Rozšíření (též prodloužení) infinitezimálních transformací

- dříve jsme si ukázali, jak rozšířit lokální Lieovu grupu transformací do prostoru derivací, tj. jak z transformací nezávislých a závislých proměnných najít transformace všech potřebných derivací
- nyní budeme uvažovat jednoparam. LGT

$$\tilde{x}^i = F^i(x,u,\varepsilon) = x^i + \varepsilon\, \xi^i(x,u) + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$$
$$\tilde{u}^\mu = G^\mu(x,u,\varepsilon) = u^\mu + \varepsilon\, \eta^\mu(x,u) + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$$

a zajímá nás, jak určíme rozšíření těchto infin. transformací do prostoru derivací, tj. hledáme $\eta^\mu_{i_1\dots i_k}$ ve vztazích

$$\tilde{u}^\mu_i = H^\mu_i(x,u,\partial u,\varepsilon) = u^\mu_i + \varepsilon\, \eta^\mu_i(x,u,\partial u) + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$$
$$\vdots$$
$$\tilde{u}^\mu_{i_1\dots i_k} = H^\mu_{i_1\dots i_k}(x,u,\partial u,\dots \partial^k u,\varepsilon) = u^\mu_{i_1\dots i_k} + \varepsilon\, \eta^\mu_{i_1\dots i_k}(x,u,\partial u,\dots,\partial^k u) + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$$

- k tomu využijeme již dříve odvozených vztahů pro $H^\mu_i, \dots H^\mu_{i_1\dots i_k}$ a rozvineme je do řádu ε. Pro první derivace dostaneme

$$\begin{pmatrix} \tilde{u}^\mu_1 \\ \vdots \\ \tilde{u}^\mu_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H^\mu_1 \\ \vdots \\ H^\mu_n \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} D_1 G^\mu \\ \vdots \\ D_n G^\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_1F^1 & D_1F^2 & \dots & D_1F^n \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ D_nF^1 & \dots & & D_nF^n \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} D_1 G^\mu \\ \vdots \\ D_n G^\mu \end{pmatrix} =$$

nyní už necháváme pouze členy do řádu ε

$$= \begin{pmatrix} 1+\varepsilon D_1\xi^1 & \varepsilon D_1 \xi^2 & \dots & \varepsilon D_1 \xi^n \\ \varepsilon D_2 \xi^1 & 1+\varepsilon D_2\xi^2 & \dots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \varepsilon D_n \xi^1 & \dots & & 1+\varepsilon D_n \xi^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^\mu_1 + \varepsilon D_1 \eta^\mu \\ \vdots \\ u^\mu_n + \varepsilon D_n \eta^\mu \end{pmatrix} =$$

zde využijeme toho, že pro $A = 1 + \varepsilon B$ platí $A^{-1} = 1 - \varepsilon B$ do řádu ε

$$= \begin{pmatrix} 1-\varepsilon D_1\xi^1 & \dots & -\varepsilon D_1 \xi^n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ -\varepsilon D_n \xi^1 & \dots & 1-\varepsilon D_n \xi^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^\mu_1 + \varepsilon D_1 \eta^\mu \\ \vdots \\ u^\mu_n + \varepsilon D_n \eta^\mu \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} u^\mu_1 + \varepsilon\left[D_1\eta^\mu - \sum_{i=1}^n (D_1\xi^i)\, u^\mu_i\right] + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \\ \vdots \\ u^\mu_n + \varepsilon\left[D_n\eta^\mu - \sum_{i=1}^n (D_n\xi^i)\, u^\mu_i\right] + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u^\mu_1 + \varepsilon\, \eta^\mu_1 + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \\ \vdots \\ u^\mu_n + \varepsilon\, \eta^\mu_n + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \end{pmatrix}$$

neboli
$$\boxed{\eta^\mu_i = D_i \eta^\mu - \sum_{k=1}^{n} (D_i \xi^k) u^\mu_k}$$

- zcela obdobně bychom pokračovali pro vyšší derivace, jen místo $D_1 G^\mu$ bychom použili $D_1 H^\mu_i$ a pod.

  Dostali bychom rekurzivní vztahy
$$\boxed{\eta^\mu_{i_1 \dots i_k} = D_{i_k} \eta^\mu_{i_1 \dots i_{k-1}} - \sum_{j=1}^{n} (D_{i_k} \xi^j) u^\mu_{i_1 \dots i_{k-1} j}}$$

- odpovídající rozšíření infinitezimálního operátoru X do prostoru až k-tých derivací pak je
$$X^{(k)} = \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_{\mu=1}^{m} \eta^\mu \frac{\partial}{\partial u^\mu}}_{X} + \sum_{i,\mu} \eta^\mu_i \frac{\partial}{\partial u^\mu_i} + \dots + \sum_{\substack{i_1 \dots i_k \\ \mu}} \eta^\mu_{i_1 \dots i_k} \frac{\partial}{\partial u^\mu_{i_1 \dots i_k}}$$

- v případě obyčejných diferenciálních rovnic (x nezávislá, y závislá proměnná) budeme používat zjednodušenou notaci
$$\tilde{x} = F(x, y, \varepsilon) = x + \varepsilon \xi(x,y) + O(\varepsilon^2)$$
$$\tilde{y} = G(x, y, \varepsilon) = y + \varepsilon \eta(x,y) + O(\varepsilon^2)$$
$$\frac{d\tilde{y}}{d\tilde{x}} \equiv \tilde{y}_1 = H_1(x, y, y_1, \varepsilon) = y_1 + \varepsilon \eta^{(1)}(x, y, y_1) + O(\varepsilon^2)$$
$$\vdots$$
$$\frac{d^k\tilde{y}}{d\tilde{x}^k} \equiv \tilde{y}_k = H_k(x, y, y_1 \dots y_k, \varepsilon) = y_k + \varepsilon \eta^{(k)}(x, y, y_1 \dots y_k) + O(\varepsilon^2)$$

  kde nyní $\quad \eta^{(1)} = D_x \eta - y_1 D_x \xi, \dots, \eta^{(k)} = D_x \eta^{(k-1)} - y_k D_x \xi$

Př: translace $\left.\begin{array}{l} \tilde{x} = x + \varepsilon a \\ \tilde{y} = x + \varepsilon b \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \xi(x,y) = a \\ \eta(x,y) = b \end{array}\right\} \Rightarrow \eta^{(k)} = 0$ pro $k \geq 1$

škálování $\left.\begin{array}{l} \tilde{x} = x \\ \tilde{y} = e^\varepsilon y \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \xi(x,y) = 0 \\ \eta(x,y) = y \end{array}\right\} \Rightarrow \eta^{(k)} = y_k$ pro $k \geq 1$

rotace: $\left.\begin{array}{l} \tilde{x} = x \cos \varepsilon - y \sin \varepsilon \\ \tilde{y} = x \sin \varepsilon + y \cos \varepsilon \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \xi(x,y) = -y \\ \eta(x,y) = x \end{array}\right\} \Rightarrow$
$$\eta^{(1)} = 1 + y_1^2$$
$$\eta^{(2)} = 3 y_1 y_2$$
$$\eta^{(3)} = 3 y_2^2 + 4 y_1 y_3$$
$$\vdots$$