Zobecněné symetrie

- motivace — dosud jsme uvažovali tzv. <u>bodové symetrie</u>

tj. LGT mezi nezávislými a závislými proměnnými

→ pomocí rozšíření do prostoru derivací jsme ověřovali invarianci PDR při těchto transf.

byly generovány $X = \sum_i \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_\alpha \eta^\alpha \frac{\partial}{\partial u^\alpha}$, kde $\xi^i(x,u)$ a $\eta^\alpha(x,u)$

- nyní připustíme závislost ξ^i a η^α i na derivacích ∂u ...

Proč? 1) při řešení ODR $y_2 = f(y, y_1)$ lze využít symetrie vůči $\tilde{x} = x + \varepsilon$, $\tilde{y} = y$

gener. $X_1 = \frac{\partial}{\partial x}$, redukce na $\frac{dv}{du} = \frac{y_2}{y_1} = \frac{f(u,v)}{v} = F(u,v)$ $\quad u = y$, $v = y_1$

pomocí dif. inv.

nová rovnice je ODR 1. řádu, pro kterou vždy existuje bod. symetrie

ale ta není bod. symetrií $y_2 = f(y, y_1)$, avšak je její zobecněnou symetrií, neboť je-li $X_2 = \xi(u,v)\frac{\partial}{\partial u} + \eta(u,v)\frac{\partial}{\partial v}$ symetrií

vce $\frac{dv}{du} = F(u,v)$, pak je $X_2^{(x,y,y_1)} = \xi(y,y_1)\frac{\partial}{\partial y} + \eta(y,y_1)\frac{\partial}{\partial y_1}$

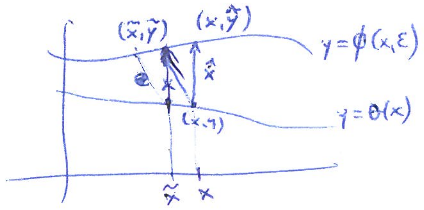
symetrií $y_2 = f(y, y_1)$

2) místo transf. na (x,u) lze uvažovat působení na funkcích $y = y(x)$

uvažujme případ $y = y(x)$ a transformaci
$$\tilde{x} = F(x, y, \varepsilon)$$
$$\tilde{y} = G(x, y, \varepsilon)$$

která převádí $y = \theta(x)$ na nové fce $y = \phi(x, \varepsilon)$ dané ~~φ~~ implicitně jako

$$y = G(F(x, y, -\varepsilon), \theta(F(x, y, -\varepsilon)), \varepsilon)$$



- můžeme se na to dívat jako na transf. fce $\theta(x)$ na nové fce $\phi(x,\varepsilon)$ pomocí operátoru daného jistým inf. gener. $\hat{X}$ jako $\phi(x,\varepsilon) = e^{\varepsilon \hat{X}^{(\infty)}} y \big|_{y=\theta(x)}$

kde $\hat{X} = \hat{\eta} \frac{\partial}{\partial y}$

operátor $\hat{X}$ nalezneme ze vztahů
$$\tilde{x} = x + \varepsilon \xi(x, \theta(x)) + \sigma(\varepsilon^2)$$
$$\tilde{y} = \theta(x) + \varepsilon \eta(x, \theta(x)) + \sigma(\varepsilon^2)$$

dosazením za $x = \tilde{x} - \varepsilon \xi(\tilde{x}, \theta(\tilde{x}))$ do druhé rce a ponechání členů do řádu ε
$$\tilde{y} = \theta(\tilde{x}) + \varepsilon\left(\eta(\tilde{x}, \theta(\tilde{x})) - \xi(\tilde{x}, \theta(\tilde{x}))\theta'(\tilde{x})\right) + \sigma(\varepsilon^2)$$ — transformace v bodě $\tilde{x}$

neboli obraz $\theta(x)$ je explicitně dán $\phi(x,\varepsilon) = \theta(x) + \varepsilon\left[\eta(x,\theta(x)) - \xi(x,\theta(x))\theta'(x)\right] + \dots$

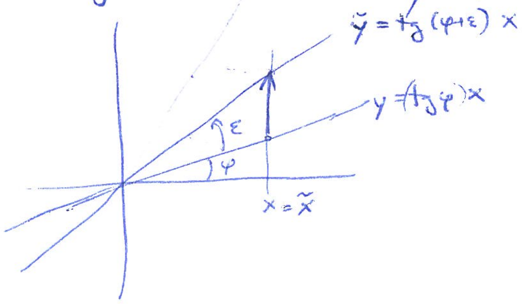
což lze též vyjádřit jako transf.

$$\tilde{x} = x$$
$$\tilde{y} = y + \varepsilon[\eta(x,y) - \xi(x,y)\, y_1] + O(\varepsilon^2)$$

a inf. generátor $\hat{X} = \underbrace{(\eta - \xi y_1)}_{\hat{\eta}}\frac{\partial}{\partial y}$ se nazývá charakteristický tvar inf. generátoru $X = \xi\frac{\partial}{\partial x} + \eta\frac{\partial}{\partial y}$

rozšíření tohoto op. do prostoru ~~yp~~ derivací obdržíme podobně jako pro X, jen nyní $\hat{\xi} = 0$ a tedy $\hat{\eta}^{(1)} = D\hat{\eta}$, $\hat{\eta}^{(2)} = D\hat{\eta}^{(1)}$ atd.

Př. uvažujme rotaci přímky $y = \theta(x) = \operatorname{tg}\varphi\, x$



zde máme inf. gen. $X = -y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y}$

a dostaneme z
$$\tilde{x} = x - \varepsilon y + O(\varepsilon^2)$$
$$\tilde{y} = y + \varepsilon x + O(\varepsilon^2)$$

inf. transformaci ~~fce y = θ(x)~~ $\hat{\eta}(x,y,y_1) = \eta - \xi y_1 = x + y y_1$

$$\tilde{x} = x$$
$$\tilde{y} = y + \varepsilon(x + y y_1) + O(\varepsilon^2)$$

neboli nová fce $\phi(x,\varepsilon)$ z fce $\theta(x)$ je dána pomocí

$$\operatorname{tg}(\varphi+\varepsilon)\, x = \phi(x,\varepsilon) = \theta(x) + \varepsilon(x + \theta(x)\theta'(x)) + O(\varepsilon^2) =$$
$$= \operatorname{tg}\varphi\, x + \varepsilon x + \varepsilon x \operatorname{tg}^2\varphi + O(\varepsilon^2) =$$
$$= x[\underbrace{\operatorname{tg}\varphi + \varepsilon(1+\operatorname{tg}^2\varphi)}] + O(\varepsilon^2)$$

toto je Taylorův rozvoj fce $\operatorname{tg}(\varphi+\varepsilon)$

pokračujeme-li pomocí $\phi(x,\varepsilon) = e^{\varepsilon \hat{X}^{(\infty)}}\, y$ kde musíme použít $\hat{X}^{(\infty)}$, protože neustále přibývají derivace

protože

$$\hat{X}^{(\infty)} = \underbrace{(x + y y_1)}_{\hat{\eta}}\frac{\partial}{\partial y} + \underbrace{(1 + y_1^2 + y y_2)}_{D\hat{\eta}}\frac{\partial}{\partial y_1} + \underbrace{(3 y_1 y_2 + y y_3)}_{DD\hat{\eta}}\frac{\partial}{\partial y_2} + \dots$$

dostaneme

$y_2 = 0$ (jde o lineární fci)

$$\phi(x,\varepsilon) = \overset{x\operatorname{tg}\varphi}{y} + \varepsilon(x + y y_1) + \frac{\varepsilon^2}{2}\Big[\overbrace{(x + y y_1) y_1 + (1 + y_1^2 + \cancel{y y_2}) y}^{\hat{X}^{(\infty)}(x + y y_1)}\Big] + O(\varepsilon^3) =$$
$$= x\Big[\operatorname{tg}\varphi + \varepsilon(1 + \operatorname{tg}^2\varphi) + \frac{\varepsilon^2}{2}(2\operatorname{tg}\varphi + 2\operatorname{tg}^3\varphi) + O(\varepsilon^3)\Big] = x\operatorname{tg}(\varphi+\varepsilon)$$

Zobecněné symetrie – pokračování

- pro systém PDR s nezávislými prom. x^i a závislými u^μ

  bychom obdobně dostali
  $$\tilde u^\mu = \phi^\mu(x,\varepsilon) = \theta^\mu(x) + \varepsilon\Big[\eta^\mu(x,\theta(x)) - \sum_i \frac{\partial\theta^\mu}{\partial x^i}\xi^i(x,\theta(x))\Big] + O(\varepsilon^2) \quad \text{pro } \mu=1,\dots,m$$

  a tentýž obraz fce $\theta^\mu(x)$ bychom dostali při transformaci
  $$\tilde x^i = x^i$$
  $$\tilde u^\mu = u^\mu + \varepsilon\big[\eta^\mu(x,u) - u^\mu_i\,\xi^i(x,u)\big] + O(\varepsilon^2)$$

  a tedy inf. gen. $\hat X$ je v tomto případě
  $$\hat X = \Big[\eta^\mu(x,u) - \sum_i u^\mu_i\,\xi^i(x,u)\Big]\frac{\partial}{\partial u^\mu} = \hat\eta^\mu(x,u,\partial u)\frac{\partial}{\partial u^\mu}$$

- obecně připustíme závislost $\hat\eta$ i na vyšších derivacích

  → zobecněné symetrie, neboli lokální jednopar. LGT vyššího řádu
  $$\tilde x^i = x^i$$
  $$\tilde u^\mu = e^{\varepsilon \hat X^{\infty}} u^\mu = u^\mu + \sum_{j=1}^{\infty}\frac{\varepsilon^j}{j!}\big(\hat X^{(\infty)}\big)^{j-1}\hat\eta^\mu, \quad \mu=1,\dots,m$$

  kde $$\hat X^{(\infty)} = \hat\eta^\mu\frac{\partial}{\partial u^\mu} + \hat\eta^{(1)\mu}_i\frac{\partial}{\partial u^\mu_i} + \dots + \hat\eta^{(k)\mu}_{i_1\dots i_k}\frac{\partial}{\partial u^\mu_{i_1\dots i_k}} + \dots$$

  kde $$\hat\eta^{(1)\mu}_i = D_i\hat\eta^\mu \qquad \hat\eta^{(k)\mu}_{i_1\dots i_k} = D_{i_k}\hat\eta^{(k-1)\mu}_{i_1\dots i_{k-1}}$$

- platí, že ~~zobecněná~~ ~~sym~~ lokální 1-par. LGT vyššího řádu je ekvivalentní bodové ~~grupě~~ LGT, právě když všechny $\hat\eta^\mu$ mají tvar
  $$\hat\eta^\mu = \eta^\mu(x,u) - u^\mu_i\,\xi^i(x,u) \quad \text{pro nějaké } \eta^\mu \text{ a } \xi^i$$

- pokud $\hat\eta^\mu$ závisí obecně na vyšších derivacích, nelze danou LGT omezit jen na prostor derivací do určitého řádu, je nutno uvažovat rozšíření do všech řádů, tedy $\hat X^{(\infty)}$

  - výjimkou jsou bodové transformace a ~~[illegible]~~ tzv. kontaktní $\underbrace{\text{transformace}}_{\text{pro } m=1 \text{ (tj. máme jediné } u)}$, pro které $\hat\eta = W(x,u,\partial u)$ a $\hat X = \hat\eta\frac{\partial}{\partial u}$ je

    ekvivalentní $$X = \xi^j(x,u,\partial u)\frac{\partial}{\partial x^j} + \eta(x,u,\partial u)\frac{\partial}{\partial u} + \eta^{(1)}_j(x,u,\partial u)\frac{\partial}{\partial u_j}$$

    kde $$\xi^j(x,u,\partial u) = \frac{\partial W}{\partial u_j}, \quad \eta(x,u,\partial u) = u_j\frac{\partial W}{\partial u_j} - W, \quad \eta^{(1)}_j(x,u,\partial u) = -\frac{\partial W}{\partial x^j} - u_j\frac{\partial W}{\partial u}$$

    pro $j=1,\dots,n$

Zobecněné symetrie - základní vztahy

- uvažujme zobecněné vektorové pole (zobecněný infin. generátor)

$$X = \sum_{i=1}^{n} \xi^i(x,u,\partial u,\dots)\frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_{\alpha=1}^{m} \eta^\alpha(x,u,\partial u,\dots)\frac{\partial}{\partial u^\alpha}$$

kde závislost ξ^i a η^α na derivacích může být libovolná

a podobně jako u bod. transformací uvažujme rozšíření (prodloužení) do prostoru derivací

$$X^{(k)} = X + \sum_{\alpha=1}^{m}\sum_{1\leq \# J\leq k} \eta^\alpha_J(x,u,\partial u\dots)\frac{\partial}{\partial u^\alpha_J}$$

kde η^α_J jsou opět dány vztahy

$$\eta^\alpha_{J,j} = D_j \eta^\alpha_J - \sum_{i=1}^{n}(D_j\xi^i)\, u^\alpha_{J,i}$$

což lze přepsat jako

$$\eta^\alpha_J = D_J\underbrace{\left(\eta^\alpha - \sum_{i=1}^{n}\xi^i u^\alpha_i\right)}_{\hat{\eta}^\alpha \text{ .. charakteristika } X} + \sum_{i=1}^{n}\xi^i u^\alpha_{J,i}$$

- protože η^α_J pro vyšší J závisí též na vyšších a vyšších derivacích u^α má smysl (z hlediska možných konečných transformací generovaných X) ale už uvažovat tyto transf. pouze na prostoru všech derivací, čemuž odpovídá generátor $X^{(\infty)} = \sum_{i=1}^{n}\xi^i\frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_{\alpha=1}^{m}\sum_{\substack{J\\ 0\leq\# J}}\eta^\alpha_J\frac{\partial}{\partial u^\alpha_J}$
  - protože budeme vždy uvažovat působení na funkce závisející jen na derivacích konečného řádu k, bude $X^{(\infty)}f = X^{(k)}f$ a není problém s konvergencí.

- Infinitezimální kritérium invariance systému PDR

Řekneme, že zobecněný inf. gen X je infinitez. symetrií systému PDR $R^\sigma = 0$, $\sigma = 1,\dots N$ řádu k, právě tehdy, když

$$X^{(k)}R^\sigma = X^{(\infty)}R^\sigma = 0 \quad \text{pro každé hladké řešení } u = \theta(x).$$

neboli

$$\boxed{X^{(k)}R^\sigma\Big|_{\substack{R^\sigma=0\\ D_J R^\sigma = 0}} = 0}$$

, ovšem za předpokladu, že systém $R^\sigma = 0$ a všechna jeho ~~rozšíření~~ „prodloužení" $D_J R^\sigma = 0$ do prostoru derivací jsou maximální hodnosti a lokálně řešitelné.

Př. ~~~~ uvažujme opět rci vedení tepla $u_t = u_{xx}$

a zobecněný inf. gen. $X = u_x \frac{\partial}{\partial u}$

z jeho rozšíření $X^{(\infty)} = u_x \frac{\partial}{\partial u} + u_{xx} \frac{\partial}{\partial u_x} + u_{xt} \frac{\partial}{\partial u_t} + u_{xxx} \frac{\partial}{\partial u_{xx}} + \dots$

dostaneme $X^{(\infty)}(u_t - u_{xx}) = u_{xt} - u_{xxx} = 0$ pro řešení $u = \Theta(x)$

splňující $u_t = u_{xx}$

a tedy $D_x u_t = D_x u_{xx}$

$$\begin{array}{ccc} D_x u_t & = & D_x u_{xx} \\ \| & & \| \\ u_{xt} & = & u_{xxx} \end{array}$$

- <u>infinit. generátor v charakteristickém tvaru</u>

(v Olverovi evoluční vektorové pole)

- ~~zob~~ zobec. inf. generátor X je v charakt. tvaru, pokud $\xi^i = 0$ pro $\forall i$

tj. bude $$\hat{X} = \sum_{\alpha=1}^{m} \hat{\eta}^\alpha(x, u, \partial u \dots) \frac{\partial}{\partial u^\alpha}$$

a $\hat{\eta}^\alpha$ je tzv. charakteristika

- jeho prodloužení je dáno jednoduše

$$\boxed{\hat{X}^{(\infty)} = \sum_{\alpha=1}^{m} \sum_{\substack{J \\ 0 \le \# J}} (D_J \hat{\eta}^\alpha) \frac{\partial}{\partial u_J^\alpha}}$$

- s každým zobecněným inf. gen. je asociován inf. gen. v charakt. tvaru, přičemž $\hat{\eta}^\alpha = \eta^\alpha - \sum_{i=1}^{n} \xi^i u_i^\alpha$, $\alpha = 1, \dots, m$

a ~~~~ pokud X je ~~zabecněnou~~ zobecněnou inf. symetrií systému $R^\sigma = 0$,

pak též $\hat{X}$ je zobecněnou inf. symetrií a generují v podstatě tutéž symetrii, neboť ze vztahu mezi X a $\hat{X}$ (viz výše)

$$X^{(k)} = \hat{X}^{(k)} + \sum_j \xi^j D_j$$

dostaneme $$0 = X^{(k)} R^\sigma \Big|_{D_J R^\sigma = 0} = \hat{X}^{(k)} R^\sigma \Big|_{D_J R^\sigma = 0} + \underbrace{\sum_{j=1}^{n} \xi^j D_j R^\sigma}_{=0 \text{ na } D_J R^\sigma = 0}$$

Př. zobecněná ~~~~ inf. sym. $\hat{X} = u_x \frac{\partial}{\partial u}$ rce vedení tepla

je vlastně bod. sym. gener. $X = -\frac{\partial}{\partial x} \Rightarrow \hat{\eta} = u_x$

- <u>triviální symetrie</u>

  - pokud $\hat{\eta}^{\alpha}$ jsou nulová pro řešení $u=\Theta(x)$ systému $R^{\sigma}=0$
    pak jde automaticky o zobecn. inf. symetrii, neboť
    i všechna $D_J\hat{\eta}^{\alpha}$ budou nulová pro $u=\Theta(x)$

    $\Rightarrow$ dostáváme však tzv. triviální symetrii, která není „pravou symetrií", které nás zajímají

Pozn: u ODR 1. řádu jsme defin. triviální sym. jako ty, pro které
$$\eta(x,y)=\xi(x,y)f(x,y)\quad(\text{pokud máme rci } y_1=f(x,y))$$
jde o triviální sym. i v tomto obecnějším smyslu, neboť
$$\hat{\eta}(x,y,y_1)=\eta-\xi y_1=\xi\left(f(x,y)-y_1\right)$$
což je nulo pro řešení $y_1=f(x,y)$

- řekneme, že zobecněná inf. sym. daná X je triviální pokud odpovídající $\hat{X}$ je triviální sym.

  a dále <u>2 zobecn. inf. sym. jsou ekvivalentní</u>, pokud jejich rozdíl $X-X'$ je triviální symetrií

  $\Rightarrow$ zobecněné inf. symetrie se rozpadají na třídy ekvivalencí a obecné <u>symetrií</u> určitého systému PDR $R^{\sigma}=0$ nazveme právě takovouto třídu ekvivalence

---

Př. pro $u_t=u_{xx}$ jsou $\frac{\partial}{\partial t}$ (translace v čase), $-u_t\frac{\partial}{\partial u}$ (charakt. tvar)
a $-u_{xx}\frac{\partial}{\partial u}$ všechno ekvivalentní zobecn. inf. symetrie
a prakticky určují stejnou symetrii

- <u>hledání zobecněných symetrií</u>

  $\Rightarrow$ stačí hledat inf. gen. v charakt. tvaru $\hat{X}=\sum_{\alpha}\hat{\eta}^{\alpha}\frac{\partial}{\partial u^{\alpha}}$

  a navíc můžeme eliminovat závislost $\hat{\eta}^{\alpha}$ na určitých derivacích pomocí $R^{\sigma}=0$, neboť bychom dostali ekvivalentní zobecněné symetrie

  např. pro $u_t=u_{xx}$, lze nahradit všechny u_t, u_{xt}, u_{tt} atd. za odpovídající výrazy s u_{xx}

Př: $y_2 = 0$ · dříve 8 bod. symetrií

nyní bychom hledali $\hat{X} = \hat{\eta}(x, y, y_1)\frac{\partial}{\partial y}$

dostali bychom $D_{xx}\hat{\eta}\Big|_{\substack{y_2=0\\ y_3=0\\ \vdots}} = 0$

z čehož $$\frac{\partial^2\hat{\eta}}{\partial x^2} + 2y_1\frac{\partial^2\hat{\eta}}{\partial x\partial y} + y_1^2\frac{\partial^2\hat{\eta}}{\partial y^2} = 0$$

pokud $\hat{\eta} = \eta(x,y) - y_1\xi(x,y) \Rightarrow$ stejné podmínky jako dříve

obecně obtížné, např. lib. $\hat{\eta} = g(y_1)$ je řešení

ale i další možnosti

Př. $y_3 = 0$, nyní hledáme obecně $\hat{\eta} = \hat{\eta}(x, y, y_1, y_2)$

ovšem opět bychom nedostali přeurčený systém, obtížné řešení

zkusme proto $\hat{\eta} = \hat{\eta}(x, y, y_1)$

$\Rightarrow$ polynom v y_2, přičemž koeficienty musí být nulové

např. z členu $y_2^3\frac{\partial^3\hat{\eta}}{\partial y_1^3} \Rightarrow \hat{\eta}$ je kvadratické v y_1 atd.

nakonec bychom dostali

7 bodových + 3 ryze zobecněné symetrie

(translace v x) $\hat{X}_1 = -y_1\frac{\partial}{\partial y} \Leftrightarrow X_1 = \frac{\partial}{\partial x}$

(škálování v x) $\hat{X}_2 = -xy_1\frac{\partial}{\partial y} \Leftrightarrow X_2 = x\frac{\partial}{\partial x}$

(translace v y) $\hat{X}_3 = \frac{\partial}{\partial y} \Leftrightarrow X_3 = \frac{\partial}{\partial y}$

(Galileo v y) $\hat{X}_4 = x\frac{\partial}{\partial y} = X_4$

($\tilde{x} = x$, $\tilde{y} = y + \varepsilon x^2$) $\hat{X}_5 = x^2\frac{\partial}{\partial y} = X_5$

(škálování v y) $\hat{X}_6 = y\frac{\partial}{\partial y} = X_6$

(projektivní transf.) $\hat{X}_7 = (2xy - x^2y_1)\frac{\partial}{\partial y} \Leftrightarrow X_7 = x^2\frac{\partial}{\partial x} + 2xy\frac{\partial}{\partial y}$

$\hat{X}_8 = (2y - xy_1)^2\frac{\partial}{\partial y}$

$\hat{X}_9 = (xy_1^2 - 2yy_1)\frac{\partial}{\partial y}$

$\hat{X}_{10} = y_1^2\frac{\partial}{\partial y}$

Variační symetrie pro zobecněné infin. generátory

- v tomto případě budeme právě uvažovat spíše Noetherovské sym., i když např. Olver je nazývá variačními
- řekneme, že zobecněný inf. gen.

$$X = \sum_i \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_\alpha \eta^\alpha \frac{\partial}{\partial u^\alpha}$$

je variační (Noetherovskou) symetrií funkcionálu

$$\mathcal{L}[u] = \int_\Omega L(x, u, \ldots \partial^l u)\, d^n x$$

právě když existuje n-tice $B = (B_1, \ldots B_n)$, $B_i = B_i(x, u, \ldots \partial^r u)$

taková, že $\quad X^{(l)} L + L \operatorname{Div} \xi = \operatorname{Div} B \quad$ pro $\forall x, u$

- pokud použijeme $\quad X^{(l)} = \hat{X}^{(l)} + \sum_{j=1}^n \xi^j D_j$

dostaneme $\quad X^{(l)} L + L \operatorname{Div} \xi = \hat{X}^{(l)} L + \operatorname{Div}(L\xi)$

a tedy $X^{(l)}$ ~~je~~ Noether. sym., právě když $\hat{X}$ je Noeth. sym. (toto neplatí, pokud by v definici nebylo $\operatorname{Div} B$)

vskutku pokud $\quad X^{(l)} L + L \operatorname{Div} \xi = \operatorname{Div} B$

pak $\quad \hat{X}^{(l)} L = \operatorname{Div}(B - L\xi) = \operatorname{Div} \tilde{B} \quad$ a obráceně

$\Rightarrow$ stačí se opět zabývat pouze Noether. sym. v charakteristickém tvaru

- podobně jako u bod. sym. platí, že je-li X zobecněnou Noether. sym., pak je též sym. příslušných E-L rovnic, ovšem ne naopak (vzpomeňme škálování)

- jako u bod. sym. dostáváme <u>větu Noetherové</u>, a sice je-li $\hat{\eta}^\alpha$ charakt. zobecněné Noether. sym., pak je to i charakt. LZZ $\operatorname{Div} \Phi = 0$

a platí $\quad \Phi^i = \tilde{B}^i - A^i$, kde $A^i = \sum_\alpha \hat{\eta}^\alpha \frac{\partial L}{\partial u^\alpha_i} + \ldots$

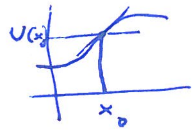
- platí i silnější verze (později)

Fréchetova derivace

- motivace – linearizující operátor pro nelineární rovnice

  – nechť $u(x)$ je řešení systému $R^\sigma[u]=0$, $\sigma=1,\dots,N$

  pak v okolí x_0 lze místo $u(x)$ hledat $v(x)$



  takové, že $u(x) = u(x_0) + \varepsilon v(x)$, kde ε bude

  $u_1(x) = u_1(x_0) + \varepsilon v_1(x)$ atd.

  malé $\Rightarrow$ Taylor

$$R^\sigma[u(x_0)+\varepsilon v(x)] = R^\sigma[u(x_0)] + \varepsilon\left(\sum_J \frac{\partial R^\sigma}{\partial u^\alpha_J} D_J v^\alpha\right) + O(\varepsilon^2) = 0$$

  $\Rightarrow$ tj. $v(x)$ splňuje lineární rovnici

$$\left(D_R^{[u]}\right)^\sigma_\alpha v^\alpha = \sum_J \frac{\partial R^\sigma}{\partial u^\alpha_J}\bigg|_{u(x_0)} D_J v^\alpha = 0$$

  $\uparrow$ toto je Fréchetova derivace R v „bodě" u

  je to operátor působící na v, ve skutečnosti sada $N \times m$ operátorů

- pozn: obecně jde o omezený lin. operátor $D_f(x): V \to W$ z Banach. prostoru V do B. pr. W, pokud existuje limita

$$\lim_{h\to 0} \frac{\| f(x+h) - f(x) - D_f(x)\, h \|_W}{\| h \|_V} = 0$$

  právě pro jistý lin. op. $D_f(x)$

- pomocí Fréchetovy derivace lze přepsat infinitezimální kritérium inv. pro zobecněné inf. sym. v charakt. tvaru

$$\hat{X}^{(\infty)} R^\sigma[u]\Big|_{D_J R^\sigma = 0} = 0$$

  , kde $\hat{X}^{(\infty)} = \sum_{\alpha, J} D_J \hat{\eta}^\alpha \frac{\partial}{\partial u^\alpha_J}$

  jako

$$\boxed{\left(D_R^{[u]}\right)^\sigma_\alpha \hat{\eta}^\alpha = 0}$$

  vyčísleno na $D_J R^\sigma = 0$, tedy pro řešení $R^\sigma = 0$

Př: Fréchetova derivace pro lin. op. je ten samý lin. op.

$R = u_t - u_{xx} = 0 \Rightarrow D_R v = D_t v - D_{xx} v = 0$

ovšem u nelin. rce jako třeba pro Burgersovu rci

$R = u_t - u_{xx} - u_x^2 = 0$. dostaneme (lin. přiblížení v určitém bodě

$$D_R v = D_t v - D_{xx} v - 2 u_x D_x v = 0$$

$\uparrow$ vzato v daném bodě

Př: Rungeův-Lenzův vektor jako zach. veličina plynoucí ze zobecněné symetrie

- uvažujme Keplerův problém (pro jednoduchost položíme $m=1$)

$$L = T - V = \frac{1}{2}(\dot x^2+\dot y^2+\dot z^2) + \frac{M}{r}$$

$\Rightarrow$ pohybové (E-L) rovnice

$$E_x(L) = \frac{\partial L}{\partial x} - D_t \frac{\partial L}{\partial \dot x} = -\frac{Mx}{r^3} - \ddot x = 0 \quad \Rightarrow \quad \ddot x = -\frac{Mx}{r^3}$$

a obdobně pro y a z

- již dříve ZZE z inv. vůči translaci v čase
- ZZ momentu hybnosti plyne z invariance vůči rotacím

např. $X_{R(z)} = y\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y}$ (již v charakt. tvaru, $\xi=0$)

rozšíření $X^{(1)}_{R(z)} = X_{R(z)} + \dot y \frac{\partial}{\partial \dot x} - \dot x\frac{\partial}{\partial \dot y}$

a tedy $X^{(1)}_{R(z)} L = \dot y \dot x - \dot x \dot y - \frac{Myx}{r^3} + \frac{Mxy}{r^3} = 0$ jde tedy (samozřejmě) o var. symetrii

$\Rightarrow$ LZZ $\quad D_t \Phi_{R(z)} = 0$

kde $\Phi_{R(z)} = -\sum_\alpha \eta^\alpha \frac{\partial L}{\partial u^\alpha_i} = -\eta^x \frac{\partial L}{\partial \dot x} - \eta^y\frac{\partial L}{\partial \dot y} = -y\dot x + x\dot y = (\vec r\times\vec p)_z = L_z$

a pod. pro rotaci kolem x a y

- pokud bychom pro Keplerovu úlohu hledali zobecněné symetrie, našli bychom 3 zobecněné inf. gen.

$$\hat X_x = \underbrace{(y\dot y + z\dot z)}_{\hat\eta^x}\frac{\partial}{\partial x} + \underbrace{(y\dot x - 2x\dot y)}_{\hat\eta^y}\frac{\partial}{\partial y} + \underbrace{(z\dot x - 2x\dot z)}_{\hat\eta^z}\frac{\partial}{\partial z}$$

a cyklicky X_y a X_z

(nejde o bod. sym., neboť by $\hat\eta^x$ muselo mít strukturu $\hat\eta^x = \eta(t,x,y,z) - \xi(t,x,y,z)\dot x$ a pod. $\hat\eta^y$ a $\hat\eta^z$, což není)

rozšíření jsou

$$\hat X^{(1)}_x = \hat X_x + \overbrace{(y\ddot y + z\ddot z + \dot y^2 + \dot z^2)}^{D_t\hat\eta^x}\frac{\partial}{\partial \dot x} + \overbrace{(\ddot x y - 2x\ddot y - \dot x\dot y)}^{D_t \hat\eta^y}\frac{\partial}{\partial\dot y} + \overbrace{(\ddot x z - 2x\ddot z - \dot x\dot z)}^{D_t\hat\eta^z}\frac{\partial}{\partial \dot z}$$

$$\hat X^{(2)}_x = \hat X^{(1)}_x + (3\dot y\ddot y + y\dddot y + 3\dot z\ddot z + z\dddot z)\frac{\partial}{\partial \ddot x} + (\dddot x y - 3\dot x\ddot y - 2x\dddot y)\frac{\partial}{\partial\ddot y}$$
$$+ (\dddot x z - 3\dot x\ddot z - 2x\dddot z)\frac{\partial}{\partial\ddot z}$$

• ověření, že jde o zobecněnou inf. sym.:

$$\hat X_x^{(2)}\left(\ddot x + \frac{\mu x}{r^3}\right)\Bigg|_{\substack{\ddot x = -\frac{\mu x}{r^3},\ \ddot y = \dots,\ \ddot z = \dots \\ \dddot x = -\frac{\mu \dot x}{r^3} + \frac{3\mu x}{r^5}(x\dot x + y\dot y + z\dot z) \\ \dddot y = \dots,\ \dddot z = \dots}} =$$

$$= \overbrace{3\dot y\ddot y + y\dddot y + 3\dot z\ddot z + z\dddot z}^{\hat\eta^x_{tt}} + \overbrace{(y\dot y + z\dot z)}^{\hat\eta^x}\ \overbrace{\frac{\mu(r^2-3x^2)}{r^5}}^{\frac{\partial\left(\frac{\mu x}{r^3}\right)}{\partial x}}$$

$$- \underbrace{(\dot x y - 2x\dot y)}_{\hat\eta^y}\ \underbrace{\frac{3\mu xy}{r^5}}_{-\frac{\partial\left(\frac{\mu x}{r^3}\right)}{\partial y}} - \underbrace{(\dot x z - 2x\dot z)}_{\hat\eta^z}\ \underbrace{\frac{3\mu xz}{r^5}}_{-\frac{\partial\left(\frac{\mu x}{r^3}\right)}{\partial z}}$$

po dosazení za $\ddot y, \dddot y$ atd.

$$= \frac{3\mu}{r^5}\left[(y\dot y + z\dot z)(y^2+z^2+x^2) - (y\dot y + z\dot z)r^2\right] = 0 \quad ✓$$

• ověření, že jde i o Noetherovskou symetrii $\left(L = \frac{1}{2}(\dot x^2+\dot y^2+\dot z^2) + \frac{\mu}{r}\right)$

$$\hat X_x^{(1)} L = \overbrace{(y\ddot y + z\ddot z + \cancel{\dot y^2} + \cancel{\dot z^2})\dot x + (\ddot x y - 2x\ddot y - \cancel{\dot x\dot y})\dot y + (\ddot x z - 2x\ddot z - \cancel{\dot x\dot z})\dot z}^{(*)} -$$

$$\underbrace{-(y\dot y + z\dot z)\frac{\mu x}{r^3} - (\dot x y - 2x\dot y)\frac{\mu y}{r^3} + (\dot x z - 2x\dot z)\frac{\mu z}{r^3}}_{(**)}$$

spočteme $D_t(\dot x y\dot y) = \ddot x y\dot y + \cancel{\dot x\dot y^2} + \dot x y\ddot y$ apod. pro $\dot x z\dot z$ a $x\dot z^2$

$D_t(x\dot y^2) = \cancel{\dot x\dot y^2} + 2x\dot y\ddot y$

$$(*) = D_t\left[\dot x(y\dot y + z\dot z) - x(\dot y^2 + \dot z^2)\right]$$

a dále $D_t\left(-\frac{\mu x}{r}\right) = -\frac{\mu\dot x}{r} + \frac{\mu x}{r^3}(x\dot x + y\dot y + z\dot z)$

a tedy $(**) = +(y\dot y + z\dot z)\frac{\mu x}{r^3} - \frac{\mu\dot x}{r} + \frac{\mu\dot x x^2}{r^3} = D_t\left(-\frac{\mu x}{r}\right)$

a celkem $\hat X_x^{(1)} L = D_t\Big[\underbrace{\dot x(y\dot y + z\dot z) - x(\dot y^2+\dot z^2) - \frac{\mu x}{r}}_{\tilde B_x}\Big]$

a zachovávající se veličina nakonec je

$$\Phi_x = \tilde B_x - A_x = \tilde B_x - \hat\eta^x\frac{\partial L}{\partial\dot x} - \hat\eta^y\frac{\partial L}{\partial\dot y} - \hat\eta^z\frac{\partial L}{\partial\dot z} =$$

$$= \tilde B_x - (y\dot y + z\dot z)\dot x - (\dot x y - 2x\dot y)\dot y - (\dot x z - 2x\dot z)\dot z$$

$$= x(\dot y^2 + \dot z^2) - \dot x(y\dot y + z\dot z) - \frac{\mu x}{r}$$ a cyklicky pro y a z

vektorově se zachovává Rungeův-Lenzův vektor $\boxed{\vec M = \dot{\vec r}\times(\vec r\times\dot{\vec r}) - \mu\frac{\vec r}{r}}$ opravdu vyjde $D_t\vec M = 0$

Zákony zachování pomocí multiplikátorů

- není potřeba variační formulace ⇒ použití na libovolný systém PDR
- hledáme LZZ v charakteristickém tvaru

$$\Lambda_\sigma R^\sigma = \mathrm{Div}\,\Phi$$

což musí platit pro lib. $u(x)$. Pokud bude $u(x)$ řešením $R^\sigma = 0$, pak dostáváme LZZ $\mathrm{Div}\,\Phi = 0$.

Rovnice pro multiplikátory

- víme, že pokud se 2 lagrangiány liší o úplnou divergenci

$$\tilde{L} = L + \mathrm{Div}\,F[u]$$

pak dávají stejné pohyb. rovnice (Eulerovy-Lagrangeovy rovnice), neboť obecně $E_\alpha(\mathrm{Div}\,F[u]) = 0$ pro lib. $F[u]$

- platí i obrácené (viz Olver: věta 4.7), tj. jediný skalár $G[u]$, pro který platí $E_\alpha(G[u]) = 0$ je $G[u] = \mathrm{Div}\,F[u]$, kde $F[u]$ je lib.

⟹ rovnice pro multiplikátory

$$\boxed{E_\alpha\left(\Lambda_\sigma[u]\,R^\sigma[u]\right) = 0} \quad \text{pro } \alpha = 1, \dots, m \text{ a lib. } u(x)$$

- podobně jako inf. kritérium pro bod. symetrie dostáváme systém PDR, avšak nejen 1. řádu, ale obecně vyššího řádu ⇒ těžší řešení ⇒ obvykle se zvolí řád Λ a předpokládá se polynomiální závislost $\Lambda_\sigma = c_0^\sigma + \sum_{i=1}^{n} c_i^\sigma x^i + \sum_{\alpha=1}^{m} d_\alpha^\sigma u^\alpha + \dots$

⇒ podmínky na c^σ, d^σ atd.

- známe-li (najdeme-li) $\Lambda^\sigma[u]$, pak lze toky Φ^i najít buď přímo převedením na tvar $\mathrm{Div}\,\Phi$, nebo lze použít i integrální vzorce, viz Bluman, Anco, Cheviakov: kap. 1.3.7

Pozn.: 1) obecně ne všechny LZZ lze takto dostat, jen pro určité systému PDR zapsané ve vhodném tvaru, např. pro $R^\sigma[u] = u^{\alpha_\sigma}_{J_\sigma} - G^\sigma(x, u, \ldots \partial^k u) = 0$

kde G^σ nezávisí na $u^{\alpha_\sigma}_{J_\sigma}$ a tyto jsou různé a nezávislé nezávislé

2) obecně též několik Λ_σ může dát ekvivalentní LZZ ovšem opět existují systémy, kdy je jednoznačná korespondence mezi

$$\text{třída ekvivalence DN } \Phi \longleftrightarrow \Lambda_\sigma[u] \left(\text{nezávisejících na } \frac{\partial u^\sigma}{\partial x^j}\right)$$

~~[illegible]~~ pokud jsou v tzv. Cauchově-Kovalevské tvaru vzhledem k nezávislé proměnné x^j

$$\frac{\partial^{s_\sigma} u^\sigma}{\partial (x^j)^{s_\sigma}} - G^\sigma(x, u, \ldots \partial^k u), \quad 1 \le s_\sigma \le k, \quad \sigma = 1, \ldots m$$

(m rovnic! pro m závislých proměnných $N = m$)

kde s_σ je nejvyšší derivace u^σ podle x^j v R^σ a G^σ neobsahují derivace u^σ vzhledem k x^j řádu s_σ nebo vyššího ovšem pro všechny u^σ

Pozn. někdy lze PDR přepsat do C-K tvaru pomocí vhodné transf. souř.

např. $u_{tx} = 0 \xrightarrow[X = t+x]{T = t-x} u_{TT} = u_{XX}$

ovšem ne vždy, např. máme-li jiný počet rovnic než m (Maxwell. rovnice)

$$E_\alpha\left(\Lambda_\sigma[u]\, K^\sigma[u]\right) = 0$$

Př. $u_{xx} - u_t = 0$ $\qquad E(L) \doteq \frac{\partial L}{\partial u} - D_x \frac{\partial L}{\partial u_x} - D_t \frac{\partial L}{\partial u_t} + D_x D_x \frac{\partial L}{\partial u_{xx}} + D_x D_t \frac{\partial L}{\partial u_{xt}} + D_t D_t \frac{\partial L}{\partial u_{tt}}$

nechť $\Lambda = c_1 + c_2 x + c_3 t + c_4 u$

$$E\left[(c_1 + c_2 x + c_3 t + c_4 u)(u_{xx} - u_t)\right] = c_4(u_{xx} - u_t) + D_t\left[(c_1 + c_2 x + c_3 t + c_4 u\right] + D_x D_x\left[c_1 + c_2 x + c_3 t + c_4 u\right]$$

$$= c_4(u_{xx} - \cancel{u_t}) + c_3 + \cancel{c_4 u_t} + c_4 u_{xx} = c_3 + 2c_4 u_{xx} = 0 \Rightarrow \begin{array}{l} c_3 = 0 \\ c_4 = 0 \end{array}$$

$\Rightarrow c_1$ a c_2 libovolné

Tedy $\Lambda_1 = 1 \Rightarrow D_x(u_x) + D_t(-u) = 0$

$\Lambda_2 = x \Rightarrow x u_{xx} - x u_t = D_x(u - x u_x) + D_t(xu) = 0$

ověřme, že $\Lambda = u_t$ a $\Lambda = u_x$ nejsou multiplikátory vedoucí na LZZ

přestože $X = \frac{\partial}{\partial t} \Rightarrow \hat{X} = -u_t \frac{\partial}{\partial u}$ jsou bodové symetrie rce vedení tepla

a $X = \frac{\partial}{\partial x} \Rightarrow \hat{X} = -u_x \frac{\partial}{\partial u}$

$$E\left[u_t(u_{xx} - u_t)\right] = -\cancel{D_t(u_{xx})} + 2D_t(u_t) + \cancel{D_x D_x u_t} = 2u_{tt} \neq 0$$

$$E\left[u_x(u_{xx} - u_t)\right] = +D_t(u_x) - D_x(\cancel{u_{xx}} - u_t) + \cancel{D_{xx} u_x} = 2u_{xt} \neq 0$$

Ověření pro vlnovou rovnici $u_{xx} - u_{tt} = 0$ dostaneme

$$E\left[u_t(u_{xx} - u_{tt})\right] = -D_t(\cancel{u_{xx}} - \cancel{u_{tt}}) + \cancel{D_{xx} u_t} - D_t D_t u_t = 0$$

$$E\left[u_x(u_{xx} - u_{tt})\right] = -D_x(\cancel{u_{xx} - u_{tt}}) + D_{xx} u_x - \cancel{D_t D_t u_x} = 0$$

a tedy $\Lambda = u_t$ a $\Lambda = u_x$ vedou na LZZ („energie a hybnosti“)

obecně předp. $\Lambda = \Lambda(x,t,u)$ a $u_{xx} - u_t = 0$

$$\Rightarrow \frac{\partial \Lambda}{\partial u}(u_{xx} - u_t) + D_t\left[\Lambda(x,t,u)\right] + D_x D_x\left[\Lambda(x,t,u)\right] = 0$$

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial u}(u_{xx} - \cancel{u_t}) + \frac{\partial \Lambda}{\partial t} + \cancel{\frac{\partial \Lambda}{\partial u} u_t} + \underbrace{D_x\left[\frac{\partial \Lambda}{\partial x} + \frac{\partial \Lambda}{\partial u} u_x\right]}_{\frac{\partial^2 \Lambda}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 \Lambda}{\partial u \partial x} u_x + \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial u^2} u_x^2 + \frac{\partial \Lambda}{\partial u} u_{xx}} = 0$$

$$\left(\frac{\partial \Lambda}{\partial t} + \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial x^2}\right) + \left(2\frac{\partial^2 \Lambda}{\partial u \partial x} u_x\right) + \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial u^2} u_x^2 + 2\frac{\partial \Lambda}{\partial u} u_{xx} = 0 \quad \text{prolib. } u_x, u_{xx}$$

$\Rightarrow \Lambda \neq \Lambda(u)$ a tedy $\Lambda(x,t)$ je řešení $\Lambda_t + \Lambda_{xx} = 0$

$\Rightarrow$ nekonečně mnoho multiplikátorů $\Lambda(x,t)$

např. $\Lambda_1 = 1$, $\Lambda_2 = x$ apod.