2} & \cos\frac{\beta}{2} \end{pmatrix}}_{\text{kolem } y \text{ o } \beta} \underbrace{\begin{pmatrix} e^{-i\frac{\gamma}{2}} & 0 \\ 0 & e^{i\frac{\gamma}{2}} \end{pmatrix}}_{\text{kolem } z \text{ o } \gamma}$$

- obecně tedy „celočíselné" ($j=0,1,2..$) repr. SU(2) dávají IR grupy SO(3)

„poločíselné" ($j=\frac{1}{2},\frac{3}{2}...$) repr. SU(2) dávají dvojznačné repr. SO(3) (nejde o repr. SO(3) v pravém slova smyslu)



neboli 1) každá repr. SO(3) dává též repr. SU(2) pomocí φ

2) každá repr. SU(2), pro niž $D(A) = D(-A)$ dává repr. SO(3)

3) existují repr. SU(2), pro něž $D(A) = -D(-A)$ – tyto dávají dvojznačné repr. SO(3)

Třídy sdružených prvků grup SU(2), SO(3) a O(3)

Rotace ve 3-rozm. prostoru

$$D(\vec{n},\varphi)_{jk} = \delta_{jk}\cos\varphi + n_j n_k (1-\cos\varphi) + \varepsilon_{jkl} n_l \sin\varphi$$

$n_i n_i = 1$
$-\pi < \varphi \le \pi$
$n_3 > 0 \wedge (n_3 = 0 \wedge n_2 > 0) \wedge$
$\wedge (n_3 = n_2 = 0 \wedge n_1 = 1)$

odpovídající matice $A(\vec{n},\varphi) \in SU(2)$ jsou

$$A(\vec{n},\varphi) = \mathbb{1}\cos\frac{\varphi}{2} + i\, n_i \sigma_i \sin\frac{\varphi}{2}$$ ovšem nyní $-2\pi < \varphi \le 2\pi$

tj. 1 rotaci ve R^3 odpovídají 2 matice A a $-A$, neboli φ a $\varphi + 2\pi$ odpovídají stejné $D(\vec{n},\varphi)$

Třídy: 2 prvky SU(2) patří do stejné třídy sdružených prvků, ~~pokud~~ právě když odpovídají rotacím o stejný úhel (tj. obě rotace mají stejné $|\varphi|$). Obdobně pro 2 rotace z SO(3). Konečně 2 prvky z O(3) patří do stejné třídy, právě když mají stejnou $|\varphi|$ (u nevlastních rotací vezmeme část, která je vlastní rotací) a navíc pokud jsou buď obě vlastní, nebo obě nevlastní rotace.

Dk: Pro SU(2): pro 2 prvky ze stejné třídy musí platit

$$\mathrm{Tr}\, A(\vec{n}_1,\varphi_1) = \mathrm{Tr}\, A(\vec{n}_2,\varphi_2)$$ neboli $2\cos\frac{\varphi_1}{2} = 2\cos\frac{\varphi_2}{2}$

pro $-2\pi \le \varphi_1, \varphi_2 \le 2\pi$ to platí pouze tehdy, pokud $|\varphi_1| = |\varphi_2|$

a tedy nutnou podmínkou je $|\varphi_1| = |\varphi_2|$

Je to ale i postačující podmínka, neboť vlastní čísla $A(\vec{n}_1,\varphi_1)$ jsou $e^{i\frac{\varphi_1}{2}}$ a $e^{-i\frac{\varphi_1}{2}}$, což jsou též vlastní čísla $A(\vec{n}_2,\varphi_2)$, pokud $|\varphi_1| = |\varphi_2|$

$\Rightarrow$ existují S_1 a $S_2 \in SU(2)$: $S_1 A(\vec{n}_1,\varphi) S_1^{-1} = \begin{pmatrix} e^{i\frac{\varphi_1}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-i\frac{\varphi_1}{2}} \end{pmatrix} = S_2 A(\vec{n}_2,\varphi_2) S_2^{-1}$

neboli $A(\vec{n}_1,\varphi) = (S_1^{-1} S_2)\, A(\vec{n}_2,\varphi_2)\, (S_1^{-1} S_2)^{-1}$ a protože $S_1^{-1} S_2 \in SU(2)$ jde o sdružené prvky.

pro SO(3) máme podobný vztah díky homomorfismu z SU(2) na SO(3) a nutnou podmínkou nyní je $1 + 2\cos\varphi_1 = 1 + 2\cos\varphi_2$ $\varphi_1, \varphi_2 \in (-\pi, \pi\rangle$ a dostáváme opět, že $|\varphi_1| = |\varphi_2|$