Lokální Lieova grupa transformací

Olver: J Lie Theory 1996 vol. 6, 23

Def: r-parametrická lokální Lieova grupa je souvislá otevřená podmnožina $V \subset \mathbb{R}^r$ (BÚNO můžeme předpokládat, že obsahuje ~~počátek 0~~ obecně identitu e), na které je definována binární operace, tj. je dáno zobrazení $\phi: V \times V \to \mathbb{R}^r$, které je hladké (analytické) a na jejíž otevřené podmnožině $V_0 \subset V$ je dále definováno hladké (analytické) zobrazení $i: V_0 \to V$ splňující následující axiomy:

1) pokud $\varepsilon, \delta, \gamma \in V$ a $\phi(\varepsilon,\delta)$ a $\phi(\delta,\gamma) \in V$, pak
$$\phi(\varepsilon, \phi(\delta,\gamma)) = \phi(\phi(\varepsilon,\delta),\gamma) \quad \text{(asociativita)}$$
2) $\exists e \in V$: pro $\forall \varepsilon \in V$ platí: $\phi(e, \varepsilon) = \varepsilon = \phi(\varepsilon, e)$ (e je nulový prvek, identita) (může být i jiný než 0)

3) pro $\forall \varepsilon \in V_0$ platí: $\phi(\varepsilon, i(\varepsilon)) = \phi(i(\varepsilon), \varepsilon) = e$ (tj. pro prvky z V_0 existují ve V inverzní prvky)

Jinými slovy: Grupové axiomy jsou splněny dostatečně blízko u jednotkového (nulového) prvku.

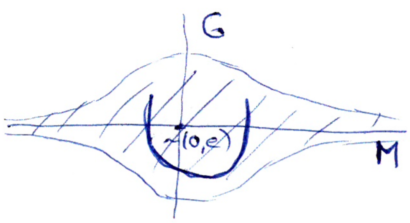
Př. lokální LG, která není globální:

$V = \{\varepsilon, |\varepsilon| < 1\} \subset \mathbb{R}$ a $V_0 = \{\varepsilon, |\varepsilon| < \frac{1}{3}\} \subset V$ ne $\frac{1}{2}$, ale $\frac{1}{3}$, aby $i(\varepsilon)$ zobrazovalo do V

a ϕ a i jsou dány vztahy
$$\phi(\varepsilon,\delta) = \frac{2\varepsilon\delta - \varepsilon - \delta}{\varepsilon\delta - 1} \quad \text{pro } \varepsilon,\delta \in V$$
$$i(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{2\varepsilon - 1} \quad \text{pro } \varepsilon \in V_0$$

Def: Nechť M je hladká varieta. (pro nás prostor závislých a nezávislých prom.) Lokální r-par. Lieova grupa transformací působící na M je dána lokální Lieovou grupou G, otevřenou množinou U: $M \times \{e\} \subset U \subset M \times G$, což je definiční obor působení G na M, a dále hladkým (analytickým) zobrazením $F: U \to M$ splňujícím:

1) pokud $(x,\varepsilon) \in U$, $(F(x,\varepsilon),\delta) \in U$ a $(x, \phi(\varepsilon,\delta)) \in U$, pak $F(F(x,\varepsilon),\delta) = F(x, \phi(\varepsilon,\delta))$



2) pro $\forall x \in M$: $F(x,e) = x$

3) pokud $(x,\varepsilon) \in U$, pak $(F(x,\varepsilon), \varepsilon^{-1}) \in U$ a $F(F(x,\varepsilon),\varepsilon^{-1}) = x$

(poslední axiom neplyne z 1) a 2), kvůli definičnímu oboru)

Př.: lokální LGT, které jsou i globálními LGT

1) translace v $\mathbb{R}^n$ - n-parametrická LGT, pro kterou $G = \mathbb{R}^n = M$

$$\tilde{x} = F(x,a) = x + a \quad , \; x \in \mathbb{R}^n, \quad a \in \mathbb{R}^n$$

2) škálování - jedno-, či víceparametrická LGT

obecně 1-par. LGT v $\mathbb{R}^n$ lze psát jako

$$\tilde{x} = F(x,\lambda) = (\lambda^{\alpha_1} x_1, \lambda^{\alpha_2} x_2, \dots, \lambda^{\alpha_n} x_n) \quad \text{pro fixní } \alpha = (\alpha_1 \dots \alpha_n)$$

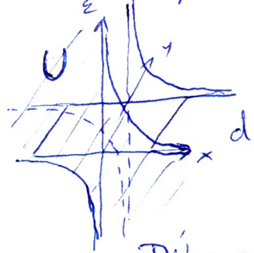
škálovací par.

kde $M = \mathbb{R}^n$ a $G = (\mathbb{R}^+, \cdot)$ (zde není $e \leftrightarrow 0$, ale 1)

3) rotace - např. $M = \mathbb{R}^2$, $G = S^1$ = kružnice

$\Rightarrow$ 1-par. LGT roviny

Př. - ryze lokální LGT - projektivní zobrazení $M = \mathbb{R}^2$ s $G = (\mathbb{R}, +)$



$$(\tilde{x}, \tilde{y}) = F((x,y),\varepsilon) = \left(\frac{x}{1-\varepsilon x}, \frac{y}{1-\varepsilon x}\right) = (F^x(x,y;\varepsilon), F^y(x,y;\varepsilon))$$

definované na $U = \{((x,y),\varepsilon) : \varepsilon < \frac{1}{x} \text{ pro } x>0 \text{ a } \varepsilon > \frac{1}{x} \text{ pro } x<0\}$
$\subset \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$

DÚ: ověřit, že platí $F(F((x,y),\varepsilon),\delta) = F((x,y),\varepsilon+\delta)$

a tedy inverzní transformaci dostaneme záměnou $\varepsilon \to -\varepsilon$

- jde o zobrazení, které převádí přímku na přímku a uvidíme později, že jde tedy o jednu ze symetrií rovnice $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$.

uvažujme funkci $y = \Theta(x) = kx + c$ (obecná přímka v (x,y)), pomocí projektivní transformace dostaneme novou funkci danou implicitně

$$\tilde{y} = F^y(F^x(\tilde{x},\tilde{y},-\varepsilon), \Theta(F^x(\tilde{x},\tilde{y},-\varepsilon)), \varepsilon)$$

ovšem pro přímku dostaneme jednoduše

$$\tilde{y} = F^y\left(\frac{\tilde{x}}{1+\varepsilon\tilde{x}}, \Theta\left(\frac{\tilde{x}}{1+\varepsilon\tilde{x}}\right), \varepsilon\right) = \frac{k\frac{\tilde{x}}{1+\varepsilon\tilde{x}} + c}{1 - \varepsilon\frac{\tilde{x}}{1+\varepsilon\tilde{x}}} = (k + c\varepsilon)\tilde{x} + c$$

- Lze ukázat, že pro souvislou LG lze každý prvek vyjádřit jako součin prvků z okolí identity, proto je mnohdy postačující zabývat se pouze tzv. <u>infinitezimálními transformacemi</u>

- díky analytičnosti můžeme udělat Taylorův rozvoj (v okolí identity)

$$\tilde{x}^j = x^j + \sum_\alpha \varepsilon_\alpha \xi^{\alpha j}(x) + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$$

kde $\xi^{\alpha j}(x) = \frac{\partial \tilde{x}^j}{\partial \varepsilon_\alpha}\Big|_{\varepsilon=e} = \frac{\partial F^j(x,\varepsilon)}{\partial \varepsilon_\alpha}\Big|_{\varepsilon=e}$ (obecněji bychom derivovali v $\varepsilon \leftrightarrow e$)

- pro 1-param. LGT (příp. podgrupy nějaké víceparam. LGT) bude jednoduše $\tilde{x}^j = x^j + \varepsilon \xi^j(x) + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$, kde $\xi^j(x) = \frac{\partial F^j(x,\varepsilon)}{\partial \varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0}$

Př. projektivní transformace roviny (x,y)

$$(\tilde{x},\tilde{y}) = F((x,y),\varepsilon) = \left(\frac{x}{1-\varepsilon x}, \frac{y}{1-\varepsilon x}\right) \quad \text{s grp. op. } \phi(\varepsilon,\delta)=\varepsilon+\delta$$

tvoří 1-par. LGT, neboť

1) $F(F((x,y),\varepsilon),\delta) = F((x,y),\varepsilon+\delta)$

$$\| $$

$$F\left(\left(\frac{x}{1-\varepsilon x}, \frac{y}{1-\varepsilon x}\right),\delta\right) = \left(\frac{\frac{x}{1-\varepsilon x}}{1-\delta\frac{x}{1-\varepsilon x}}, \frac{\frac{y}{1-\varepsilon x}}{1-\delta\frac{x}{1-\varepsilon x}}\right) = \left(\frac{x}{1-(\varepsilon+\delta)x}, \frac{y}{1-(\varepsilon+\delta)x}\right) \checkmark$$

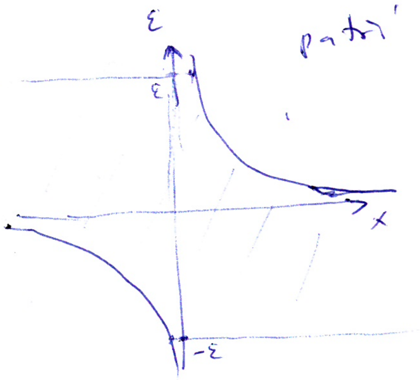
2) jednotkový prvek je pro $\varepsilon = 0$

$$F((x,y),0) = (x,y) \text{ pro } \forall x,y$$

3) inverzní transformace k ε je pro $-\varepsilon$:

$$F(F((x,y),\varepsilon),-\varepsilon) = (x,y) \leftarrow \text{plyne z výše}$$

ovšem pozor, měli bychom ještě ověřit, že pro všechny body z $U = \{((x,y),\varepsilon),\ \varepsilon < \frac{1}{x} \text{ pro } x>0 \text{ a } \varepsilon > \frac{1}{x} \text{ pro } x<0\}$ patří do U též $(F((x,y),\varepsilon),\varepsilon^{-1}) = \left(\left(\frac{x}{1-\varepsilon x}, \frac{y}{1-\varepsilon x}\right), -\varepsilon\right)$



opravdu se např. $x\in(-\infty,\frac{1}{\varepsilon})$ pro kladné ε zobrazí na $(-\frac{1}{\varepsilon},+\infty)$, což je správný interval pro $-\varepsilon$