Metoda diferenciálních invariantů

- pokud máme ODR k-tého řádu
$$y_k = f(x, y, y_1, \dots, y_{k-1}) \qquad (1)$$
která je invariantní vůči 1-par. LGT generované
$$X = \xi(x,y)\frac{\partial}{\partial x} + \eta(x,y)\frac{\partial}{\partial y} \quad , \text{ tj. platí } X^{(k)}(y_k - f)\Big|_{y_k=f} = 0$$
pak lze obecně ukázat, že rovnici (1) je ekvivalentní (lze přepsat) rovnici
$$G(u, v_1, v_2 \dots v_k) = 0$$
kde $u, v_1, \dots v_k$ jsou tzv. invarianty této 1-par. LGT splňující
$$X^{(k)}u = 0 \,, \quad X^{(k)}v_i = 0 \quad , i = 1, \dots, k$$
(pro operátor $X^{(k)} = \xi\frac{\partial}{\partial x} + \eta\frac{\partial}{\partial y} + \eta^{(1)}\frac{\partial}{\partial y_1} + \dots + \eta^{(k)}\frac{\partial}{\partial y_k}$ je $X^{(k)}u = 0$ PDR pro neznámou fci $u(x, y, y_1, \dots, y_k)$, která má $k+1$ nezávislých řešení zde označených $u, v_1 \dots v_k$)
- tyto invarianty lze hledat buď přímo řešením $X^{(k)}u = 0$, nebo stačí najít dva dané rovnicemi
$$Xu(x,y) = 0$$
$$X^{(1)}v_1(x, y, y_1) = 0$$
a ostatní spočítat pomocí
$$v_2 = \frac{dv_1}{du} = \frac{D_x v_1}{D_x u} \,, \quad \dots \quad , v_k = \frac{dv_{k-1}}{du} = \frac{D_x v_{k-1}}{D_x u}$$
Takto určeným invariantům říkáme <u>diferenciální invarianty</u>, pro které zřejmě platí, že $\frac{\partial v_k}{\partial y_k} \neq 0$ pokud $\frac{\partial v_1}{\partial y_1} \neq 0$ neboť např.
$$v_2 = \frac{D_x v_1}{D_x u} = \frac{\frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y}y_1 + \frac{\partial v_1}{\partial y_1}y_2}{\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}y_1} = f_1(x, y, y_1) + f_2(x, y, y_1)\,y_2$$
a pod. pro vyšší derivace.
- ukažme si nyní, že jde opravdu o invarianty, tj. že platí $X^{(j)}v_j = X^{(k)}v_j = 0$, pokud $Xu = 0$ a $X^{(1)}v_1 = 0$.
  - ukažme nejprve, že obecně platí:
    Pokud $X^{(j-1)}v(x, y, y_1, \dots, y_{j-1}) = 0$ a $X^{(j-1)}w(x, y, y_1, \dots, y_{j-1}) = 0$,
    pak $X^{(j)}\frac{dw}{dv} = 0$.

spočtěme nejprve výraz (předpokládáme, že funkce F nezávisí na y_j, protože ani v a w nezávisí na y_j a vyšších derivacích)

(✱)

$$[X^{(j)}, D_x]\, F(x, y, y_1, \dots, y_{j-1}) =$$

$$= \left[\xi \frac{\partial}{\partial x} + \eta \frac{\partial}{\partial y} + \eta^{(1)} \frac{\partial}{\partial y_1} + \dots + \eta^{(j)} \frac{\partial}{\partial y_j}, \frac{\partial}{\partial x} + y_1 \frac{\partial}{\partial y} + \dots + y_j \frac{\partial}{\partial y_{j-1}} + y_{j+1} \frac{\partial}{\partial y_j} + \dots \right] F =$$

(všechny druhé derivace se odečtou, zůstanou členy typu
$\eta^{(i)} \frac{\partial}{\partial y_i}\left(y_i \frac{\partial}{\partial y_{i-1}}\right) = [D_x \eta^{(i-1)} - (D_x \xi) y_i] \frac{\partial}{\partial y_{i-1}}$ a dále členy s $D_x\xi, D_x\eta \dots$)

$$= \Big\{ [\cancel{D_x \eta} - (D_x\xi) y_1] \frac{\partial}{\partial y} + [\cancel{D_x \eta^{(1)}} - (D_x \xi) y_2] \frac{\partial}{\partial y_2} + \dots + [\cancel{D_x \eta^{(j-1)}} - (D_x\xi) y_j] \frac{\partial}{\partial y_{j-1}} -$$
$$- (D_x \xi) \frac{\partial}{\partial x} - \cancel{(D_x \eta) \frac{\partial}{\partial y}} - \cancel{(D_x \eta^{(1)}) \frac{\partial}{\partial y_1}} - \dots - \cancel{(D_x \eta^{(j-1)}) \frac{\partial}{\partial y_{j-1}}} \Big\} F =$$

$$= -(D_x \xi)(D_x F)$$ (zde můžeme psát opět obecné $D_x F$, neboť vyšší derivace než $\frac{\partial}{\partial y_{j-1}}$ stejně nepřispějí)

Nyní se vraťme k výrazu

$$X^{(j)} \frac{dw}{dv} = X^{(j)} \frac{D_x w}{D_x v} = (D_x v)^{-2} \left[(D_x v)(X^{(j)} D_x w) - (D_x w)(X^{(j)} D_x v) \right] =$$

zde jsme použili $X^{(j)} D_x F = D_x(X^j F) - (D_x\xi)(D_x F)$ plynoucí z (✱)

$$= (D_x v)^{-2} \Big[(D_x v)\, D_x(\underbrace{X^{(j)} w}_{\overset{\shortparallel}{0}}) - \cancel{(D_x v)(D_x \xi)(D_x w)} - (D_x w)\, D_x(\underbrace{X^{(j)} v}_{\overset{\shortparallel}{0}}) + \cancel{(D_x w)(D_x \xi)(D_x v)} \Big] = 0$$

dle předpokl. dle předpokladu

Dokázali jsme tedy, že $X^{(j)} \frac{dw}{dv} = 0$ a protože pro u platí $X u(x,y) = 0$ a tedy i $X^{(j)} u = 0$ pro lib. $j \geq 1$, dokázali jsme i $X^{(j)} v_j = X^{(j)} \frac{dv_{j-1}}{du} = 0$, neboť v_{j-1} závisí nejvýše na y_{j-1} a platí pro ně $X^{(j-1)} v_{j-1} = 0$

- invarianty jsou ideální, chceme-li konstruovat diferenciální rovnice k-tého řádu invariantní vůči zadané 1-par. LGT. Stačí najít všechny nezávislé invarianty pomocí $X^{(k)} u = 0$ (je jich $k+1$), např. výše uvedené diferenciální inv. $u, v_1, \dots, v_k$ a obecná ODR k-tého řádu inv. vůči $X^{(k)}$ pak bude
$$G(u, v_1, \dots v_k) = 0$$
kde G je libovolná funkce (Inf. kritérium je splněno automaticky)

Redukce řádu ODR pomocí diferenciálních invariantů

- z výše uvedeného je zřejmé, že z ODR k-tého řádu

$$R(x,y,y_1 \dots y_k) = 0,$$

která je invariantní vůči 1-par. LGT generované $X = \xi \frac{\partial}{\partial x} + \eta \frac{\partial}{\partial y}$,

dostaneme přechodem k diferenciálním invariantům

$$Xu = 0, \quad X^{(1)} v_1 = 0, \quad \dots \quad , X^{(k)} v_k = 0 \quad , \quad v_j = \frac{dv_{j-1}}{du}, \ j \geq 2$$

rovnici o jeden řád nižší, tj.

$$G\left(u, v_1, \frac{dv_1}{du}, \dots \frac{d^{k-1}v_1}{du^{k-1}}\right) = 0$$

pro jisté G plynoucí z $R = 0$ a řešení $y = y(x)$ původní rovnice pak bude dáno implicitně pomocí ODR 1. řádu

$$v_1(x,y,y_1) = \phi(u(x,y), c_1, \dots, c_{k-1})$$

kde ϕ je řešení $G = 0$ a $c_1, \dots c_{k-1}$ jsou integrační konstanty.

Jde o ODR 1. řádu invariantní vůči 1-par. LGT gener. X a lze tedy k jejímu řešení využít původní symetrie (uvědomte si, že v_1 a u jsou invarianty, tedy i $v_1 = \phi(u)$ je invariantní vůči X)

Pozn. rovnici $G(u, v_1 \dots) = 0$ lze určit tak, že postupně vyjádříme derivace $y_{j+1} = \frac{d^j v_1}{du^j} A_j(x,y,y_1 \dots y_j) + B_j(x,y,y_1 \dots y_j)$ a dosadíme do $R = 0$.

Př. uvažujme opět lin. homog. rovnici 2. řádu

$$R = y_2 + p(x) y_1 + q(x) y = 0,$$

která je inv. vůči škálování v y, tj. $X = y \frac{\partial}{\partial y}$

a tedy $X^{(2)} = y \frac{\partial}{\partial y} + y_1 \frac{\partial}{\partial y_1} + y_2 \frac{\partial}{\partial y_2}$

Invarianty jsou $u = x$, $v_1 = \frac{y_1}{y}$ a $\frac{dv_1}{du} = \frac{D_x v_1}{D_x u} = \frac{y_2}{y} - \left(\frac{y_1}{y}\right)^2$

a tedy $y_2 = y \frac{dv_1}{du} + y\left(\frac{y_1}{y}\right)^2$, $y_1 = y v_1$

z čehož $R = y\left[\frac{dv_1}{du} + v_1^2 + p(u) v_1 + q(u)\right] = 0$ (opět rovnice Ricattiho typu)

a známe-li $v_1 = \phi(u, c_1) = \frac{y_1}{y}$ bude $y = c_2 e^{\int \phi(x, c_1)\, dx}$

r-parametrické LGT a redukce ODR k-tého řádu

- obecně neplatí, že invariance ODR vůči r-par. LGT vede k redukci o r řádů + r kvadratur (integrálů), neboť při aplikaci jedné 1-par. podgrupy dostaneme rci o 1 řád nižší, ~~kt~~ ta však už nemusí být invariantní vůči ostatním jednopar. podgrupám
- ovšem pro r-par. LGT, která je řešitelná, ~~E~~ je tato redukce možná
  - o r-par. LGT říkáme, že je řešitelná, pokud je její LA inf. gen. řešitelná, tj. $\exists$ báze $X_1, \dots X_r$ pro kterou

$$[X_i, X_j] = \sum_{k=1}^{j-1} c_{ij}^k X_k \quad , 1 \le i \le j \quad , j = 2, \dots, r$$

tj. $[X_1, X_2] = c_{12}^1 X_1$, $[X_1, X_3] = c_{13}^1 X_1 + c_{13}^2 X_2$ atd.

pozn: stejné komutační relace platí i pro k-té rozšíření $X_1^{(k)} \dots X_r^{(k)}$

- jinými slovy existuje řetězec podalgeber

$$\{0\} = \mathcal{G}^{(0)} \subset \mathcal{G}^{(1)} \subset \dots \subset \mathcal{G}^{(r)} = \mathcal{G} = \text{LA příslušné grupy}$$

takových, že pro $\forall k$ je $\dim \mathcal{G}^{(k)} = k$ a $\mathcal{G}^{(k-1)}$ je ideálem $\mathcal{G}^{(k)}$ (normální podalgebrou)

tj. $[\mathcal{G}^{(k-1)}, \mathcal{G}^{(k)}] \subset \mathcal{G}^{(k-1)}$

Na úrovni grupy $\exists$ řetězec $\{e\} = G^{(0)} \subset G^{(1)} \dots \subset G^{(r-1)} \subset G^{(r)} = G$ takový, že pro $\forall k = 1, \dots r$ je $G^{(k)}$ k-rozměrná podgrupa G a $G^{(k-1)}$ je normální podgrupou $G^{(k)}$, tj. $hG^{(k-1)}h^{-1} \subset G^{(k-1)}$

- platí: Každá abelovská LA je řešitelná. (triviální)

  Každá dvourozměrná LA je řešitelná, neboť

  je-li $\{X_1, X_2\}$ lib. báze, pak vezmeme-li $Y = [X_1, X_2] = aX_1 + bX_2$

  pak pro lib. $Z = c_1 X_1 + c_2 X_2$ dostaneme

$$[Y, Z] = c_1 [Y, X_1] + c_2 [Y, X_2] = (c_2 a - c_1 b) Y \quad \text{a tedy}$$

  $\mathcal{L}\{Y\}$ je ideálem dané LA.

pozn. 3-rozm. LA nemusí být řešitelné (např. SO(3))

ale může být, např. ISO(2) = rotace a translace v rovině, neboli Euklidovská grupa

$X_1 = -y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y}$

$X_2 = \frac{\partial}{\partial x}$, $X_3 = \frac{\partial}{\partial y}$

	X_1	X_2	X_3
X_1	0	$-X_3$	X_2
X_2	X_3	0	0
X_3	$-X_2$	0	0

$\Leftarrow$

$\mathcal{G}^{(1)} = \mathcal{L}\{X_2\}$

$\mathcal{G}^{(2)} = \mathcal{L}\{X_2, X_3\}$

Redukce ODR k-tého řádu invariantní vůči 2-par. LGT

- nechť $\frac{d^k y}{dx^k} = f(x, y, y_1, \dots, y_{k-1})$ je inv. vůči LGT generované $[X_1, X_2] = \lambda X_1$ (*)
- vezmeme X_1 a nalezneme $X_1 u = 0$, $X_1^{(1)} v_1(x,y,y_1) = 0$ a $v_2 = \frac{dv_1}{du}$ splňující $X_1^{(2)} v_2 = 0$

  $\Rightarrow$ redukce na $\frac{d^{k-1} v_1}{du^{k-1}} = H\left(u, v_1, \dots \frac{d^{k-2} v_1}{du^{k-2}}\right)$ (**)

- nyní využijeme komut. relací (*):

$$X_1 X_2 u = X_2 X_1 u + \lambda X_1 u = 0 \Rightarrow X_2 u = \alpha(u)$$

$$X_1^{(1)} X_2^{(1)} v_1 = X_2^{(1)} X_1^{(1)} v_1 + \lambda X_1^{(1)} v_1 = 0 \Rightarrow X_2^{(1)} v_1 = \beta(u, v_1)$$

a pod. $X_1^{(2)} X_2^{(2)} v_2 = 0 \Rightarrow X_2^{(2)} v_2 = \gamma(u, v_1, v_2)$

- protože $y_k = f(x, y \dots y_{k-1})$ je inv. vůči (*) a (**) je ekvivalentní s $y_k = f$ musí být (**) též inv. vůči (*) a tedy

$$X_2^{(k-1)}\left(\frac{d^{k-1} v_1}{du^{k-1}} - H\right)\Big|_{\frac{d^{k-1} v_1}{du^{k-1}} = H} = 0$$

- lze ukázat (viz Olver, kap. 2), že $X_2^{(1)}$ a $X_2^{(2)}$ lze zapsat pomocí proměnných u, v_1, v_2 jako $X_2^{(1)} = \alpha(u)\frac{\partial}{\partial u} + \beta(u, v_1)\frac{\partial}{\partial v_1}$, $X_2^{(2)} = X_2^{(1)} + \gamma(u, v_1, v_2)\frac{\partial}{\partial v_2}$

  [když se omezíme na podprostor (u, v_1, v_2), což můžeme, protože (**) ani $X_2 u, \dots, X_2^{(2)} v_2$ nezávisí na posl. prom. $t: X_1 t = 1$]

  přičemž (**) je inv. vůči grupě generované $X_2^{(1)}$

- pokračujeme tedy dále nalezením invariantů $X_2^{(1)} U = 0$, $X_2^{(2)} V_1 = 0$

  a redukujeme na $\frac{d^{k-2} V_1}{dU^{k-2}} = I\left(U, V_1, \dots \frac{d^{k-3} V_1}{dU^{k-3}}\right)$

- pokud $V_1 = \phi(U, c_1 \dots c_{k-2})$ je řešení, pak $V_1(u, v_1, v_2) = \phi(U(u, v_1), c_1 \dots c_{k-2})$ je ODR 1. řádu inv. vůči grupě gener. $X_2^{(1)}$ a redukuje se tedy na $v_1 = \psi(u, c_1 \dots c_{k-1})$ a pod. dostáváme

$$v_1(x, y, y_1) = \psi(u(x,y), c_1 \dots c_{k-1}) \quad \text{inv. vůči } X_1$$

  a opět integrujeme

- máme-li rci 2. řádu, je třeba (**) přímo vyintegrovat např. pomocí kanonických prom.

- pokud máme r-par. LGT a ODR $k > r$, pak se postup opakuje r-krát

Př. metoda variace konstant pro ~~...~~ lin. nehomog. rci k-tého řádu

$$L(y) = y_k + p_1(x) y_{k-1} + \dots + p_k(x) y = g(x)$$

plyne z invariance této rce vůči k-par. grupě

$$\tilde{x} = x$$
$$\tilde{y} = y + \varepsilon_1 \phi_1(x) + \dots + \varepsilon_k \phi_k(x)$$

s inf. gener. $X_i^{(k)} = \phi_i(x) \frac{\partial}{\partial y} + \phi_i'(x) \frac{\partial}{\partial y_1} + \dots + \phi_i^{(k)}(x) \frac{\partial}{\partial y_k}$

která je abelovská a tedy řešitelná.

Řešení má tvar $y(x) = \sum_{i=1}^{k} c_i \phi_i(x) + \sum_{i=1}^{k} \phi_i(x) \int \frac{W_i(x)}{W_{\phi_1 \dots \phi_k}(x)} g(x)\, dx$

kde wronskián $W_{\phi_1 \dots \phi_k}(x) = \begin{vmatrix} \phi_1 & \dots & \phi_k \\ \phi_1' & \dots & \phi_k' \\ \vdots & & \\ \phi_1^{(k-1)} & \dots & \phi_k^{(k-1)} \end{vmatrix}$ a $W_i(x)$ je $W_{\phi_1 \dots \phi_k}(x)$ s i-tým sloupcem $\begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{matrix}$

zkusme si to pro $k=2$ (viz Bluman, Anco 143-145)

- řešme $y_2 + p_1(x) y_1 + p_2(x) y = g(x)$ pomocí symetrie vůči $X_1 = \phi_1 \frac{\partial}{\partial y}$, $X_2 = \phi_2 \frac{\partial}{\partial y}$

invarianty pro X_1 jsou $u = x$, $v_1 = \frac{y_1}{\phi_1'} - \frac{y}{\phi_1} \leftarrow \frac{dy}{\phi_1} = \frac{dy_1}{\phi_1'}$

$$v_2 = \frac{dv_1}{du} = \frac{y_2}{\phi_1'} - y_1 \left(\frac{\phi_1''}{(\phi_1')^2} - \frac{1}{\phi_1} \right) + y \frac{\phi_1'}{\phi_1^2}$$

$$\Rightarrow \quad H(u, v_1, v_2) = \phi_1'(u) v_2 + \left(\phi_1''(u) + \frac{\phi_1'(u)^2}{\phi_1(u)} + p_1(u) \phi_1'(u) \right) v_1 = g(u)$$

inf. oper. $X_2^{(1)} = \alpha(u) \frac{\partial}{\partial u} + \beta(u, v_1) \frac{\partial}{\partial v_1}$ kde $\alpha(u) = X_2 u = \phi_2 \frac{\partial}{\partial y} x = 0$

$$\beta(u, v_1) = X_2^{(1)} v_1 = \frac{\phi_2'}{\phi_1'} - \frac{\phi_2}{\phi_1} = \frac{W_{\phi_1 \phi_2}(x)}{\phi_1' \phi_1}$$

- rce $H(u, v_1, v_2) = g(u)$ je inv. vůči $X_2^{(1)} = \frac{W_{\phi_1 \phi_2}(u)}{\phi_1'(u) \phi_1(u)} \frac{\partial}{\partial v_1}$

$\Rightarrow$ integrace pomocí kanon. prom. $R = u$, $S = \frac{\phi_1' \phi_1}{W_{\phi_1 \phi_2}} v_1$

z nichž $\frac{dS}{dR} = \frac{g(R) \phi_1(R)}{W_{\phi_1 \phi_2}(R)}$ (což uskutku vyjde dosazením do $H = g$ za v_2!)

$$\Rightarrow \quad S = \frac{y_1 \phi_1(x) - y \phi_1'(x)}{W} = \int \frac{g \phi_1}{W} dx + C_2$$

což je inv. vůči $X_1 = \phi_1 \frac{\partial}{\partial y}$ (neboť S je fcí invariantů u, v_1)

integrujeme pomocí kanon. proměnných $r = x$, $s = \frac{y}{\phi_1}$ $\Rightarrow$ $\frac{ds}{dr} = \frac{W}{\phi_1^2} \left[\int \frac{g \phi_1}{W} dx + C_2 \right] = \frac{W}{\phi_1^2} S = \underbrace{\left(\frac{\phi_2}{\phi_1} \right)' \int \frac{g \phi_1}{W} dx}_{\frac{d}{dx}\left[\frac{\phi_2}{\phi_1} \int \dots dx - \frac{g \phi_2}{W} \right]} + C_2 \left(\frac{\phi_2}{\phi_1} \right)'$

a tedy $\frac{y}{\phi_1} = s = C_2 \left(\frac{\phi_2}{\phi_1} \right) + \frac{\phi_2}{\phi_1} \int \frac{g \phi_1}{W} dx - \int \frac{g \phi_2}{W} dx + C_1$

a vynásobením ϕ_1 dostáváme to, co máme

Př. LHO pomocí dif. invariantů s tím, že za X_1 vezmeme $\frac{\partial}{\partial x}$

$$y_2 + \omega^2 y = 0 \qquad (*)$$

invarianty translace jsou $u = y$, $v_1 = y_1$, ...

my však chceme diferenciální inv., tj.

$$v_2 = \frac{dv_1}{du} = \frac{D_x v_1}{D_x u} = \frac{y_2}{y_1} \Rightarrow y_2 = v_2 y_1 = v_2 v_1$$

a tedy (*) je ekvivalentní rci

$$\frac{dv_1}{du} v_1 + \omega^2 u = 0 \qquad (**)$$

která je invariantní vůči škálování $X_2^{(u,v)} = u\frac{\partial}{\partial u} + v_1 \frac{\partial}{\partial v_1}$

neboť $X_2^{(2)} = y\frac{\partial}{\partial y} + y_1 \frac{\partial}{\partial y_1} + y_2 \frac{\partial}{\partial y_2} = \alpha(u)\frac{\partial}{\partial u} + \beta(u,v_1)\frac{\partial}{\partial v_1} + \gamma(u,v_1,v_2)\frac{\partial}{\partial v_2}$

kde $\alpha(u) = X_2^{(2)} u(x,y) = y = u$

$\beta(u,v_1) = X_2^{(2)} v_1 = y_1 = v_1$

$\gamma(u,v_1,v_2) = X_2^{(2)} v_2 = \frac{y_2}{y_1} - \frac{y_1 y_2}{y_1^2} = 0$

a tedy pokud $X_2^{(2)}(*)\Big|_{y_2=-\omega^2 y} = 0$, pak také $X_2^{(u,v_1)}\left(\frac{dv_1}{du} v_1 + \omega^2 u\right)\Big|_{(**)} = 0$

a můžeme integrovat např. pomocí kanon. prom.

Ovšem vidíme přímo, že

$$v_1 dv_1 = -\omega^2 u\, du \Rightarrow v_1^2 = -\omega^2 u^2 + c^2$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = v_1 = \sqrt{c^2 - \omega^2 y^2} \Rightarrow x + x_0 = \frac{1}{\omega} \arcsin \frac{\omega}{c} y \quad \Leftarrow \int \frac{\frac{\omega}{c} dy}{\sqrt{1 - \frac{\omega^2}{c^2} y^2}} = \arcsin \frac{\omega}{c} y$$

neboli opět

$$y = \underbrace{\frac{c}{\omega}}_{A} \sin \omega (x + x_0)$$