Lieovy teorémy

Lieův první základní teorém

Mějme r-parametrickou lokální Lieovu grupu transformací (rLGT)

$$\tilde{x} = F(x, \varepsilon)\,, \quad \text{kde } x = (x^1, \ldots, x^n) \text{ a } \varepsilon = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_r)\,, \tag{1}$$

s operací skládání parametrů

$$\phi(\varepsilon, \delta) = (\phi_1(\varepsilon, \delta), \ldots, \phi_r(\varepsilon, \delta))\,, \tag{2}$$

kde $\delta = (\delta_1, \ldots, \delta_r)$ a $\phi_1, \ldots, \phi_r$ jsou analytické funkce, odpovídající složení dvou transformací

$$\tilde{\tilde{x}} = F(\tilde{x}, \delta) = F(F(x, \varepsilon), \delta) = F(x, \phi(\varepsilon, \delta))\,. \tag{3}$$

Dále nechť $\Xi(x)$ je infinitezimální matice $r \times n$ s prvky

$$\xi^{\alpha j}(x) = \left.\frac{\partial \tilde{x}^j}{\partial \varepsilon_\alpha}\right|_{\varepsilon \leftrightarrow e} = \left.\frac{\partial F^j(x, \varepsilon)}{\partial \varepsilon_\alpha}\right|_{\varepsilon \leftrightarrow e}\,, \qquad \alpha = 1, \ldots, r\,,\ j = 1, \ldots, n\,, \tag{4}$$

kde $\varepsilon \leftrightarrow e$ znamená, že derivace je třeba vyčíslit pro parametry odpovídající identické transformaci, a nechť $\Theta(\varepsilon)$ je matice $r \times r$ s prvky

$$\Theta^\alpha{}_\beta(\varepsilon) = \left.\frac{\partial \phi_\beta(a, b)}{\partial b_\alpha}\right|_{(a,b)=(\varepsilon, e)}\,, \text{ neboli } \Theta(\varepsilon) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \phi_1}{\partial b_1} & \cdots & \frac{\partial \phi_r}{\partial b_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \phi_1}{\partial b_r} & \cdots & \frac{\partial \phi_r}{\partial b_r} \end{pmatrix}_{(a,b)=(\varepsilon, e)}\,, \tag{5}$$

jejíž inverzní matici označíme

$$\Psi(\varepsilon) = \Theta(\varepsilon)^{-1}\,, \tag{6}$$

přičemž prvky této matice lze též vyjádřit jako

$$\Psi^\alpha{}_\beta(\varepsilon) = \left.\frac{\partial \phi_\beta(a, b)}{\partial b_\alpha}\right|_{(a,b)=(\varepsilon^{-1}, \varepsilon)}\,. \tag{7}$$

Pak na jistém okolí identity ($\varepsilon \leftrightarrow e$) jsou transformace (1) ekvivalentní řešení systému rn parciálních diferenciálních rovnic 1. řádu

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \tilde{x}^1}{\partial \varepsilon_1} & \cdots & \frac{\partial \tilde{x}^n}{\partial \varepsilon_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \tilde{x}^1}{\partial \varepsilon_r} & \cdots & \frac{\partial \tilde{x}^n}{\partial \varepsilon_r} \end{pmatrix} = \Psi(\varepsilon)\Xi(\tilde{x}) \tag{8}$$

s počáteční podmínkou $\tilde{x} = x$ pro $\varepsilon \leftrightarrow e$. Speciálně pro 1-parametrickou Lieovu grupu transformací máme ($\Psi(\varepsilon)$ je nyní jediná funkce, takže index α odpadá)

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \tilde{x}^1}{\partial \varepsilon} & \cdots & \frac{\partial \tilde{x}^n}{\partial \varepsilon} \end{pmatrix} = \Psi(\varepsilon)\Xi(\tilde{x}) = \begin{pmatrix} \xi^1(\tilde{x}) \cdots \xi^n(\tilde{x}) \end{pmatrix}\,, \qquad \tilde{x}(\varepsilon \leftrightarrow e) = x \tag{9}$$

a v tomto případě lze nalézt novou parametrizaci

$$\tau(\varepsilon) = \int_{\varepsilon \leftrightarrow e}^{\varepsilon} \Psi(\varepsilon')\mathrm{d}\varepsilon'\,, \tag{10}$$

pro kterou dostaneme novou operaci skládání $\phi'(\tau_1, \tau_2) = \tau_1 + \tau_2$, z níž plyne $\Psi'(\tau) = 1$, takže se systém (9) zjednoduší na systém (psáno vektorově)

$$\frac{\mathrm{d}\tilde{x}}{\mathrm{d}\tau} = \xi(\tilde{x})\,, \qquad \tilde{x}(\tau = 0) = x\,. \tag{11}$$

Infinitezimální operátory

Pro každý parametr ε_α rLGT definujeme infinitezimální oparátor

$$X_\alpha = \sum_{j=1}^{n} \xi^{\alpha j}(x) \frac{\partial}{\partial x^j}\,, \qquad \alpha = 1, \ldots, r\,. \tag{12}$$

Pomocí těchto operátorů lze Lieův první základní teorém přeformulovat tak, že transformace (1) je ekvivalentní

$$\tilde{x} = \mathrm{e}^{\mu_1 X_1} \mathrm{e}^{\mu_2 X_2} \cdots \mathrm{e}^{\mu_r X_r} x \tag{13}$$

pro určité reálné parametry $\mu_1, \ldots, \mu_r$, kde exponenciála je definována jako obvykle

$$\mathrm{e}^{\mu_\alpha X_\alpha} = 1 + \mu_\alpha X_\alpha + \frac{\mu_\alpha^2}{2!} X_\alpha^2 + \cdots\,. \tag{14}$$

Přestože obecně

$$\mathrm{e}^{\mu_\alpha X_\alpha} \mathrm{e}^{\mu_\beta X_\beta} \neq \mathrm{e}^{\mu_\beta X_\beta} \mathrm{e}^{\mu_\alpha X_\alpha},$$

existují parametry $\mu'_1, \ldots, \mu'_r$ takové, že např.

$$\tilde{x} = \mathrm{e}^{\mu'_2 X_2} \mathrm{e}^{\mu'_1 X_1} \cdots \mathrm{e}^{\mu'_r X_r} x\,. \tag{15}$$

Navíc lze tuto transformaci lokálně vyjádřit jako

$$\tilde{x} = \mathrm{e}^{\varepsilon X} x$$

pro jistý operátor X, který je lineární kombinací operátorů X_α, tj. existují σ_α takové, že

$$X = \sum_{\alpha=1}^{r} \sigma_\alpha X_\alpha = \sum_{j=1}^{n} \zeta^j(x) \frac{\partial}{\partial x^j}\,, \text{ kde } \zeta^j(x) = \sum_{\alpha=1}^{r} \sigma_\alpha \xi^{\alpha j}(x)\,.$$

Všechny infinitezimální operátory X tvoří vektorový prostor s bází X_α a definujeme-li na tomto prostoru komutátor

$$[X_\alpha, X_\beta] = X_\alpha X_\beta - X_\beta X_\alpha = \sum_{j=1}^{r} \phi^j_{\alpha\beta}(x) \frac{\partial}{\partial x^j}\,, \tag{16}$$

kde

$$\phi^j_{\alpha\beta}(x) = \sum_{i=1}^{n} \left[\xi^{\alpha i}(x) \frac{\partial \xi^{\beta j}(x)}{\partial x^i} - \xi^{\beta i}(x) \frac{\partial \xi^{\alpha j}(x)}{\partial x^i} \right]\,,$$

dostaneme Lieovu algebru, neboť pro komutátor (16) platí vztahy

$$[X_\alpha, X_\beta] = -\,[X_\beta, X_\alpha]\,, \qquad \text{antisymetrie}\,,$$

$$[X_\alpha, [X_\beta, X_\gamma]] + [X_\beta, [X_\gamma, X_\alpha]] + [X_\gamma, [X_\alpha, X_\beta]] = 0\,, \qquad \text{Jacobiho identita}\,.$$

Lieův druhý základní teorém

Komutátor dvou infinitezimálních operátorů rLGT je též infinitezimální operátor a lze tedy psát

$$[X_\alpha, X_\beta] = \sum_{\gamma=1}^{r} c^\gamma_{\alpha\beta} X_\gamma\,, \tag{17}$$

kde $c^\gamma_{\alpha\beta}$ jsou strukturní konstanty Lieovy algebry.

Lieův třetí základní teorém

Strukturní konstanty Lieovy algebry infinitezimálních operátorů splňují vztahy

$$c^\gamma_{\alpha\beta} = -c^\gamma_{\beta\alpha}\,, \tag{18}$$

$$c^\rho_{\alpha\beta} c^\delta_{\rho\gamma} + c^\rho_{\beta\gamma} c^\delta_{\rho\alpha} + c^\rho_{\gamma\alpha} c^\delta_{\rho\beta} = 0\,, \tag{19}$$

Zadání úloh

1. Určete infinitezimální matici $\Xi(x)$ a matice $\Theta(\varepsilon)$ a $\Psi(\varepsilon)$ pro 2-parametrickou Lieovu grupu lineárních transformaci jednorozměrného prostoru
$$\tilde{x} = a_1 x + a_2 \,,$$
kde $a_1 > 0$ a a_2 jsou parametry. Ukažte, že řešení soustavy parciálních diferenciálních rovnic
$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \tilde{x}}{\partial \varepsilon_1} \\ \frac{\partial \tilde{x}}{\partial \varepsilon_2} \end{pmatrix} = \Psi(\varepsilon)\Xi(\tilde{x})$$
je ekvivalentní této lineární transformaci.

   Dále zvolte dva lineárně nezávislé infinitezimální operátory X_1, X_2 pro tuto grupu transformací a nalezněte dvojice parametrů (μ_1, μ_2) a (μ_1', μ_2') tak, aby
$$\tilde{x} = a_1 x + a_2 = \mathrm{e}^{\mu_1 X_1} \mathrm{e}^{\mu_2 X_2} x = \mathrm{e}^{\mu_2' X_2} \mathrm{e}^{\mu_1' X_1} x \,.$$
   Je možné tuto transformaci pro obecné parametry $a_1 > 0$ a a_2 vyjádřit jako jednu exponenciálu?

2. Určete infinitezimální matici $\Xi(x)$ a funkce $\Theta(\varepsilon)$ a $\Psi(\varepsilon)$ pro 1-parametrickou Lieovu grupu Lorentzových transformací
$$\tilde{x} = \gamma(x - vt) \,, \quad \tilde{t} = \gamma(t - vx/c^2) \,, \quad \gamma = \sqrt{1 - v^2/c^2} \,.$$
kde rychlost v je parametr. Nalezněte řešení soustavy parciálních diferenciálních rovnic
$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \tilde{x}}{\partial \varepsilon} & \frac{\partial \tilde{t}}{\partial \varepsilon} \end{pmatrix} = \Xi(\tilde{x}, \tilde{t})$$
buď přímo, nebo pomocí vztahů
$$\tilde{x} = \mathrm{e}^{\varepsilon X} x \,, \qquad \tilde{t} = \mathrm{e}^{\varepsilon X} t$$
a určete parametr ε jako funkci rychlosti v tak, aby toto řešení bylo ekvivalentní standardní Lorentzově transformaci.

Řešení

1. Infinitezimální matici pro 2-parametrickou Lieovu grupu lineárních transformaci jednorozměrného prostoru
$$\tilde{x} = a_1 x + a_2 \,, \tag{20}$$
určíme derivováním podle jednotlivých parametrů v identitě $e = (1, 0)$, neboli
$$\Xi(x) = \begin{pmatrix} \left.\frac{\partial \tilde{x}}{\partial a_1}\right|_{(1,0)} \\ \left.\frac{\partial \tilde{x}}{\partial a_2}\right|_{(1,0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{21}$$
Složíme-li dvě transformace (20), dostaneme
$$\tilde{\tilde{x}} = b_1(a_1 x + a_2) + b_2 = b_1 a_1 x + (b_1 a_2 + b_2) \,.$$
Odtud určíme funkce ϕ pro skládání parametrů
$$\phi(a, b) = (b_1 a_1, b_1 a_2 + b_2) = (\phi_1(a, b), \phi_2(a, b)) \,, \tag{22}$$
a z nich matici
$$\Theta(\varepsilon) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \phi_1}{\partial b_1} & \frac{\partial \phi_2}{\partial b_1} \\ \frac{\partial \phi_1}{\partial b_2} & \frac{\partial \phi_2}{\partial b_2} \end{pmatrix}_{(a,b)=(\varepsilon,e)} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_{(a,b)=(\varepsilon,e)} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & \varepsilon_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{23}$$
a k ní inverzní matici
$$\Psi(\varepsilon) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \phi_1}{\partial b_1} & \frac{\partial \phi_2}{\partial b_1} \\ \frac{\partial \phi_1}{\partial b_2} & \frac{\partial \phi_2}{\partial b_2} \end{pmatrix}_{(a,b)=(\varepsilon^{-1},\varepsilon)} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_{(a,b)=(\varepsilon^{-1},\varepsilon)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\varepsilon_1} & -\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{24}$$

kde jsme dosadili hodnoty parametrů pro inverzní transformaci $\varepsilon^{-1} = (1/\varepsilon_1, -\varepsilon_2/\varepsilon_1)$.

Lineární transformace (20) by měla být ekvivalentní řešení systému

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \tilde{x}}{\partial \varepsilon_1} \\ \frac{\partial \tilde{x}}{\partial \varepsilon_2} \end{pmatrix} = \Psi(\varepsilon)\Xi(\tilde{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\tilde{x}}{\varepsilon_1} - \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \\ 1 \end{pmatrix} \tag{25}$$

s počáteční podmínkou $\tilde{x}(1,0) = x$. Tento systém můžeme snadno vyřešit. Z druhé rovnice nejprve dostáváme $\tilde{x} = \varepsilon_2 + f(\varepsilon_1)$, kde f je zatím libovolná funkce. Dosazením do první rovnice obdržíme rovnici

$$\frac{\mathrm{d}f(\varepsilon_1)}{\mathrm{d}\varepsilon_1} = \frac{f(\varepsilon_1)}{\varepsilon_1}\,,$$

jejíž řešení má tvar $f(\varepsilon_1) = c\varepsilon_1$. Konstantu c určíme z počáteční podmínky jako $c = x$, takže jsme dostali opět lineární transformaci

$$\tilde{x} = \varepsilon_1 x + \varepsilon_2\,.$$

Báze Lieovy algebry infinitezimálních operátorů je např.

$$X_1 = \xi^1(x)\frac{\partial}{\partial x} = x\frac{\partial}{\partial x} \qquad \text{a} \qquad X_2 = \xi^2(x)\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\,. \tag{26}$$

První operátor odpovídá škálování (parametr a_1) a druhý translaci (parametr a_2). Protože působením na x obdržíme

$$X_1 x = x\,, X_1^k = x\,, \qquad X_2 x = 1\,, X_2^k = 0\ (k > 1)\,,$$

snadno vypočteme

$$\mathrm{e}^{\mu_1 X_1}\mathrm{e}^{\mu_2 X_2}x = \mathrm{e}^{\mu_1 X_1}(x + \mu_2) = x + \mu_2 + \mu_1 x + \frac{\mu_1^2}{2}x + \cdots = \mathrm{e}^{\mu_1}x + \mu_2$$

a

$$\mathrm{e}^{\mu_2' X_2}\mathrm{e}^{\mu_1' X_1}x = \mathrm{e}^{\mu_2' X_2}(\mathrm{e}^{\mu_1'}x) = \mathrm{e}^{\mu_1'}(x + \mu_2')\,,$$

a tedy porovnáním s (20) vidíme, že

$$a_1 = \mathrm{e}^{\mu_1}, a_2 = \mu_2 \quad \Rightarrow \quad \mu_1 = \ln a_1, \mu_2 = a_2$$

a

$$a_1 = \mathrm{e}^{\mu_1'}, a_2 = \mathrm{e}^{\mu_1'}\mu_2 \quad \Rightarrow \quad \mu_1' = \ln a_1, \mu_2' = a_2/a_1\,.$$

Odpověď na poslední otázku je kladná, neboť každou transformaci (20) lze vyjádřit jako

$$\tilde{x} = a_1 x + a_2 = \mathrm{e}^{c_1 X_1 + c_2 X_2} = \mathrm{e}^{c_1}x + \frac{c_2}{c_1}(\mathrm{e}^{c_1} - 1)$$

a porovnáním parametrů dostaneme

$$c_1 = \ln a_1 \qquad \text{a} \qquad c_2 = \frac{a_2 \ln a_1}{a_1 - 1}\,.$$

Pokud $a_1 = 0$, bude jednoduše $c_1 = 0$ a $c_2 = a_2$.

2. Infinitezimální matici pro 1-parametrickou Lieovu grupu Lorentzových transformací

$$\tilde{x} = \gamma(v)(x - vt)\,, \quad \tilde{t} = \gamma(v)(t - vx/c^2)\,, \quad \gamma(v) = \sqrt{1 - v^2/c^2}\,. \tag{27}$$

určíme derivováním podle rychlosti v bodě $v = 0$, neboli

$$\Xi(x,t) = \left(\frac{\partial \tilde{x}}{\partial v}\Big|_{v=0} \ \frac{\partial \tilde{t}}{\partial v}\Big|_{v=0} \right) = \begin{pmatrix} -t & -\frac{x}{c^2} \end{pmatrix}. \tag{28}$$

Při tom jsme využili vztahy

$$\frac{\mathrm{d}\gamma(v)}{\mathrm{d}v}\Big|_{v=0} = \frac{v}{c^2}\gamma(v)^3\Big|_{v=0} = 0\,, \qquad \gamma(0) = 1\,.$$

Složíme-li dvě Lorentzovy transformace (27), měli bychom opět dostat Lorentzovu transformaci, tj. mělo by platit

$$\tilde{\tilde{x}} = \gamma(v_2)(\tilde{x} - v_2\tilde{t}) = \gamma(v_2)\gamma(v_1)\left[x\left(1 + \frac{v_1v_2}{c^2}\right) - (v_1 + v_2)t\right] = \gamma(v)(x - vt)\,,$$
$$\tilde{\tilde{t}} = \gamma(v_2)(\tilde{t} - \frac{v_2}{c^2}\tilde{x}) = \gamma(v_2)\gamma(v_1)\left[t\left(1 + \frac{v_1v_2}{c^2}\right) - \frac{v_1 + v_2}{c^2}x\right] = \gamma(v)(t - \frac{v}{c^2}x)\,.$$

Porovnáním výrazů u souřadnic x a t lze nahlédnout, že skládání rychlostí je vskutku dáno relativistickým vztahem

$$v = \phi(v_1, v_2) = \frac{v_1 + v_2}{1 + \frac{v_1v_2}{c^2}}\,, \tag{29}$$

přičemž přímé ověření vyžaduje ukázat

$$\gamma(v_2)\gamma(v_1)\left(1 + \frac{v_1v_2}{c^2}\right) = \gamma(v)\,,$$

což přenecháváme čtenáři. Ze vztahu (29) již přímočaře vypočteme

$$\Theta(v) = \left.\frac{\partial\phi(v_1, v_2)}{\partial v_2}\right|_{(v_1,v_2)=(v,0)} = \left.\frac{1}{1 + \frac{v_1v_2}{c^2}} - \frac{v_1 + v_2}{\left(1 + \frac{v_1v_2}{c^2}\right)^2}\frac{v_1}{c^2}\right|_{(v_1,v_2)=(v,0)} = 1 - \frac{v^2}{c^2} = \frac{1}{\gamma(v)^2} \tag{30}$$

a

$$\Psi(v) = \Theta(v)^{-1} = \gamma(v)^2. \tag{31}$$

Podle prvního Lieova základního teorému je tedy Lorentzova transformace (27) ekvivalentní řešení soustavy

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\tilde{x}}{\mathrm{d}v} &= \gamma(v)^2\left(-\tilde{t}\right)\,,\\ \frac{\mathrm{d}\tilde{t}}{\mathrm{d}v} &= \gamma(v)^2\left(-\frac{\tilde{x}}{c^2}\right)\,,\end{aligned}\qquad \text{s počáteční podmínkou } \tilde{x} = x, \tilde{t} = t \text{ pro } v = 0\,.$$

Tuto soustavu lze převést na jednodušší tvar

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\tilde{x}}{\mathrm{d}\varepsilon} &= -\tilde{t}(\varepsilon)\,,\\ \frac{\mathrm{d}\tilde{t}}{\mathrm{d}\varepsilon} &= -\frac{\tilde{x}(\varepsilon)}{c^2}\,,\end{aligned}\qquad \text{s počáteční podmínkou } \tilde{x} = x, \tilde{t} = t \text{ pro } \varepsilon = 0\,, \tag{32}$$

pokud přejdeme k nové parametrizaci

$$\varepsilon(v) = \int_{v'=0}^{v}\gamma(v')^2\mathrm{d}v' = c\,\mathrm{arctanh}\,\frac{v}{c} = \frac{c}{2}\ln\frac{1 + v/c}{1 - v/c}\,, \tag{33}$$

která již má operací skládání $\phi(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$. Řešení soustavy (32) lze určit tak, že první rovnici ještě jednou zderivujeme a dosadíme z druhé rovnice, čímž obdržíme až na znaménko rovnici lineárního harmonického oscilátoru, jejíž obecné řešení je součet hyperbolického sinu a kosinu. Obdobně pro druhou rovnici a po určení neznámých koeficientů z počátečních podmínek nakonec dostaneme

$$\tilde{x} = x\cosh\frac{\varepsilon}{c} - ct\sinh\frac{\varepsilon}{c}\,,\qquad \tilde{t} = -\frac{x}{c}\sinh\frac{\varepsilon}{c} + t\cosh\frac{\varepsilon}{c}\,. \tag{34}$$

Druhou možností je určit $\tilde{x}, \tilde{t}$ pomocí exponenciály inf. op.

$$X = -t\frac{\partial}{\partial x} - \frac{x}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\,, \tag{35}$$

neboli

$$\tilde{x} = \mathrm{e}^{\varepsilon X}x = x - \varepsilon t + \frac{\varepsilon^2}{2!}\frac{x}{c^2} - \frac{\varepsilon^3}{3!}\frac{t}{c^2} + \cdots = x\cosh\frac{\varepsilon}{c} - ct\sinh\frac{\varepsilon}{c}\,,$$
$$\tilde{t} = \mathrm{e}^{\varepsilon X}t = t - \varepsilon\frac{x}{c^2} + \frac{\varepsilon^2}{2!}\frac{t}{c^2} - \frac{\varepsilon^3}{3!}\frac{x}{c^4} + \cdots = -\frac{x}{c}\sinh\frac{\varepsilon}{c} + t\cosh\frac{\varepsilon}{c}\,.$$