Některé vlastnosti Lieových grup a jejich algeber

- Prostota a poloprostota

  - LG je prostá, pokud nemá žádnou (normální) invariantní Lieovu podgrupu kromě triviálních (může mít diskrétní)

    poloprostá, pokud nemá žádnou abelovskou inv. podgrupu (ale může obsahovat neabelovskou inv. podgrupu)

    Př. $SO(3)$ je prostá

    $SO(3) \times SO(3)$ je poloprostá ($SO(3)$ je neab. inv. podgrupa)

  - Lieova algebra invariantní podgrupy H Lieovy grupy G tvoří podalgebru h Lieovy algebry g, přičemž platí

$$(*) \qquad [A_k, X_i] = \sum_l a_{ikl} A_l \quad \text{pro } \forall X_i \in g \text{ a } A_k \in h$$

říkáme, že h je invariantní podalgebra (ideál) g

Dk $(*)$: komutátoru $[A_k, X_i]$ odpovídá křivka v G daná komutátorem $ghg^{-1}h^{-1}$ pro jednoparam. podgrupy příslušné X_i a A_k, tj. křivka (pro $t>0$)

$$C(t) = e^{\sqrt{t}A_k} e^{\sqrt{t}X_i} e^{-\sqrt{t}A_k} e^{-\sqrt{t}X_i} \simeq 1 + t[A_k, X_i] + O(t^2)$$

pokud je H invariantní podgrupou a A_k z její Lieovy algebry pak i křivka $e^{\sqrt{t}X_i} e^{-\sqrt{t}A_k} e^{-\sqrt{t}X_i}$ leží v H a tedy $C(t)$ také $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ tečný vektor k $C(t)$ je z h a lze ho tedy vyjádřit jako lin. kombinaci A_k

---

- LA je prostá, když nemá žádný (vlastní) netriviální ideál

  poloprostá, když nemá abelovský (vlastní) ideál, tj. když neplatí $[A_k, A_l] = 0$ pro $\forall A_k, A_l \in h$

- je zřejmé, že z prostoty či poloprostoty grupy plyne totéž pro příslušné Lieovy algebry

Adjungovaná (přidružená) reprezentace Lieovy algebry (a grupy)

- důležitá při studiu struktury poloprostých LA
- jde o působení LA na sobě jakožto vekt. prostoru

• Nechť $\mathfrak{g}$ je n-rozm. LA s bází $e_1, \dots, e_n$. Pro lib. $x \in \mathfrak{g}$ definujme matici $ad(x)$ pomocí

$$[x, e_j] = \sum_{k=1}^{n} ad(x)_{kj}\, e_k \qquad \text{pro } j = 1, \dots, n$$

Tyto matice tvoří tzv. <u>adjungovanou repr.</u> LA $\mathfrak{g}$, neboť díky linearitě komutátoru platí

$$ad(\alpha x + \beta y) = \alpha\, ad(x) + \beta\, ad(y)$$

a pomocí Jacobiho identity dostaneme

$$\sum_{k=1}^{n} ad([x,y])_{kj}\, e_k = [[x,y], e_j] = -[[y, e_j], x] - [[e_j, x], y] =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left\{ -ad(y)_{kj} [e_k, x] + ad(x)_{kj} [e_k, y] \right\} =$$

$$= \sum_{k,\ell=1}^{n} \left\{ ad(y)_{kj}\, ad(x)_{\ell k}\, e_\ell - ad(x)_{kj}\, ad(y)_{\ell k}\, e_\ell \right\} =$$

$$= \sum_{\ell=1}^{n} [ad(x), ad(y)]_{\ell j}\, e_\ell$$

neboli

$$ad([x,y]) = [ad(x), ad(y)]$$

• Matice $ad(e_p)$ jsou dány pomocí strukturních konstant:

$$[e_p, e_\ell] = \sum_{k=1}^{n} c^k_{p\ell}\, e_k \quad \Rightarrow \quad ad(e_p)_{k\ell} = c^k_{p\ell}$$

• Maticím $ad(x)$ odpovídají operátory na $\mathfrak{g}$ působící pomocí komutátoru $ad(x)y = [x,y]$

- pro <u>lineární</u> (tj. maticovou) Lieovu grupu odpovídající dané LA $\mathfrak{g}$ lze zavést <u>adjungovanou reprezentaci</u> $Ad(A)$ Lieovy grupy G pomocí působení na matice LA $\mathfrak{g}$

$$\underset{\text{operátor na } \mathfrak{g}}{Ad(A)X} = AXA^{-1} = \sum_{k=1}^{n} \underset{\text{matice}}{Ad(A)_{kj}}\, E_k \qquad \text{kde } A \in G$$

a E_k je báze maticové LA příslušející matic. LG G

a platí

$$\exp(t\, ad(X)) = Ad(\exp(tX)) \qquad \text{pro } \forall X \in \mathfrak{g}$$

$$ad(X) = \frac{d}{dt} Ad(\exp(tX)) \Big|_{t=0}$$

- pro obecnou Lieovu grupu je $Ad(g)$ definováno pomocí automorfismu grupy sdružení $I_g : G \to G$, $h \mapsto ghg^{-1}$

$Ad(g)$ je odvozený automorfismus příslušné LA, neboli platí

$$g e^X g^{-1} = e^{Ad(g) X}$$

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "I_g"] & G \\ \mathfrak{g} \arrow[u, "\exp"] \arrow[r, "Ad(g)"'] & \mathfrak{g} \arrow[u, "\exp"'] \end{tikzcd}$$

Killingova forma

- bilineární forma $B(x,y)$ na Lieově algebře $\mathcal{G}$ definovaná pomocí

$$B(x,y) = Tr\{ad(x)\,ad(y)\}$$

kde $ad(x)$ je matice reprezentující $x \in \mathcal{G}$ v adjungované repr.

- pro bázi $e_1, \dots, e_n$ dostaneme

$$B(e_i, e_j) = \sum_{k,\ell} ad(e_i)_{k\ell}\, ad(e_j)_{\ell k} =$$

$$= \sum_{k,\ell} c^k_{i\ell}\, c^\ell_{jk} = g_{ij}$$ ← Killingova-Cartanova metrika (tenzor 2. řádu)

lze ukázat, že je nezávislá na bázi a symetrická $g_{ij} = g_{ji}$

Př. pro $\mathcal{G} = su(2)$ máme bázi $e_i = -\frac{i}{2}\sigma_i$ $\left[\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right]$ Pauliho matice

pro kterou $[e_i, e_j] = \varepsilon_{ijk} e_k$

a tedy $ad(e_1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\Rightarrow ad(e_1)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ apod. pro $ad(e_2)^2$ a $ad(e_3)^2$

$ad(e_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\Rightarrow ad(e_1)\,ad(e_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ apod.

$ad(e_3) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\Rightarrow B(e_i, e_j) = Tr\{ad(e_i)\,ad(e_j)\} = -2\delta_{ij} =: g_{ij}$

tj. g_{ij} je nedegenerovaná a $\det g = -8 < 0$

- obecně lze ukázat, že pro reálné LA platí

1) LA $\mathcal{G}$ je řešitelná (tj. $\exists k > 0$ takové, že $\mathcal{G}^{(k)} = 0$, kde $\mathcal{G}^{(k)} = [\mathcal{G}^{(k-1)}, \mathcal{G}^{(k-1)}] = \{[a,b],\ a,b \in \mathcal{G}^{(k-1)}\}$ a $\mathcal{G}^{(0)} = \mathcal{G}$)
$\iff B(x,y) = 0$ pro $\forall x,y \in \mathcal{G}^{(1)} = [\mathcal{G},\mathcal{G}]$
<u>Cartanovo kritérium pro řešitelné LA</u>

2) LA $\mathcal{G}$ je poloprostá $\iff B(x,y)$ je nedegenerovaná, tj. $\det g \neq 0$
<u>Cartanovo kritérium poloprostoty</u>

3) LA $\mathcal{G}$ kompaktní LG $\iff B(x,y)$ je negativně definitní, tj. $\det g < 0$

$\Rightarrow$ definice kompaktnosti Lieovy algebry, přestože jde o vekt. prostor (a tedy nekomp. top. prostor)

Tedy:
Reálná LA je kompaktní, pokud $B(x,y)$ je negativně definitní

$\Rightarrow$ Každá kompaktní reálná LA (odp. kompaktní LG) je poloprostá (a tedy odp. LG je poloprostá)

- Rank Lieovy grupy

= největší počet komutujících lineárně nezávislých prvků příslušné Lieovy algebry

Př. 1) translační grupa ve 3D - rank 3 ($p_i = -i\frac{\partial}{\partial x_i}$ komutují)

2) SO(3) - rank 1 (pouze $[L_1, L_1] = 0$)

3) SU(3) - rank 2 (izospin T_3 a hypernáboj Y komutují)

obecněji SU(N) má rank N-1 -

- Lieovu algebru tvoří bezestopé matice $C = -C^+$
- na diagonále můžou být ryze imaginární čísla
- je (N-1). lin. nezávislých diagonálních matic se nulovou stopou

4) $SO(3) \times SO(3)$ - rank 2 $[J_1^{(1)}, J_1^{(2)}] = 0$ - 2 nezávislé částice

- Casimirův operátor Lieovy algebry

- ve fyzice jsou prvky X_i Lieovy algebry operátory na Hilb. prostoru

pokud nalezneme operátor C, který je funkcí (obvykle polynomem) X_i

a který komutuje se všemi X_i, pak ho nazveme Casimirovým operát.

tj.

$$C = C(X_1, \dots, X_n) \quad \text{přičemž} \quad [C, X_i] = 0 \quad \text{pro} \ \forall X_i$$

- obecně jde o operátory na reprezentačním prostoru a jde o fci oper. reprezentujících X_α

- nechť máme poloprostou Lieovu algebru, tj. $|g_{\mu\nu}| \neq 0 \Rightarrow$ existuje $g^{\mu\nu}$ inverzní ke $g_{\mu\nu}$ tj. $(g^{-1})_{\mu\nu} = g^{\mu\nu}$

neboli $g^{\mu\alpha} g_{\alpha\nu} = \delta^\mu_\nu$

pak

$$C = g^{\mu\nu} X_\mu X_\nu$$

je Casimirův operátor (kvadratický)

Dk: $[C, X_\alpha] = g^{\mu\nu}[X_\mu X_\nu, X_\alpha] =$

$= g^{\mu\nu} X_\mu [X_\nu, X_\alpha] + g^{\mu\nu}[X_\mu, X_\alpha] X_\nu$ ← přeznačím $\mu \leftrightarrow \nu$ a využiji symetričnosti $g_{\mu\nu}$

$= g^{\mu\nu} c^\beta_{\nu\alpha} X_\mu X_\beta + g^{\mu\nu} c^\beta_{\mu\alpha} X_\beta X_\nu =$

$= g^{\mu\nu} c^\beta_{\nu\alpha} (X_\mu X_\beta + X_\beta X_\mu) =$

pomocí $g_{\mu\nu}$ lze definovat z tenzoru strukt. konstant $c^\kappa_{\mu\nu}$ nový úplně antisymetrický tenzor

$$c_{\varrho\nu\alpha} = g_{\varrho\sigma} c^\sigma_{\nu\alpha}$$

inv. vztah

$$c^\beta_{\nu\alpha} = g^{\beta\varrho} c_{\varrho\nu\alpha}$$

úplnou antisymetričnost lze dokázat rozepsáním $g_{\varrho\sigma}$ a užitím Jacobiho identity pro strukt. konst.

$= g^{\mu\nu} g^{\beta\varrho} c_{\varrho\nu\alpha} (X_\mu X_\beta + X_\beta X_\mu) =$

$= 0$ neboť $g^{\mu\nu} g^{\beta\varrho} (X_\mu X_\beta + X_\beta X_\mu)$ je symetrické v ν a ϱ a $c_{\varrho\nu\alpha}$ antisymetrické

Jacobiho identita pro strukturní konstanty

: pro lib. a, b, c z Lieovy algebry platí

$$[a,[b,c]] + [b,[c,a]] + [c,[a,b]] = 0$$

speciálně pro prvky báze e_i, pro něž $[e_i, e_j] = \sum_k c_{ij}^k e_k$

dostaneme

$$[e_m,[e_i,e_j]] + \text{c.z.} =$$

$$= [e_m, c_{ij}^k e_k] + [e_i, c_{jm}^k e_k] + [e_j, c_{mi}^k e_k] =$$

$$= \left(c_{ij}^k c_{mk}^\ell + c_{jm}^k c_{ik}^\ell + c_{mi}^k c_{jk}^\ell\right) e_\ell = 0$$

Úplná antisymetričnost tenzoru $c_{\rho\nu\alpha} = g_{\rho\mu} c^\mu_{\nu\alpha}$

dle definice $g_{\rho\mu}$: $\quad c_{\rho\nu\alpha} = c^\gamma_{\rho\beta} c^\beta_{\mu\gamma} c^\mu_{\nu\alpha}$

spočteme

1) $c_{\nu\rho\alpha} = c^\gamma_{\nu\beta} c^\beta_{\mu\gamma} c^\mu_{\rho\alpha} = \left(c^\gamma_{\nu\beta} c^\mu_{\alpha\gamma}\right) c^\beta_{\rho\mu} + c^\gamma_{\nu\beta} c^\mu_{\gamma\rho} c^\beta_{\alpha\mu} =$ ↙ Jacobi

Jacobi pro $-c^\mu_{\rho\alpha} c^\beta_{\gamma\mu}$

$$= \cancel{-c^\beta_{\rho\mu} c^\gamma_{\beta\alpha} c^\mu_{\nu\gamma}} - c^\beta_{\rho\mu} c^\gamma_{\alpha\nu} c^\mu_{\beta\gamma} + \cancel{c^\gamma_{\nu\beta} c^\mu_{\gamma\rho} c^\beta_{\alpha\mu}} = -c^\beta_{\rho\mu} c^\mu_{\gamma\beta} c^\gamma_{\nu\alpha}$$

$$= -c_{\rho\nu\alpha}$$

$$+ c^\beta_{\rho\mu} c^\gamma_{\alpha\beta} c^\mu_{\nu\gamma} - c^\mu_{\rho\gamma} c^\beta_{\alpha\mu} c^\gamma_{\nu\beta} = 0$$

2) antisym. v indexech ν, α z antisymetrie $c^\mu_{\nu\alpha}$

3) a konečně $\quad c_{\alpha\nu\rho} \overset{2)}{=} -c_{\alpha\rho\nu} \overset{1)}{=} +c_{\rho\alpha\nu} \overset{2)}{=} -c_{\rho\nu\alpha}$

Racahův teorém

1) pro poloprostou LG ranku l existuje l Casimirových operátorů

$$C_\lambda(X_1,\dots,X_n) \qquad \lambda = 1,\dots,l$$

které jsou fcemi prvků Lieovy algebry (infinit. operátorů) této grupy a které komutují jednak se všemi X_i a jednak mezi sebou, tj.

$$[C_\lambda, X_i] = 0 \ \ \forall \lambda, i \qquad \text{a} \qquad [C_\lambda, C_{\lambda'}] = 0 \ \ \forall \lambda, \lambda'$$

2) Vlastní hodnoty těchto operátorů jednoznačně charakterizují ireducibilní repr. dané grupy, neboť jsou na ired. inv. podprostoru (vůči dané grupě) násobkem jednotkového operátoru $c_\lambda 1\!\!1$ (dle Schurova lemmatu a komutují se všemi operátory ~~grupy~~ tvořícími ireduc. repr. dané grupy)

$\Rightarrow$ bázi příslušného ireduc. inv. podprostoru, které se obvykle říká <u>multiplet</u>, lze zvolit jako vlastní vektory operátorů H, C_λ, X_μ, $\lambda = 1,\dots,l$, $\mu = 1,\dots,l$, kde X_μ jsou navzájem komutující inf. operátory (prvky LA) – je jich l neboť máme grupu ranku l

(H komutuje s X_μ, neboť předpokl., že daná LG je grupou symetrie H a H komutuje s C_λ, neboť C_λ jsou fcemi X_μ)

Př. $SO(3)$ – rank 1 $\rightarrow$ 1 Casimir. op. $C_1 = g^{\mu\nu} L_\mu L_\nu = -\frac{1}{2}(L_1^2 + L_2^2 + L_3^2)$

(v kvantovce bereme $L_\mu = -iJ_\mu$ a značíme $J^2 = 2C_1$)

- multiplety $|\overset{H}{n}\underset{C_1,\,J^2}{j}\underset{L_3}{m}\rangle$: $J^2|njm\rangle = \underbrace{j(j+1)}_{\text{odpovídá } c_1}|njm\rangle$

j charakterizuje ireduc. repr.

n, j – vybírá příslušný ireduc. inv. podprostor v $\mathcal{H}$

$SO(3) \otimes SO(3)$ – 2 neint. elektrony v He bez spinu

- rank 2 $\rightarrow$ 2 Cas. op. $C_1 = J^{(1)2}$, $C_2 = J^{(2)2}$
- vlastní stavy $|\underset{C_1}{j_1}\underset{X_1 = J_3^{(1)}}{m_1}\rangle|\underset{C_2}{j_2}\underset{X_2 = J_3^{(2)}}{m_2}\rangle$

j_1, j_2 charakterizují jednotlivé ired. repr.

Komplexifikace (zkomplexnění)

- využívá se pro snazší nalezení ired. repr. LA (zvláště poloprostých)
  - umožňuje přechod k výhodnější bázi s „posunovacími operátory"
- různé reálné LA můžou mít stejné zkomplexnění
- pokud je báze reálné LA lineárně nezávislá i ~~jako~~ v komplexní prostoru, definujeme zkomplexnění triválně – vezmeme komplexní lineární kombinace báze

tj. máme-li reálnou LA $\mathfrak{g}$ s bází $e_1, \dots e_n$ a komutačními relacemi

$$[e_k, e_\ell] = \sum_{p=1}^{n} c^p_{k\ell} e_p \quad , \quad c^p_{k\ell} \in \mathbb{R}$$

pak vezmeme všechny lin. kombinace $a = \sum a_i e_i$, kde původně reálné a_i můžou být lib. komplexní čísla $a_i \in \mathbb{C}$

a komutátor $a = \sum a_i e_i$ a $b = \sum b_j e_j$ bude

$$[a, b] = \sum_{i,j,p} a_i b_j c^p_{ij} e_p$$

dostaneme tak komplexní LA $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ (není standardní značení)

Př: $su(2)$ – reálná 3-rozm. LA antihermit., bezestopých matic 2×2

$\Rightarrow$ báze $e_i = -\frac{i}{2}\sigma_i$, $\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$, $\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

s komutátorem $[e_i, e_j] = \varepsilon_{ijk} e_k$

je lin. nezávislá i v komplexních číslech

$\Rightarrow$ přímočaré zkomplexnění, ovšem !, výsledné matice již nebudou obecně antihermitovské, pouze bezestopé

$\Rightarrow$ dostaneme komplexní LA $sl(2,\mathbb{C})^{\mathbb{C}}$ - 3-rozměrnou

Př.: $sl(2,\mathbb{C})$ jako reálná LA (6-rozměrná) nemá takto jednoduché zkomplexnění

- chtěli bychom též 6-rozm. komplexní LA, ovšem báze je lin. závislá v komplexních číslech:

$e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$e_4 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$, $e_5 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $e_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ i & 0 \end{pmatrix}$

bezestopé matice

$e_4 = ie_1$, $e_5 = ie_2$, $e_6 = ie_3$

- dostali bychom opět $sl(2,\mathbb{C})^{\mathbb{C}}$ - 3-rozm.

- zkomplexnění libovolné reálné LA

- nechť $e_1, \dots, e_n$ je báze reálné LA $\mathcal{g}$
- vytvoříme dvojice lib. vektorů $a, b \in \mathcal{g}$, tj. (a,b) s násobením reálným číslem $\lambda(a,b) = (\lambda a, \lambda b)$ a sčítáním $(a,b)+(a',b') = (a+a', b+b')$

$\Rightarrow$ tvoří $2n$-rozměrný reálný vekt. prostor

$\Rightarrow$ z něj vytvoříme komplexní vekt. prostor $\mathcal{g}'$ s násobením

$$(\lambda + i\mu)(a,b) = (\lambda a - \mu b, \lambda b + \mu a)$$

[snadno se ověří, že jde vskutku o kompl. vekt. prostor

tj. že platí $z_1[z_2(a,b)] = (z_1 z_2)(a,b)$

$(z_1 + z_2)(a,b) = z_1(a,b) + z_2(a,b)$ pro lib. $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$

$z_1[(a,b)+(a',b')] = z_1(a,b) + z_1(a',b')$]

- takto vytvořený kompl. v.p. $\mathcal{g}'$ je n-rozměrný
  - bázi tvoří např. $(e_1,0), \dots, (e_n,0)$, neboť

$$(e_i, e_j) = (e_i,0) + (0,e_j) = (e_i,0) + i(e_j,0)$$

a tedy $$(a,b) = \sum_{i,j=1}^{n} (a_i b_j + i a_j b_i)(e_i,0) \qquad \text{kde } a = \sum a_i e_i,\ b = \sum b_i e_i$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} a_i b_j (e_i, e_j)$$

- konečně z tohoto vekt. prostoru vytvoříme komplexní LA zavedením komutátoru

$$[(a,b),(a',b')] = (\underbrace{[a,a'] - [b,b']}, \underbrace{[a,b'] + [b,a']})$$

původní komutátory v reálné LA $\mathcal{g}$

[opět lze snadno ověřit, že jde o Lieovu algebru

tj. že platí antisymetričnost a Jacobiho identita]

pro bázi dostaneme

$$[(e_i,0),(e_j,0)] = ([e_i,e_j],0) = \sum_{p=1}^{n} c_{ij}^{p} (e_p, 0)$$

takže v této bázi mají $\mathcal{g}$ a $\mathcal{g}'$ stejné strukt. konstanty

- lze ukázat, že tato konstrukce dává kompl. LA izomorfní kompl. LA zkonstruované přímo v případě, že šlo o lin. nezávislou bázi matic. reálné LA i nad komplexními čísly (jako u $su(2)$) přes zobrazení $\phi((a,b)) = a + ib$ (podrobnosti viz Cornwell, Vol. 2, kap. 13.3)

Vztah reprezentací reálné LA a jejího zkomplexnění

- z každé d-rozm. repr. g ~~g zároveň~~ lze udělat repr. g' a obráceně identifikací matic (operátorů) pro bázové prvky, tj.

$$D_{g'}((e_i,0)) = D_g(e_i) \quad , i=1,\dots,n$$

neboť $$[D_{g'}((e_i,0)), D_{g'}((e_j,0))] = [D_g(e_i), D_g(e_j)] = D_g([e_i,e_j])$$

a zároveň $$D_{g'}([(e_i,0),(e_j,0)]) = D_{g'}(([e_i,e_j],0)) = D_g([e_i,e_j])$$

a lib. prvek g' repr. lin. kombinací, tj.

$$D_{g'}\Big(\sum_i \overset{\mathbb{C}}{a_i}(e_i,0)\Big) = \sum_i a_i D_{g'}((e_i,0))$$

$\Rightarrow$ ireducibilita a pod. se přenáší z repr. g' na g a obráceně

$\Rightarrow$ lze přejít při hledání ired. repr. reálné LA k jejímu zkomplexnění, kde je situace obecně o dost jednodušší

- viz např. hledání ired. repr. $su(2) \sim so(3)$ pomocí posunovacích (zvyšovacích a snižovacích) operátorů, což jsou komplexní kombinace báz. prvků reálných LA

Ireducibilní reprezentace $sl(2,\mathbb{C})$ a též $SL(2,\mathbb{C})$

- v QM se při algebraickém odvození kvantování momentu hybnosti vychází z komut. relací odpovídajících operátorů $[J_k, J_\ell] = i\varepsilon_{k\ell m} J_m$, které tvoří Lieovu algebru, ~~~~ která je komplexním rozšířením $su(2) \sim so(3)$ (pro něž $C = -C^+$) a je izomorfní s $sl(2,\mathbb{C})$ (pro kterou $\mathrm{Tr}\, C = 0$)

reálné Báze $su(2)$ splňující $[J_i, J_\ell] = \varepsilon_{k\ell m} J_m$ — komplexní! báze $sl(2,\mathbb{C})$ např. $h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

$J_1 = \frac{-i}{2}\sigma_1$ $\quad J_1 = \frac{-i}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \overset{\{e, w\}}{e}$

$J_2 = \frac{-i}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ $\quad \Longrightarrow$ nelze reálnou transformací pouze komplexní $\quad e_{-2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = f$

$J_3 = \frac{-i}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ $\quad h = 2iJ_3, \quad e_2 = i(J_1 + iJ_2), \quad e_{-2} = i(J_1 - iJ_2)$

standardní báze

komplexifikace: protože J_1, J_2, J_3 jsou nezávislé při násobení komplexními čísly, lze přímo, pro reálnou $sl(2,\mathbb{C})$ tomu tak není; viz Cornwell 2, str 490

komutační relace jsou

$$[h, e_2] = 2e_2, \quad [h, e_{-2}] = -2e_{-2}$$

- jedná se o speciální poloprostou komplexní Lieovu algebru a komutační relace v tomto tvaru se nazývají Weylův kanonický tvar Lieovy algebry

- obecně lze ukázat, že v lib. poloprosté kompl. Lieově algebře je ℓ prvků $h_{\alpha_1}, h_{\alpha_2}, \dots, h_{\alpha_\ell}$, které navzájem komutují, tj. $[h_{\alpha_i}, h_{\alpha_j}] = 0$, (tvoří tzv. Cartanovu podalgebru, a odpovídají tzv. jednoduchým kořenům $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_\ell$)

a dále $r-\ell$ prvků e_α, pro které platí komutační relace

$$[h_{\alpha_i}, e_\alpha] = \alpha(h_{\alpha_i}) e_\alpha, \quad [e_\alpha, e_\beta] = N_{\alpha\beta} e_{\alpha+\beta} \text{ (pokud } \alpha+\beta \neq 0)$$

$$[e_\alpha, e_{-\alpha}] = \alpha^i H_i, \quad \text{kde } \alpha^i = g^{ik}\alpha_k$$

a $g^{ik} g_{ik} = \delta_{ik}$ a $g_{ik} = c^n_{in} c^n_{km}$ je metrický tenzor neboli Killingova forma

prvky h_{α_i}, e_α tvoří tzv. Cartanovu-Weylovu bázi

- prvkům $h_{\alpha_1}, \dots h_{\alpha_\ell}$ bude v určité ired. repr. příslušné LA odpovídat ℓ operátorů (matic), které navzájem komutují a lze je tedy zároveň diagonalizovat

→ vlastní vektory jich tvoří standardní bázi přísl. ired. repr.

(viz např. vlastní vekt. J_3 pro $so(3)$ či $J_3^{(1)}, J_3^{(2)}$ pro $so(3) \times so(3)$)

• pro libovolnou repr. $sl(2,\mathbb{C})$ platí (konstrukce bez použití J^2 = Casimirova op.)

Nechť (ϱ, V) je komplexní repr. $sl(2,\mathbb{C})$ a nechť $E = \varrho(\overset{e}{e_2})$, $F = \varrho(\overset{f}{e_{-2}})$, $H = \varrho(h)$ jsou operátory (matice), které repr. prvky standardní báze.

$h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

$e = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$f = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Pak 1) pro $k \geq 1$: $\quad [H, F^k] = -2kF^k \quad$ a $\quad [E, F^k] = kF^{k-1}(H - k + 1)$

nebot' pro $k=1$ známe stand. komutační relace a indukcí za před., že tyto vztahy platí pro k, pak pro $k+1$

$$[H, F^{k+1}] = \underbrace{[H,F]}_{-2F}F^k + F\underbrace{[H,F^k]}_{-2kF^k} = -2(k+1)F^{k+1} \quad \checkmark$$

$$[E, F^{k+1}] = \underbrace{[E,F]}_{H}F^k + F\underbrace{[E,F^k]}_{kF^{k-1}(H-k+1)} = \overbrace{[H,F^k]}^{-2kF^k} + (k+1)F^kH - k(k-1)F^k =$$
$$= (k+1)F^k(H-k) \quad \checkmark$$

2) Nechť pro $v_0 \in V$ nenulový platí $Hv_0 = \lambda_0 v_0$ pro určité $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ a nechť $Ev_0 = 0$.

Položme $v_k = \frac{1}{k!}F^k v_0$ pro $k = 0, 1, 2 \ldots$ tj. $v_1 = Fv_0$, $v_2 = \frac{1}{2}F^2 v_0$

pak $\quad Hv_k = (\lambda_0 - 2k)v_k \quad$ a $\quad Ev_k = (\lambda_0 - k + 1)v_{k-1}$

[Pozn. v_0 je vektor s největším vl. číslem => E je zvyšovací operátor a F snižovací v_k]

nebot' $\quad Hv_k = \frac{1}{k!}(HF^kv_0 - F^kHv_0 + F^kHv_0) = \frac{1}{k!}([H,F^k]v_0 + F^kHv_0) = (\lambda_0 - 2k)\frac{1}{k!}F^kv_0$

$$Ev_k = \frac{1}{k!}([E,F^k]v_0 + F^kEv_0) = \frac{1}{k!}(\lambda_0 - k + 1)kF^{k-1}v_0 = (\lambda_0 - k + 1)\frac{1}{(k-1)!}F^{k-1}v_0$$

3) Nechť v_0 a λ_0 jsou jako ve 2). Pokud $\lambda_0 \neq 0, 1, 2, \ldots k-1$, pak vektory $\{v_0, v_1, \ldots v_k\}$ jsou lineárně nezávislé. Odtud pokud má být $\dim V < \infty$ (konečně-rozm. repr.), pak $\lambda_0 = n$ pro jisté $n > 0$ přirozené a $v_{n+1} = 0$. (n nemusí přímo souviset s $\dim V$, nebot' uvažujeme i reducibilní repr.)

nebot' $v_j \neq 0$ pro $\forall j$, $0 \leq j \leq k$. ~~nebot~~ Pokud by totiž $v_j = 0$,

pak $\quad 0 = Ev_j = (\lambda_0 - j + 1)v_{j-1} \quad \Rightarrow \quad \lambda_0 = j - 1$, což je ve sporu s předpokl. nebo $v_{j-1} = 0$ a pokračovali bychom až k $v_0 = 0$ což je opět spor.

a tedy $v_0, v_1 \ldots v_k$ jsou vlastní vektory H s různými vlastními čísly a tedy jsou lineárně nezávislé.

a dále pro $\dim V < \infty$ je ve V konečně mnoho lin. nezáv. vektorů => λ_0 musí být $0, 1, 2, \ldots$ nebo $\dim V - 1$, tj. jisté nezáporné číslo n nejvýše

a $v_{n+1} = 0$ plyne z toho, že $Ev_{n+1} = 0$. Pokud by totiž $v_{n+1} \neq 0$, pak by bylo $Hv_{n+1} = (n - 2(n+1))v_{n+1} = (-n-1)v_{n+1}$ a protože $(-n-1) \neq 0, 1, \ldots, k-1$ pro lib. k, dostáváme spor s konečnou dimenzí.

* všechny konečně-rozm. ireduc. repr. $sl(2,\mathbb{C})$ lze popsat následovně

1) Nechť (ϱ, V) je konečně-rozm. repr. $sl(2,\mathbb{C})$. Pak $\exists\ 0 \neq v_0 \in V$ a $n \geq 0$ celé takové, že

$$\varrho(h) v_0 = n v_0 \quad , \quad \varrho(e) v_0 = 0$$

Pokud definujeme $v_k = \frac{1}{k!} \varrho(f)^k v_0$ pro $k = 0,1,\dots,n$, pak $\{v_0, \dots v_n\}$ jsou lineárně nezávislé

a tvoří bázi ireducibilního invariantního podprostoru $W \subset V$ při působení $sl(2,\mathbb{C})$,

které je na W dáno pomocí

$$(*) \qquad \begin{aligned} \varrho(h) v_k &= (n-2k) v_k \\ \varrho(f) v_k &= (k+1) v_{k+1} \\ \varrho(e) v_k &= (n-k+1) v_{k-1} \end{aligned}$$

tj. jde o matice

$$\varrho(h) = \begin{pmatrix} n & & 0 \\ & n-2 & \\ 0 & & \ddots \\ & & & -n \end{pmatrix}$$

$$\varrho(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & 0 & 2 & \\ & & 0 & \ddots \\ 0 & & & 0 & n \\ & & & & 0 \end{pmatrix}$$

$$\varrho(e) = \begin{pmatrix} 0 & & & 0 \\ n & 0 & & \\ & n-1 & 0 & \\ 0 & & \ddots & \\ & & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

přičemž $v_{-1} = 0$ a $v_{n+1} = 0$

Pokud je V ireducibilní, pak $\{v_0, \dots v_n\}$ je báze V

a $\dim V = n+1$.

Dk: Nechť v je vlastní vektor $\varrho(h)$ a λ přísl. vlastní hodnota

Pak $\varrho(h)\varrho(e) v = \varrho(e)\varrho(h) v + [\varrho(h), \varrho(e)] v = (\lambda+2)\varrho(e) v$

a tedy $\varrho(e) v$ je buď 0, nebo vlastní vektor $\varrho(h)$ s vlastní hodnotou $\lambda+2$

Protože V je konečně rozměrné $\Rightarrow \exists \lambda$ a $v_0 \neq 0$ takové, že

$$\varrho(h) v_0 = \lambda v_0 \quad , \quad \varrho(e) v_0 = 0$$

a aplikujeme předchozí tvrzení. Odtud λ musí být $n \geq 0$ celé a

W je invariantní při působení $sl(2,\mathbb{C})$. Ukažme, že W je navíc

ireducibilní. K tomu stačí ukázat, že lib. $v = c_0 v_0 + \dots + c_n v_n \neq 0 \in W$

generuje celé W při působení $sl(2,\mathbb{C})$, což je zřejmé z

$$\varrho(f)^j \varrho(e)^k v = c_j! \, v_j \quad \text{pro } j = 0, \dots, n$$

kde k je nejvyšší m, pro které $c_m \neq 0$.

2) Nechť n je nezáporné celé číslo a V je $(n+1)$-rozm. vekt. prostor s bází $\{v_0, v_1, \dots v_n\}$. Pak $(*)$ definují ireducibilní repr. ϱ $sl(2,\mathbb{C})$, ve které je $\varrho(h)$ poloprostý (tj. pro $\mathbb{C}$ diagonalizovatelný) s vlastními čísly $n, n-2, \dots, -n+2, -n$ které jsou nedegenerované.

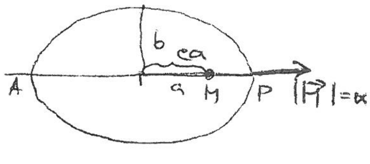
Dk: snadno se ověří, že matice $(*)$ splňují komutační relace jako h, e, f.
Ireducibilita pak plyne jako v 1).

Dynamické symetrie

- nejsou geometrického původu, ale vyplývají z ~~určitého~~ konkrétního tvaru Schrödingerovy rovnice popisující dynamiku studovaného systému

Atom vodíku

- nejdříve klasický Keplerův problém



$$H = \frac{p^2}{2m} - \frac{Ze^2}{r} \qquad Ze^2 = \alpha$$ v relativních souřadnicích

klasické trajektorie - elipsy s poloosami a a b s ekcentricitou $e = \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$

- zachování energie a momentu hybnosti

$$E = -\frac{\alpha}{2a}\,, \quad L^2 = m\alpha a(1-e^2)$$

- perturbace potenciálu $-\frac{\alpha}{r}$ při zachování rotační symetrie způsobí precesi hlavní osy elipsy => proto by mohla být nějaká veličina, která je konstantou pohybu a říká, kam směruje hlavní osa

=> touto veličinou je Rungeův-Lenzův vektor

$$\vec{A} = \vec{p}\times\vec{L} - \frac{\alpha\vec{r}}{r}m \;\rightarrow\; \vec{M} = \frac{\vec{p}}{m}\times\vec{L} - \frac{\alpha\vec{r}}{r}$$

vskutku $\left(\vec{L} = \vec{r}\times\vec{p},\ \dot{\vec{p}} = -\frac{\alpha\vec{r}}{r^3}\ \text{(Newton)}\right), (\vec{r}\cdot\vec{r})^{\cdot} = 2\vec{r}\cdot\dot{\vec{r}} = 2r\dot{r}$)

$$\dot{\vec{M}} = \frac{\dot{\vec{p}}}{m}\times\vec{r}\times\vec{p} - \frac{\alpha\dot{\vec{r}}}{r} + \frac{\alpha\vec{r}}{r^3}(\vec{r}\cdot\dot{\vec{r}}) =$$

$$= \cancel{\frac{\vec{r}}{m}(\dot{\vec{p}}\cdot\vec{p})} - \cancel{\frac{\vec{p}}{m}(\dot{\vec{p}}\cdot\vec{r})} - \cancel{\frac{\alpha}{m}\frac{\vec{p}}{r}} + \cancel{\frac{\alpha\vec{r}}{mr^3}(\vec{r}\cdot\vec{p})} = 0$$

- pro vektor $\vec{M}$ platí

$$\vec{L}\cdot\vec{M} = 0 \qquad \vec{M}^2 = \frac{2E}{m}L^2 + \alpha^2$$

- kvantově-mechanický popis
  - symetrický operátor $\vec{M} = \frac{1}{2m}(\vec{p}\times\vec{L} - \vec{L}\times\vec{p}) - \frac{\alpha\vec{r}}{r}$
  - obdoba klasických vztahů

$$[\vec{M}, H] = 0 \qquad \vec{L}\cdot\vec{M} = \vec{M}\cdot\vec{L} = 0$$

$$\vec{M}^2 = \frac{2H}{m}(L^2 + \hbar^2) + \alpha^2$$

- považuje-li M_i za ~~infinit~~ operátory infinit. transf. určité symetrie pak společně s L_i tvoří Lieovu algebru (ovšem pouze pro danou energii E)

SO(3) ← $[L_i, L_j] = i\hbar\varepsilon_{ijk}L_k$

$[M_i, L_j] = i\hbar\varepsilon_{ijk}M_k$

$$[M_i, M_j] = -2i\frac{\hbar}{m}\underline{H}\,\varepsilon_{ijk}L_k$$

problém, nejde o uzavřenou algebru

ale protože L_i, M_i komutují s H, které je nezávislé na čase stačí se omezit na podprostor $\mathcal{H}$ příslušející vlastní energii E

- uvažujme vázané stavy se zápornou energií a zavedme

$$\vec{M}' = \sqrt{-\frac{m}{2E}}\,\vec{M}$$

pak $[\vec{M}'_i, L_j] = i\hbar\varepsilon_{ijk} M'_k$, $[M'_i, M'_j] = i\hbar\varepsilon_{ijk} L_k$

teď již $\vec{M}'$ a $\vec{L}$ vytvářejí uzavřenou algebru, přičemž lze ukázat, že jde o ~~ab~~ generátory $SO(4)$, ~~tedy~~ vlastních rotací ve 4-rozm prostoru (nejde o geometrickou symetrii, ale o dynamickou díky tvaru M)

- pro stavy kontinua $M' = \sqrt{\frac{m}{2E}}\,M$ a dostali bychom $SO(3,1)$ – Lorentz

- <u>vlastní energie atomu vodíku</u>

namísto L_j, M'_j použijeme

$$I_j = \frac{1}{2}(L_j + M'_j) \quad \text{a} \quad K_j = \frac{1}{2}(L_j - M'_j)$$

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} &[I_i, I_j] = i\hbar\varepsilon_{ijk} I_k \\ &[K_i, K_j] = i\hbar\varepsilon_{ijk} K_k \\ &[I_i, K_j] = 0 \\ &[I_i, H] = [K_i, H] = 0 \end{aligned}\right\} \vec{I} \text{ a } \vec{K} \text{ samostatně vytvoří algebru } SO(3) \text{ či } SU(2)$$

hodnost grupy $SO(4)$ je $\underline{2}$ $\Leftarrow$

$\Rightarrow$ 2 Casimirovy op. $\rightarrow$

$$\Rightarrow \quad I^2 = i(i+1)\hbar^2 \quad i = 0, \tfrac{1}{2}, \dots$$

$$K^2 = k(k+1)\hbar^2 \quad k = 0, \tfrac{1}{2}, \dots$$

ale můžeme volit i jinak

$$C_1 = I^2 + K^2$$

$$C_2 = I^2 - K^2 = \vec{L}\cdot\vec{M}' = 0 \quad \Rightarrow \quad i = k$$

vlastní hodnoty C_1

$$C_1 = 2k(k+1)\hbar^2 \qquad k = 0, \tfrac{1}{2}, 1 \dots$$

ale

$$\left.\begin{aligned} C_1 = \frac{1}{2}\left(\vec{L}^2 - \frac{M}{2E}\vec{M}^2\right) = -\frac{\mu\alpha^2}{4E} - \frac{1}{2}\hbar^2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow E = -\frac{\mu\alpha^2}{2\hbar^2(2k+1)^2}$$

$$k = 0, \tfrac{1}{2} \dots$$

Ač i, k jsou poločíselné, l je vždy celočíselné

neboť $\vec{L} = \vec{I} + \vec{K}$

Ireducibilní reprezentace $U(N)$

- $U(N)$ je grupou všech unitárních transformací N-~~di~~ rozměrného komplexního vekt. prostoru V → ty jsou popsány komplexními maticemi $N \times N$, které tvoří jednu z ireduc. repr. $U(N)$
  - pro lib. vektor délky $\|\vec v\| = 1$ existuje transf. převádějící ho na lib. jiný vektor $\|\vec w\| = 1$ → ireducibilita

- triviální repr. $U \in U(N) \to 1$

- ~~všechny~~ další ired. repr. (komplexní) lze získat tak, že vhodně symetrizujeme tenzorové součiny vytvořené z ~~N~~ V
  - nechť $\phi_1, \dots \phi_N$ je báze $V \sim \mathbb{C}^N$

    Tj. $\phi'_j = U\phi_j = \sum_{i=1}^{N} D_{ij}(U)\,\phi_i$, kde $D_{ij}(U)$ je unit. matice příslušející transf. U v bázi ϕ_i

  - vytvořme N^n součinů typu

    $\Phi = \phi_i(1)\,\phi_j(2) \dots \phi_p(n)$, kde $i, j \dots p = 1, \dots N$ a $1, 2, \dots, n$ ~~roz~~ lišuje ϕ_i

    (typicky jde o částice nacházející se ve stavu $\phi_i(k)$) jednoč.

    Př. N - počet orbitalů určitého druhu (degenerovaných) např. 2d, 3f apod.

    n - počet elektronů, které se mohou v tomto stavu nacházet

  - $i, j \dots p$ můžou být shodné - označení „stavů"

  - transformace indukovaná na prostoru $V\,\Phi$ pomocí unit. transf. U je

    $$T(U)\,\Phi = \phi'_i(1)\,\phi'_j(2) \dots \phi'_p(n) = \sum_{i' j' \dots p'} U_{i'i}\,U_{j'j} \dots U_{p'p}\,\phi_{i'}(1)\,\phi_{j'}(2) \dots \phi_{p'}(n)$$

  ⇒ N^n-rozm. prostor $L = V \otimes V \otimes \dots \otimes V$ (n-krát) je invariantní při působení $U(N)$ pomocí $T(U)$ → máme N^n-rozm. reduc. repr. $U \otimes U \dots \otimes U$ (n-krát)

  - pomocí grupy S_n lze ~~vytvořit~~ tento prostor rozložit na ired. inv. podprostory

    neboť L je inv. při působení S_n př. $P_{12}\Phi = \phi_i(2)\,\phi_j(1) \dots \phi_p(n) = \phi_j(1)\,\phi_i(2) \dots \phi_p(n)$

    přičemž lib. permutace P komutuje s $T(U)$ díky tzv. bisymetričnosti tenz. součinu matic $U_{i'i}\,U_{j'j} = U_{j'j}\,U_{i'i}$ (tj. musíme vždy přehodit oba indexy)

    tj. $T(U)$ komutuje s lib. projekčním operátorem $P^{[\lambda]}$ odp. rozkladu $[\lambda] = [\lambda_1, \dots \lambda_n]$ a tedy nějaké ired. repr.

- rozložíme-li $L = \sum_{[\lambda]} L^{[\lambda]}$, kde $L^{[\lambda]}$ odpovídá určité projekci $P^{[\lambda]}$

pak $\forall\, L^{[\lambda]}$ je inv. při působení $U(N)$ pomocí $T(U)$ na L

neboť $T(U)\, P^{[\lambda]} \Phi = P^{[\lambda]}\, T(U)\, \Phi = P^{[\lambda]} \Phi' \in L^{[\lambda]}$

a zároveň $L^{[\lambda]}$ je invariantní při působení S_n (vyprojektovaného pomocí sym. op. odpovídajících určité ired. repr. $[\lambda]$, ovšem nemusí být ireduc. podprostor, obecně součet ired. inv. podpr. příslušných téže ired. repr.)

$\Rightarrow$ $L^{[\lambda]}$ je inv. při působení $S_n \times U(N)$ neboť permutace a unit. transf. komutují ($\Rightarrow$ lze vytvořit direktní součin)

(*) $\Rightarrow$ v $L^{[\lambda]}$ lze zvolit bázi $\Phi^{[\lambda]}_{tk}$ tak, že pro unit. transformace bude

$$T(U)\, \Phi^{[\lambda]}_{tk} = \sum_{\ell} U^{[\lambda]}_{\ell k}\, \Phi^{[\lambda]}_{t\ell}$$ tj. $\Phi^{[\lambda]}_{tk}$ tvoří bázi repr. $U(N)$ pro fixní t, $k = 1, \dots d^{U}_{[\lambda]}$

a pro permutace

$$P\, \Phi^{[\lambda]}_{tk} = \sum_{s} D^{[\lambda]}_{st}(P)\, \Phi^{[\lambda]}_{sk}$$ tj. $\Phi^{[\lambda]}_{tk}$ tvoří bázi ired. repr. S_n pro fixní k, $t = 1, \dots, d^{P}_{[\lambda]}$

- že $D^{[\lambda]}(P)$ je ired. repr. je dáno projekcí

to, že $U^{[\lambda]}$ je též ired. repr. (tentokrát grupy $U(N)$) je velmi netriviální

avšak lze to ukázat

pro názornost můžeme $\Phi^{[\lambda]}_{tk}$ uspořádat následovně

$$\begin{array}{cccc}
\Phi^{[\lambda]}_{11} & \Phi^{[\lambda]}_{12} & \dots & \Phi^{[\lambda]}_{1 d^{U}_{[\lambda]}} \\
\Phi^{[\lambda]}_{21} & \dots & & \\
\vdots & & & \\
\Phi^{[\lambda]}_{d^{P}_{[\lambda]} 1} & \dots & & \Phi^{[\lambda]}_{d^{P}_{[\lambda]} d^{U}_{[\lambda]}} \\
\uparrow & \uparrow & \dots & \uparrow
\end{array}$$

každý řádek tvoří bázi téže ireduc. reprezentace grupy $U(N)$

každý sloupec tvoří bázi téže ired. repr. grupy S_n

(*) Proč? na celém L působí direktní součin grup $S_n \times U(N)$

$\rightarrow$ dostáváme obecně reduc. repr. této velké grupy $\rightarrow$

$\rightarrow$ rozklad na ired. repr., které jsou (jak víme) dány jako direktní součin ired. repr. grup S_n a $U(N)$

Příklady bází ired. repr. S_n a $U(N)$

1) $N=1$ – pouze jeden stav → jednorozm. ~~triviální~~ repr. pro lib. n, a sice $e^{in\varphi}$

pro $n>1$ pouze projekční op. $P^{[n]}$ odpovídající YS s jediným řádkem dá nenulový výsledek, totiž $\phi_1(1)\phi_1(2)\ldots\phi_1(n)$, všechny ostatní rozklady $[\lambda]$ s více řádky z části antisymetrizují → nula

2) $N=2$ – dva nezávislé stavy, např. spin ↑ a ↓

a) $n=2$ (2 částice) – báze L je $\phi_1(1)\phi_1(2) = |11\rangle$, $|12\rangle$, $|21\rangle$ a $|22\rangle$

$N^n = 4$ -rozm. prostor

S_2 má 2 ired. repr. → $P^{[2]} = E + (12)$

$P^{[11]} = E - (12)$

⇒ 2 sady Φ : pro $[\lambda]=[2]$:

báze 3-rozměrné ired. repr. grupy $SU(2)$

$$\begin{cases} \Phi^{[2]}_{11} = P^{[2]}|11\rangle = |11\rangle \\ \Phi^{[2]}_{12} = P^{[2]}|12\rangle = (|12\rangle + |21\rangle)/\sqrt{2} = P^{[2]}|21\rangle \\ \Phi^{[2]}_{13} = P^{[2]}|22\rangle = |22\rangle \end{cases}$$

pro $[\lambda]=[11]$ $\Phi^{[11]}_{11} = P^{[11]}|12\rangle = (|12\rangle - |21\rangle)/\sqrt{2}$ (pro $|11\rangle$ a $|22\rangle$ dostaneme 0)

báze 1-rozměrné ired. repr. $U(2)$ (ne však pro $SU(2)$)

b) $n=0$ → triviální ired. repr.

c) $n=1$ → přímo věrná repr. $U(2)$ s bází $|1\rangle, |2\rangle$ – 2 rozměrná repr. daná maticemi z $U(2)$

d) $n=3$ – $2^3 = 8$-rozm. prostor

$P^{[3]}$ dá $|111\rangle$, $(|112\rangle + |121\rangle + |211\rangle)/\sqrt{3}$, $|222\rangle$, $(|221\rangle + |212\rangle + |122\rangle)/\sqrt{3}$ } báze 4-rozm. ired. repr. $U(2)$ i $SU(2)$ ($j=\frac{3}{2}$)

$P^{[21]}$ projektuje na 2-rozm. prostor → $L^{[21]}$ je 4-rozm. prostor s bází

báze 2-rozm. ired. repr. $U(2)$ neekvivalentní s tou pro $n=1$

→ $\phi^{[21]}_{11} = \frac{1}{\sqrt{6}}(2|112\rangle - |121\rangle - |211\rangle)$ $\phi^{[21]}_{12} = \frac{1}{\sqrt{6}}(2|221\rangle - |212\rangle - |122\rangle)$

→ $\phi^{[21]}_{21} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|121\rangle - |211\rangle)$ $\phi^{[21]}_{22} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|212\rangle - |122\rangle)$

Pozn. 1) obecně pro $U(N)$ pouze YS s maximálně N řádky dávají nenulové projekce → ired. repr. $U(N)$ ~~lze~~ lze označovat pomocí takových YS

2) pro $SU(N)$ lze ukázat, že neekvivalentní ired. repr. dostaneme tehdy omezíme-li se na YS s maximálně $N-1$ řádky

3) pro $SU(2)$ lze získané ired. repr. (dané vždy jediným YS s n políčky na 1. řádku) ztotožnit s obvyklými D^j položením $j = \frac{1}{2}n$