Symetrie rovnic matematické fyziky a zákony zachování

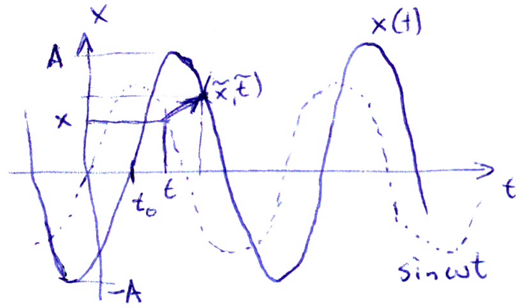
- úvodní poznámky:
  - na webové stránce utf.mff.cuni.cz/~houfek/grupy/NTMF064.htm najdete podrobné informace o přednášce
  - doporučenou literaturu si můžete stáhnout z adresy …/~houfek/esourcesXX, kde XX je číslo 04, případně jiný (ne nutně aktuální) měsíc

- motivace:

lineární harmonický oscilátor v klasické mechanice popsaný ODR

(1) $m\ddot{x} = -kx$, kde $\ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2}$

neboli $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$



má obecné řešení

(2) $x(t) = A \sin \omega(t - t_0)$

kde A a t_0 jsou integrační konstanty.

Toto řešení dostaneme ze základního řešení $\sin \omega t$ posunutím v čase a škálováním v x, tedy pomocí transformací

(3)
$$t \mapsto \tilde{t} = t + t_0$$
$$x \mapsto \tilde{x} = Ax$$

(obecně tato transformace převádí lib. řešení $x = f(t)$ rovnice (1) na nové řešení (zapsané v původních souřadnicích) $x = A f(t - t_0)$)

To, že transformace (3) převádí řešení na řešení téže rovnice souvisí s tím, že jde ve skutečnosti o tzv. bodovou symetrii této rovnice, která ponechává nezměněnou celou rovnici při přechodu k novým proměnným $\tilde{x}, \tilde{t}$ (neboť $\ddot{x} = \frac{1}{A}\ddot{\tilde{x}} = -\omega^2 \frac{\tilde{x}}{A}$).

Jde o dvouparametrickou Lieovu grupu transformací, neboť složením dvou transf. typu (3) dostaneme opět transf. typu (3) a existuje inverzní transformace (s par. $-t_0, \frac{1}{A}$) a identita $(0,1)$.

Mluvíme pak o grupě (bodových) symetrií dané rovnice, i když nemusí být nutně maximální. V případě rovnice (1) existuje větší 8-parametrická Lieova grupa bod. symetrií.

- cílem přednášky bude naučit se algoritmicky hledat takové (spojité) symetrie obecně systému parciálních diferenciálních rovnic (PDR), ovšem nebudeme vždy schopni vyjádřit tyto transformace v „globální" tvaru jako v (3), ale budeme hledat spíše tzv. infinitezimální transformace typu

$$\tilde{x} = x + \varepsilon\eta(t,x) + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$$
$$\tilde{t} = t + \varepsilon\xi(t,x) + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$$

kde ε je malý parametr.

- též si ukážeme, že pokud známe nějakou bod. symetrii určité rovnice, jak ji lze využít při hledání řešení dané rovnice, případně jak zkonstruovat příslušný zákon zachování, pokud existuje.

- a také si ukážeme, jak naopak hledat rovnice pro zadanou grupu symetrie, např. pro 2-par. Lieovu grupu (3) bychom jako obecnou ODR 2. řádu invariantní při (3) dostali

$$\ddot{x} = x\, f\left(\frac{\dot{x}}{x}\right)$$

kde f je libovolná fce svého argumentu. (pro volbu $f = -\omega^2$ máme rovnici (1))