

Fyzika na kolotoči

aneb

Coriolisova síla graficky (U3V)

3Cor-8h.TEX 2011-11-01

jan.obdrzalek@mff.cuni.cz

Abstrakt: Grafickou cestou se odvozuje odstředivá a Coriolisova síla pro rovnoměrný otáčivý pohyb (např. pro výklad odklonu pasátů na otáčející se Zeměkouli).

Výklad nepotřebuje ani diferenciální počet (kalkul), ani vektorový součin. Předpokládá se jen znalost goniometrických funkcí: přiblížení pro malé úhly a součtové vzorce. Ale těm, kdo kalkul znají, přijdou možná vhod „nepovinné“ poznámky petitem značené ♣.

1 Jak se správně chovat v nesprávných situacích

1.1 Slušné chování dítěte

Výchova dítěte začíná v útlém dětství v rodině. Dítě ze dozví, jak se „standardně“ správně chovat: nemá moc křičet, má slušně a věcně odpovídat na otázky, nemá lhát apod. Tato pravidla jsou celkem jednoduchá a srozumitelná, a proto i celkem snadno zapamatovatelná.

1.2 Správné chování dítěte v nestandardních situacích

Problém v životě je v tom, že ne každá situace je „standardní“. Křičet se nemá, ale na hodného starého dědečka se křičet musí, protože nedoslýchá. Lhát se sice taky nemá, ale tetičce se neříká (podle pravdy), že je protivná. A vůbec, než se řekne pravda cizímu člověku, musí se uvážit, zda má vůbec *on* právo mou pravdu znát a *já* právo ji sdělit. Někdy je správné docela i zalhat. Dítě záhy zjišťuje, že nestandardních situací je hodně.

Naštěstí ani v nestandardních situacích není dítě ztraceno a bezradné. V podstatě stačí uvážit, co v takové situaci přebývá nebo čeho se nedostává a podle toho pak něco ubrat nebo přidat ke standardnímu chování.

↔ Dítě nakonec zjistí, že i ono samo je stejně „nestandardní“, nesprávné a obyčejné jako všichni ostatní lidé kolem. Pak si poradí i s tím, že opravdu „standardní“ situace vlastně nenastává nikdy. To už pak ovšem nebude dítě, ale dospělý člověk.

1.3 Slušné chování hmotného bodu

1.3.1 Co je to hmotný bod (HB)

Při výuce klasické mechaniky je to jako při výchově dítěte. Naším dítětem bude hmotné těleso, ale zatím těleso co nejjednodušší – takové, aby jeho vlastní rozměry byly v dané úloze zanedbatelné. Budeme ho tedy pokládat za *hmotný bod* (HB).

Hmotný bod je těleso, jehož vlastní rozměry jsou v dané úloze zanedbatelné.

Vyšetřujeme-li pád kamínku na Zemi, můžeme v prvním přiblížení brát kamínek jako hmotný bod, Zemi ovšem ne. Ale sledujeme-li pohyb Zeměkoule kolem Slunce, můžeme v prvním přiblížení brát Zeměkouli jako hmotný bod. Při popisu Mléčné dráhy můžeme uvažovat celou Sluneční soustavu za jediný hmotný bod.

HB je velmi užitečné zjednodušení, usnadňující nám řešení úloh tím, že se nemusíme zabývat okolnostmi pro danou úlohu nepodstatnými. U hmotného bodu např. nemá smysl uvažovat, zda rotuje kolem své osy.

1. Někdy se v tomtéž významu jako HB užívá i slovo *částice*, zejména tehdy, kdyby „hmotný bod“ snad zněl moc vědecky.

2. Řekneme-li *klasická částice*, míníme tím, že ji popisujeme *klasickou* mechanikou, tedy že není popisována podle kvantové teorie. V klasickém popisu má svou jasně definovanou polohu a rychlost, ty mohou být jednoznačně určeny (změřeny) s libovolnou přesností apod. Kvantovým popisem se tady zabývat nebudeme.

3. O *relativistické* částici mluvíme, když zkoumáme chování (klasické) částice při rychlostech blízkých k rychlosti světla. Relativistická částice se svou podstatou od klasické neliší. Liší se jen způsob, jak nakládáme s jejími charakteristikami (polohou $\vec{r}$, hmotností m , rychlostí $\vec{v}$ atd.), když je určujeme ze dvou různých pohledů – ze dvou různých vztažných soustav. Ale o vztažné soustavě podrobněji až za chvíli.

1.3.2 Jak se slušný hmotný bod chová

První Newtonův zákon (1NZ), zákon setrvačnosti, popisuje pohyb volného¹ HB² za „standardních“ okolností:

Volný HB se pohybuje rovnoměrně přímočaře (anebo je v klidu).

Za „standardních“ okolností platí také druhý Newtonův zákon (2NZ), zákon síly, totiž

Působí-li na HB s hmotností m výsledná síla $\vec{F}$, udělí mu zrychlení $\vec{a}$ podle vzorce $m\vec{a} = \vec{F}$.

A co jsou ty standardní okolnosti? Popis polohy a pohybu HB závisí na tom, vůči čemu je popisujeme, neboli závisí na volbě vztažné soustavy. (Tyto veličiny jsou, jak říkáme, *relativní*. Naproti tomu hmotnost je *absolutní* veličina, je stále stejná nezávisle na volbě vztažné soustavy. I síla coby vektor je absolutní. Relativní jsou ovšem hodnoty jejích složek do jednotlivých os – ty závisí na volbě směrů os.) Je proto na místě otázka, jakou vztažnou soustavu máme zde na mysli. Vezmeme si z historie představu Newtonova *absolutního prostoru* a *absolutního času* jakožto „té nejspřávnější“ vztažné soustavy.

Nelamte si hlavu s tím, kde v hlubinách vesmíru má absolutní prostor svůj počátek a jak má orientovány osy; stejně se vzápětí ukáže, že je to jedno, protože přesně stejné vlastnosti má i každá jiná vztažná soustava, která se vůči té „absolutní“ pohybuje rovnoměrně přímočaře anebo je v klidu, a v níž jde čas rovnoměrně vůči času absolutnímu (tzv. inerciální soustava). Podstatné pro nás je jen to, že nějaká *taková soustava vůbec existuje*. Proto také v moderním pojetí pokládáme zákon setrvačnosti za *existenční* teorém, zajišťující existenci (aspoň jedné) inerciální vztažné soustavy.

Jinými slovy: když měříme polohu v newtonovském absolutním prostoru a čase (tuto „nejspřávnější“ vztažnou soustavu označíme S_0), zjistíme, že souřadnice volného HB závisejí na čase lineárně³. Volný HB má tedy rychlost neproměnnou a zrychlení nulové. Pokud je v klidu, je dobře a řekneme, že i nadále bude stát „ze setrvačnosti“; pokud se pohybuje (rovnoměrně přímočaře), je taky dobře a i zde užijeme totéž slovo: řekneme, že se HB pohybuje *setrvačností*⁴ (neboli pohybuje se *ze setrvačnosti*). Setrvačnost – latinsky inertia – je vlastností každého HB s hmotností $m > 0$.

A teď z druhé strany. Určení polohy, a tím i popis a klasifikace pohybu, závisí na volbě vztažné soustavy. Natočíme-li vztažnou soustavu kolem počátku, zůstane polohový vektor týž, ale bude popsán jinými souřadnicemi (resp. složkami). Zvolíme-li počátek vztažné soustavy jinde, změní se i polohový vektor. Vztažnou soustavu nazýváme *inerciální*, jestliže při měření v ní má každý volný HB nulové zrychlení (tedy se pohybuje rovnoměrně přímočaře nebo je v klidu). Vztažná soustava S_0 absolutního prostoru a času je tedy inerciální již svým zavedením, z 1NZ. Víme však již od Galilea, že inerciální je nejenom S_0 , ale i každá jiná vztažná soustava S , která se vůči S_0 pohybuje rovnoměrně přímočaře (anebo je v klidu). Souřadnice volného HB měřené v kterékoli inerciální soustavě totiž také závisejí na čase lineárně.

Otázka: Když inertia znamená setrvačnost, proč označujeme přívlastkem „inerciální“ vztažnou soustavu, a nikoli HB?

Odpověď: Setrvačnost je sice vlastností HB, ale jeho polohu, a tedy ověření toho, jak se pohybuje, zjišťujeme vůči konkrétní vztažné soustavě. Kdyby se nám tato soustava pohybovala pod rukama, naměřili bychom v ní jiné hodnoty polohy a jejich závislost na čase by nemusela být lineární. Takovou soustavu bychom nazvali *neinerciální*. Zcela konkrétně: každá vztažná soustava, která se vůči nějaké inerciální soustavě *otáčí*, je určité neinerciální.

¹HB je volný, když na něj nepůsobí žádné vlivy (síly, vazby), resp. když se všechny na něj působící vlivy navzájem vyruší.

²V původních Newtonových formulacích se vyskytovalo „těleso“ (corpus), nikoli HB. V některých formulacích se pokoušel Newton zahrnout i jeho rotaci, ale ze současného hlediska je to zbytečná komplikace. Proto zůstáváme u hmotného bodu.

³Do lineární závislosti se samozřejmě vejde i speciální případ, že se jeho souřadnice s časem nemění vůbec – HB je v klidu.

⁴Tedy pozor: *setrvačností* ano, ale nikoli setrvačnou *silou*! Na klid ani na rovnoměrný přímočarý pohyb HB žádnou sílu nepotřebuje.

1.4 Správné chování hmotného bodu v nestandardních situacích

Problém v mechanice je v tom, že ne každá situace je „standardní“. Někdy jsme nuceni pohyb HB popisovat v soustavě, která není inerciální. Popisujeme-li např. v meteorologii pohyby vzdušných mas, popisujeme je pochopitelně vůči Zeměkouli⁵. Ta se ale otáčí kolem své osy (např. vůči hvězdné obloze) a nemůže proto sloužit jako inerciální vztažná soustava! To by při popisu vůči Zeměkouli neplatil ani 1NZ, a tím spíš ani 2NZ. (Opravdu: při popisu vůči Zeměkouli se Slunce pohybuje po kruhové dráze kolem Zeměkoule, a přitom by mělo stát nebo se pohybovat rovnoměrně přímočaře!) Co teď?

Můžeme odmítnout popis z neinerciální soustavy a požadovat jen popis ze soustav inerciálních. To by ale bylo značně nepraktické. Předmět, který stojí na rovníku, se díky otáčení Zeměkoule pohybuje slušnou rychlostí. Obvod Zeměkoule je 40 000 km, Zeměkoule se otočí jednou za 24 hodin, čili předmět letí rychlostí

$$v = \frac{40\,000}{24} \text{ km/h} \approx 1667 \text{ km/h} \approx 463 \text{ m/s.} \quad (1)$$

Při popisu v inerciální soustavě by tedy dům stojící „v klidu“ na rovníku letěl nadzvukovou rychlostí. (A to neuvažujeme pohyb Zeměkoule kolem Slunce, kdy je postupná rychlost 30 km/s!)

Rozumnější je přijmout nutnost popisu z neinerciální soustavy s tím, že lehce upravíme 1NZ a 2NZ. Ukážeme, že stačí ke skutečným silám⁶ na HB působícím doplnit tzv. *setrvačné síly* $\vec{F}_{\text{setr}}$ (síla odstředivá, Coriolisova, Eulerova...) a, zhruba řečeno, počítat tak, jako by platily takto upravené zákony:

*Měřeno z neinerciální soustavy se volný HB pohybuje tak, jako by na něj působily setrvačné síly $\vec{F}_{\text{setr}}$.
Není-li HB volný a působí-li na něj skutečná síla $\vec{F}$, je nutno k ní ještě přičíst setrvačnou sílu $\vec{F}_{\text{setr}}$.*

Toto je tedy náš plán. V dalším odvodíme jednak, že tento postup je korektní a vede opravdu ke správným výsledkům, a dále jaký tvar musí tyto setrvačné síly mít speciálně v otáčející se soustavě, aby nám zachránily platnost pohybových zákonů.

1.5 Ideologická poznámka k vyjadřování

Všimněte si, že důsledně říkáme, že polohu a pohyb HB **popisujeme** v inerciální nebo neinerciální soustavě, a vyhýbáme se výroky typu *HB je v inerciální (neinerciální) soustavě*. Řečeno lehčím slohem: HB *nepřísluší* žádné vztažné soustavě, anebo přísluší stejným právem všem soustavám – jak si vyberete. Hmotný bod **je** (existuje) sám o sobě a je mu naprosto jedno, zda ho popisujeme a z jaké vztažné soustavy.

My např. popisujeme pohyb Slunce (a celé nebeské klenby) vůči Zeměkouli: říkáme, že (ve vztažné soustavě spojené se Zeměkoulí) se Slunce otáčí kolem Zeměkoule, a máme pravdu stejně jako zelení mužičci na zcela jiné planetě, tvrdící, že (v jejich vztažné soustavě) se naše Slunce pohybuje kolem nich. Kolem čeho se tedy opravdu naše Slunce točí? – to je jen otázka popisu, a popisů je tolik, kolik je pozorovatelů, třebaže naše Slunce je jen jediné.

V heliocentrické soustavě (Koperník) obíhá Zeměkoule kolem Slunce, v geocentrické (Ptolemaios) obíhá Slunce kolem Zeměkoule. Běžná hovorová fráze „heliocentrická soustava je správná, geocentrická je špatná“ není pravdivá: vůbec žádná vztažná soustava není (a z principu ani nemůže být) špatná. Pravda je, že geocentrická soustava *není inerciální*, a proto popis pohybu (= kinematika) ostatních planet v ní vychází velmi komplikovaný, a tím ovšem i vysvětlení tohoto pohybu (= dynamika). Heliocentrická soustava s počátkem v těžišti sluneční soustavy a s osami neotáčejícími se vůči „stálícím“ má k inerciální soustavě mnohem blíže a kinematika i dynamika v ní je podstatně jednodušší. To je vše, co se dá pravdivě říct: složitost a tím i „neobratnost“ neznamená nesprávnost. Můžeme s klidem, jak je nám libo, užívat kterékoli z obou soustav, anebo třeba soustav ještě divočejších (třeba soustavu spjatou s kolotočem, rozjíždějícím se na otáčející se Zeměkouli).

⁵Systematicky užíváme označení Zeměkoule (a nikoli Země nebo zem), chceme-li zdůraznit, že je kulatá a otáčí se kolem své osy.

⁶Jak víme, tak tyto síly popisují skutečnou interakci mezi námi zkoumaným HB a ostatními tělesy v okolí.

2 Základní pojmy z kinematiky

2.1 Poloha bodu. Polohový vektor

Polohu tělesa určujeme vždycky vůči něčemu jinému, např. vůči jiným, „vztažným“ tělesům. Ve škole jsme se naučili používat *vztažnou soustavu* $\mathcal{S}$. Připomeňme, že je určena dvěma atributy:

počátek (souřadnic), což je bod zpravidla značený O nebo P (z lat. origo, -inis, $f.$ = počátek). Z počátku vycházejí

souřadnicové osy zpravidla značené x, y, z .

V *kartézské* vztažné soustavě jsou souřadnicové osy navzájem kolmé, orientované podle pravidla pravé ruky a mají stejná měřítka. Poloha každého bodu B v prostoru je v ní určena trojicí čísel (x_B, y_B, z_B) , zvanými jeho *kartézské souřadnice*. Vzdálenost d bodů B, C je dána podle Pythagorovy věty:

$$d = \sqrt{(x_B - x_C)^2 + (y_B - y_C)^2 + (z_B - z_C)^2} \quad (2)$$

Bod B může být též určen svým *polohovým vektorem* $\vec{r}$, tj. vektorem vycházejícím z počátku souřadnic a končícím v bodě B . Vektory značíme tučnými písmeny (při psaní písmenem se šipkou). Připomeňme, že vektor je veličina popsána třemi souřadnicemi (analytický popis) anebo velikostí a směrem v prostoru (geometrický popis), pro kterou jsou definovány známé operace (sčítání = skládání vektorů, násobení číslem, skalární součin atd.). Jestliže se bod pohybuje, závisí jeho poloha na čase t , takže polohový vektor je funkcí času: $\vec{r} = \vec{r}(t)$.

Souvislost mezi bodem a jeho polohovým vektorem je vzájemně jednoznačná a do té míry zřejmá, že popis bodem B nebo jeho polohovým vektorem r budeme bez rozpaků střídát podle toho, co bude právě názornější.

Relativní veličiny závisejí na tom, ve které vztažné soustavě je popisujeme. Je to např. poloha HB nebo jeho rychlost.

Absolutní veličiny na volbě vztažné soustavy nezávisejí. Je to např. hmotnost HB nebo výše uvedená vzdálenost d dvou bodů.

2.2 Jak se pohybuje (slušná) částice

2.3 Rychlost

Polohový vektor $\vec{r}_0 \equiv \vec{r}(t_0)$ určuje, kde je HB v čase t_0 . Rychlost $\vec{v}$ nám k tomu doplní, kde bude za chvíli: za kratičkou dobu τ , tedy v čase $t = t_0 + \tau$, bude zhruba v místě

$$\vec{r} = \vec{r}(t_0 + \tau) \approx \vec{r}_0 + \vec{v}\tau. \quad (3)$$

Pokud se rychlost během doby τ nemění, pak tento vzorec platí přesně. Pokud se rychlost s časem mění, pak buď za $\vec{v}$ vezmeme střední rychlost HB^7 v době τ , nebo zvolíme τ co nejmenší – tak malé, abychom mohli tolerovat chybu danou předpokladem, že se rychlost $\vec{v}$ za tuto dobu prakticky nezměnila.

V našich příkladech budeme brát $\tau = 0,1$ s.

♣ Známe-li již kalkul, provedeme limitu $\Delta x \rightarrow 0$; tím dostaneme přesné

$$\vec{R} = \vec{R}(t_0 + dt) = \vec{R}_0 + \vec{V} dt \quad (4)$$

a po sečtení přírůstků polohy ve všech po sobě jdoucích dobách od času t_0 do t_1 dostaneme

$$\vec{R}(t_1) = \vec{R}_0 + \int_{t_0}^{t_1} \vec{V}(t') dt' \quad (5)$$

pro libovolný čas $t_1 \geq t_0$.

2.4 Zrychlení

Tak jako rychlost $\vec{v}$ určuje, jak se mění poloha $\vec{r}$, tak zase zrychlení $\vec{a}$ určuje, jak se mění rychlost $\vec{v}$. Úplně stejně jako výše odvodíme pro rychlost vztah

$$\vec{v} = \vec{v}(t_0 + \tau) \approx \vec{v}_0 + \vec{a}\tau. \quad (6)$$

se stejnou platností a omezeními.

⁷To je samozřejmě logický kruh, protože právě takhle se střední rychlost na intervalu počítá.

2.4.1 ♣ Určení polohy ze známého zrychlení nebo síly

Celý tento odstavec můžete klidně přeskočit. Není potřeba k tomu, abyste pochopili, co je (a co není) odstředivá síla. Má ovšem význam pro určení dráhy, je-li známa působící síla, a to ať je jakéhokoli původu.

Pokud známe polohu a rychlost jen na počátku, ale známe celý časový průběh zrychlení, můžeme z toho také určit budoucí polohu $\vec{R}$. Prostě podobně jako v rov. 5 vyjádříme nejprve rychlost

$$\vec{V}(t') = \vec{V}_0 + \int_{t_0}^{t'} \vec{A}(t'') dt'' \quad (7)$$

a z ní stejným způsobem polohu

$$\vec{R}(t) = \vec{R}_0 + \int_{t_0}^t \left(\vec{V}_0 + \int_{t_0}^{t'} \vec{A}(t'') dt'' \right) dt' = \vec{R}_0 + \vec{V}_0(t - t_0) + \int_{t_0}^t \left(\int_{t_0}^{t'} \vec{A}(t'') dt'' \right) dt'. \quad (8)$$

Dvojnásobný integrál na konci nás nepoleká: upravíme ho snadno integrací per partes: $\int uV = [UV] - \int Uv$.

$$\int_{t_0}^{t_1} \left(1 \int_{t_0}^{t'} \vec{A}(t'') dt'' \right) dt' = \left[t' \int_{t_0}^{t'} \vec{A}(t'') dt'' \right]_{t'=t_0}^{t'=t_1} - \int_{t_0}^{t_1} t' \vec{A}(t') dt' \quad (9)$$

a dosazením do rov. 8 konečně dostaneme

$$\vec{R}(t) = \vec{R}_0 + \vec{V}_0(t - t_0) + \int_{t_0}^t (t - t') \vec{A}(t') dt'. \quad (10)$$

Když známe počáteční stav $(\vec{R}_0; \vec{V}_0)$ částice s hmotností M a časový průběh výsledné síly $\vec{F}(t)$ působící na HB po celou dobu pohybu, užijeme zákona síly $M\vec{A} = \vec{F}$ a určíme pohyb částice podle rov. 10.

2.5 Zákon síly (2.NZ)

Podle 2. Newtonova zákona – zákona síly – je zrychlení HB způsobeno tím, že na něj působí vnější síly. Označíme-li výslednici vnějších sil $\vec{F}$, pak platí

$$m\vec{a} = \vec{F}, \quad (11)$$

kde m je hmotnost HB a $\vec{a}$ je zrychlení, se kterým se HB pohybuje.

3 Grafická metoda

3.1 Diskretizace

Dnes, v digitálním věku, jsou běžné i digitální fotoaparáty (možná ho taky máte v mobilu). Mnohé z nich umožňují dokonce udělat nejenom jediný snímek, ale několik snímků „těsně za sebou“, což se nám při pozorování – s troškou tolerance – jeví jako pohyb: jako bychom sledovali živou událost.

Ukážeme si, jak ze dvou po sobě jdoucích snímků poznáme rychlost fotografovaného HB a ze tří snímků i jeho zrychlení, a tím i sílu, která na něj v tom (prostředním) okamžiku působila.

Hned zkraje se dohodneme na tomto přiblížení: připustíme, že „obyčejné dění“ kolem nás se zachytí velmi uspokojivě filmem, který mívá 24 nebo 25 snímků za sekundu. Zvolíme si tedy jakousi „elementární“ dobu $\tau = 100$ ms (tedy 10 snímků za sekundu). Nebude to nic moc přesné, ale pro ilustraci to jistě postačí – asi jako trhané filmy z doby pradědečků. (A taky si neděláme iluze, že bychom naši úlohu narýsovali až tak moc přesně.) Doba 100 ms prostě pro nás bude dostatečně krátká, aby byla i „okamžikem“ v tom smyslu, že se během ní nezmění žádná veličina – poloha, rychlost – víc, než bychom byli ochotni tolerovat. Průměrnou rychlost během této doby proto můžeme⁸ brát jako okamžitou rychlost, a podobně i ostatní veličiny.

3.2 Z čeho vycházíme: parametrizovaná trajektorie

Jak jsme výše naznačili, při grafické metodě vyjdeme z *parametrizované trajektorie*, tzn. z křivky zaznamenávající pohyb HB, na níž budou vyznačeny i časy, ve kterých HB příslušné místo „navštívil“.

⁸Komu to nestačí a kdo to chce přesně, ten musí udělat limitní přechod $\tau \rightarrow 0$. Tím pak s pomocí kalkulu dostane s derivacemi vše zcela přesně.

3.3 Rychlost

Rychlost popisuje časovou změnu polohy. K jejímu určení nám stačí dva po sobě jdoucí snímky: HB, který má na prvním snímku polohu $\vec{r}_1$ a na druhém $\vec{r}_2$, má rychlost

$$\vec{v} = \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{\tau} . \quad (12)$$

Pokud je na obou snímcích bod na tomtéž místě (tj. $\vec{r}_1 = \vec{r}_2$), vyjde nám rychlost nulová: $\vec{v} = \vec{0}$ a bod je ve sledovaném okamžiku v klidu (alespoň s tou přesností, na jaké jsme se dohodli).

3.4 Zrychlení

Zrychlení popisuje časovou změnu rychlosti. Jestliže potřebujeme dva snímky pro zjištění rychlosti, pak pro určení zrychlení – pro zjištění, jak se rychlost změnila za danou dobu – jsou nutné snímky tři.

Chceme-li určit zrychlení v okamžiku t_0 , určíme v časech $(t_0 - \tau)$, (t_0) a $(t_0 + \tau)$ odpovídající polohy B_- , B_0 a B_+ , resp. polohové vektory $\vec{r}_-$, $\vec{r}_0$ a $\vec{r}_+$. Z nich určíme rychlosti „před“ a „po“:

$$\begin{aligned} \vec{v}_- &= (\vec{r}_0 - \vec{r}_-)/\tau , \\ \vec{v}_+ &= (\vec{r}_+ - \vec{r}_0)/\tau . \end{aligned} \quad (13)$$

Zrychlení je rovno jejich rozdílu vydělenému dobou změny:

$$\vec{a}_0 = (\vec{v}_+ - \vec{v}_-)/\tau = (\vec{r}_+ - 2\vec{r}_0 + \vec{r}_-)/\tau^2 . \quad (14)$$

Tento výraz můžeme napsat i geometricky názorněji. Bod B_s ležící přesně uprostřed mezi body B_- a B_+ je totiž popsán polovičním součtem polohových vektorů krajních bodů, tedy

$$\vec{r}_s = \frac{1}{2}(\vec{r}_- + \vec{r}_+) \quad (15)$$

a dosazením do rov. 14 dostaneme

$$\vec{a} = \frac{2}{\tau^2} (\vec{r}_s - \vec{r}_0) . \quad (16)$$

Při pevné volbě τ tedy platí:

*Zrychlení je úměrné odchylce **střední** polohy B_s od **skutečné** polohy B_0 .*

3.5 Síla

Určení síly $\vec{F}$ působící na HB je už snadné: když známe jeho zrychlení $\vec{a}$ a hmotnost m , pak $\vec{F} = m\vec{a}$.

Heslovitě řečeno, sílu působící na HB určíme graficky takto:

*Síla je úměrná rozdílu mezi **střední** polohou B_s a **skutečnou** polohou B_0 .*

Konstanta úměrnosti je rovna $\frac{2m}{\tau^2}$ a během pokusu se nemění.

4 Cvičení

Ve škole jste řešili úlohy na speciální druhy pohybů, konkrétně

- rovnoměrný přímočarý pohyb,
- rovnoměrně zrychlený pohyb (třeba volný pád nebo šikmý vrh),
- rovnoměrný kruhový pohyb.

Zkusme si na těchto známých pohybech, že pro ně graficky dokážeme určit působící sílu. Berme $\tau = 0,1$ s.

4.1 Pohyb rovnoměrný přímočarý

Trajektorii pohybu je přímka (přesněji: část přímky, úsečka). Naše jednotlivé snímky (s dohodnutým intervalem $\tau = 0,1$ s) na ní budou od sebe stejně daleko vzdáleny.

Cyklista jede rychlostí 3 m/s; Zaznamenejte pohyb jeho svítilny půl sekundy po startu!

Tři body B_- , B_0 a B_+ budou ležet na přímce stejně od sebe vzdáleny, takže bod B_s padne přesně do bodu B_0 . Zrychlení je tedy nulové, síla je rovněž nulová a máme tím potvrzeno, že jde o pohyb setrvačností, bez vnější působící síly.

V našem případě ani vektory nepotřebujeme; sledujeme souřadnici x během pohybu. Číselné hodnoty budou podle tabulky:

	B_-	B_0	B_+	B_s
t/s	0,40	0,50	0,60	0,50
x/m	1,20	1,50	1,80	1,50

4.2 Pohyb nerovnoměrný přímočarý

Grafickou závislostí tohoto pohybu na čase je opět přímka, ale naše jednotlivé snímky na ní budou od sebe různě daleko vzdáleny.

Zobrazme si např. volný pád; pro jednoduchost uvažujme $g = 10 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$. Je-li tedy např. výška budovy 10 m (na obrázku 10 cm), pak uražená dráha je $s = \frac{1}{2}gt^2$ a vzdálenost h od Země je $h = (10 \text{ m} - s)$.

Zkusme to opět pro $t=3$ s.

	B_-	B_0	B_+	B_s
t/s	0,40	0,50	0,60	0,50
s/m	0,80	1,25	1,80	1,30
h/m	9,20	8,75	8,20	8,70

Opět jde o pohyb po přímce, takže nemusíme použít vektorů; stačí nám výška h nad zemí. Uvažované tři polohy h_- , h_0 a h_+ budou od sebe různě vzdáleny. Nyní už bod B_s nesplývá s bodem B_0 ; jejich vzdálenost (0,25 m) i orientace (záporná, tedy dolů) udává zrychlení. Orientované zrychlení vyjde⁹ rovno

$$g = \frac{2}{0,1^2 \text{ s}^{-2}}(h_s - h_0) = \frac{2 \cdot (-0,05 \text{ m})}{0,01 \text{ s}^{-2}} = -10 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}.$$

Protože na milimetrovém papíře máme k dispozici necelých 30 cm a souřadnice h se mění mezi 8,2 m a 9,2 m, zvolíme počátek grafu pro $h = 8,0$ m a dílky na grafu (po 1 cm) odpovídající kroku 0,05 m.

4.3 Pohyb nerovnoměrný křivočarý

Grafickou závislostí tohoto pohybu na čase je křivka a naše jednotlivé snímky na ní opět budou od sebe různě daleko vzdáleny.

Zobrazme si např. vodorovný vrh s počáteční rychlostí $v = 3 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$; opět berme $g = 10 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$. Jak víme ze školy, bude grafem pohybu parabola. Je-li opět výška budovy 10 m, pak souřadnice x , y jsou rovny v různých časech hodnotám podle tabulky:

	B_-	B_0	B_+	B_s
t/s	0,40	0,50	0,60	0,50
x/m	1,20	1,50	1,80	1,50
y/m	9,20	8,75	8,20	8,70

Na milimetrovém papíře opět zvolíme rozumně počátky i jednotkové délky na obou osách (např. na ose x počátek pro $x = 1$ s a dílky 0,1 s $\simeq 1$ cm, na ose y počátek pro $y = 8$ a dílky 0,1 m $\simeq 1$ cm). Graf bude tedy 12 cm vysoký (a 10 cm široký).

⁹Vyšlo by přesně i při jiném kroku, protože jde o pohyb rovnoměrně zrychlený; jeho zrychlení je totéž v libovolném okamžiku pohybu. Jakmile by zrychlení nebylo konstantní, vyšel by grafický výsledek sice nikoli přesně, ale – samozřejmě – tím přesněji, čím menší časový krok τ bychom zvolili.

Obrázek 1: Geometrické odvození dostředivého zrychlení

Uvažované tři body B_- , B_0 a B_+ neleží na přímce a jsou od sebe různě vzdáleny. Bod B_s však leží vždy pod bodem B_0 , jejich orientace (vždy k Zemi dolů) i vzdálenost (stále stejná) nám udávají zrychlení. Opět¹⁰ vyjde zrychlení stále stejné, totiž $g = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.

4.4 Rovnoměrný pohyb po kružnici

I tuto úlohu znáte důvěrně ze školy. Na to, aby se HB pohyboval rovnoměrně po kružnici, musí na něj působit stálá síla směrem do středu kružnice, po které se HB pohybuje.

Říká se jí proto „dostředivá“, z čehož nejsem moc nadšen z několika důvodů. Jednak při *nerovnoměrném* pohybu po kružnici tato síla *nemíří* do středu naší kružnice. Dále tento název svádí k tomu, že je ve vztahu „akce – reakce“ s odstředivou silou, což je zcela špatně. (Např. obě síly působí na totéž těleso, zatímco akce a reakce působí vždy na *různá* tělesa.) Vedle toho se občas najdou nemyslíci žáci schopní odrecitovat např.: „Známe sílu tíhovou, sílu pružnosti, sílu tření, sílu dostředivou a sílu normálovou.“ Má to logiku asi tak stejnou jako legendární „Známe klobouky dámské, slaměné a žluté“.

Rozmyslete si následující konstrukci; budete to v dalším velice potřebovat. Trajektorii pohybu je kružnice. Naše tři body zvolíme¹¹ s úhlem B_0OB_+ asi 15° . Označme úhlovou rychlost ω . Za dobu τ urazí tedy HB po kružnici úhel o velikosti $\varphi = \omega\tau$ a oblouk o délce $R\varphi = R\omega\tau$. Vzdálenost $d = B_0B_s$ určíme snadno jako rozdíl $OB_0 - OB_s$:

$$d = R - R \cos \varphi = R(1 - \cos \varphi) = R \left(1 - \left(1 - \frac{1}{2}\varphi^2 + \frac{1}{24}\varphi^4 - \dots \right) \right) \approx \frac{1}{2}R\varphi^2. \quad (17)$$

Potřebná dostředivá síla tedy vyjde co do velikosti rovna

$$F = ma = m \frac{1}{2} R (\omega^2 \tau^2) \cdot \frac{2}{\tau^2} = m R \omega^2 = \frac{mv^2}{R}, \quad (18)$$

tedy přesně tak, jak nás učili ve škole.

Tím máme vše připraveno k vlastnímu výkladu – k výkladu setrvačných (neboli též fiktivních, zdánlivých, kinematických ...) sil. A na závěr hlubokou moudrost:

Vše, co víme o pohybu (poloha, rychlost, zrychlení), víme jen z jeho záznamu v konkrétní vztažné soustavě, tedy z oněch dvou – třech bodů na papíře.

¹⁰aby taky ne, když jsme tu konstrukci propočítali a když i zde je zrychlení po celou dobu pohybu konstantní!

¹¹Úhel ne moc velký, protože by byla velká chyba metody (užíváme přiblížení na úrovni $\varphi \approx \sin \varphi$). Ale také ne moc malý, protože by se nám protínaly přímky skoro rovnoběžné, a tím bychom měli velkou chybu praktické konstrukce.

5 Neinerciální vztažné soustavy – analytická metoda

(Tato kapitola je tu jen pro srovnání se standardním postupem. Vůbec nevadí, když ji někdo ze čtenářů neporozumí. My to totiž takhle dělat nebudeme.)

V teoretické mechanice se při popisu pohybu v neinerciálních souřadnicích („relativní pohyb“) užívá metoda analytická. Proveďte se přepočty mezi inerciální a neinerciální soustavou a ukážete se, že časová změna $\left. \frac{D\vec{U}}{Dt} \right|_{\mathcal{N}}$ obecného vektoru $\vec{U}$ (např. vektoru rychlosti, zrychlení či síly) naměřená v neinerciální soustavě

je dána jednak jeho časovou změnou $\left. \frac{d\vec{U}}{dt} \right|_{\mathcal{I}}$ naměřenou v inerciální soustavě, jednak úhlovou rychlostí $\vec{\omega}$ neinerciální soustavy vůči inerciální:

$$\left. \frac{d\vec{U}}{dt} \right|_{\mathcal{I}} = \left. \frac{D\vec{U}}{Dt} \right|_{\mathcal{N}} - \vec{\omega} \times \vec{U}.$$

Dvojnásobná aplikace tohoto vzorce na polohový vektor umožní určit zrychlení a vede na výsledný vztah, v našem případě (při rovnoměrném otáčení bez posuvu)

$$\vec{a}^i = \vec{a} - 2\vec{\omega} \times \vec{v}^i - \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}^i),$$

pro HB s relativní polohou $\vec{r}^i$ a s relativní rychlostí $\vec{v}^i$; člen na levé straně je zrychlení naměřené v neinerciální soustavě, první sčítanec na pravé straně je zrychlení naměřené v inerciální soustavě (dané skutečnými silami), druhý je zrychlení Coriolisovo, třetí je zrychlení odstředivé (úprava dvojnásobného součinu vede na známou velikost $r\omega^2$ se směrem kolmým k ose rotace, tj. ke směru $\vec{\omega}$). Tato zrychlení vynásobíme hmotností, čímž vyjde Coriolisova síla $F_{\text{Cor}} = -2m\vec{\omega} \times \vec{v}^i$ a odstředivá síla $F_{\text{odst}} = -m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}^i) = m\vec{R}\omega^2$, kde vektor $\vec{R}$ směřuje kolmo od osy otáčení.

To je samozřejmě pravda a je to i nejstručnější. Jde-li nám však jen o popis na rovnoměrně se otáčející Zeměkouli, jde to – s troškou trpělivosti – i bez kalkulu a bez dvojnásobného vektorového součinu. K výkladu nám postačí grafická metoda, kterou nyní předvedeme.

6 Neinerciální vztažné soustavy – grafická metoda

6.1 Zlobí vás soused?

Papír, na který jsme značili dráhu pohybujícího se HB, představoval vztažnou soustavu, v níž jsme pohyb popisovali. Věřím, že jste si to opravdu sami vyzkoušeli¹². Doufám taky, že máte slušného souseda, který vám během zanášení poloh HB na papír za něj netáhá, netočí vám s papírem dokola ... ačkoliv ...

... ačkoliv co by se vlastně stalo? To bychom pak měli záznam poloh bodů nikoli ve slušné inerciální vztažné soustavě $\mathcal{S}$, ale v soustavě $\mathcal{N}$, která bude nejspíš neinerciální, protože se bude vůči $\mathcal{S}$ pohybovat nejspíš nerovnoměrně, tedy se zrychlením. A to je ale přesně to, co nás zajímá. Normálně totiž pracujete ve třídě na stolku, který je v klidu vůči podlaze, která je v klidu vůči Zeměkouli ... která se ale přece otáčí kolem své osy!

Prostě – naučíme se (stejně jako to dítě na začátku našeho výkladu) umět si poradit i v nesprávné situaci.

6.2 Neinerciální soustava: setrvačné síly

Od tohoto místa budeme pro rozlišení veličiny naměřené v inerciální soustavě $\mathcal{S}$, psát velkým písmenem $\vec{R}$, $\vec{V}$, $\vec{A}$, $\vec{F}$; analogické veličiny naměřené v neinerciální soustavě $\mathcal{N}$ budeme (za trest) psát malými písmeny $\vec{r}$, $\vec{v}$, $\vec{a}$, $\vec{f}$.

Pokud by tedy soused papírem táhl nerovnoměrně nebo jím otáčel, měly by naše HB jiné polohy takovým způsobem, že bychom následnou konstrukcí zjistili jiné zrychlení: namísto zrychlení $\vec{A}$ (vůči stolu – inerciální soustavě $\mathcal{S}$, proto velké písmeno) zaznamenáme hodnotu $\vec{a}$ (vůči papíru – neinerciální soustavě $\mathcal{N}$, proto malé písmeno), která se liší o zrychlení papíru $\vec{A}_{\mathcal{N}}$ (vůči $\mathcal{S}$, proto velké písmeno, index $\mathcal{N}$ udává, čeho to je

¹²Pokud ne, tak *nečtěte* dál dříve, než si konstrukci vyzkoušíte!!!

zrychlení):

$$\begin{array}{lcl} \text{zrychlení :} & \vec{A} & = \vec{a} + \vec{A}_{\mathcal{N}} \\ \text{zrychlení : B vůči } \mathcal{S} & = & \text{B vůči } \mathcal{N} \text{ vůči } \mathcal{S} \end{array}$$

Promyslete důkladně tuto rovnici; její pochopení je naprosto klíčové pro správné pojetí setrvačných sil!

Tuto rovnici přepíšeme tak, abychom měli veličiny měřené v $\mathcal{S}$ na levé straně, veličiny měřené v $\mathcal{N}$ na straně pravé:

$$\vec{A} - \vec{A}_{\mathcal{N}} = \vec{a}. \quad (19)$$

Vynásobme tuto rovnici hmotností m a interpretujme ji:

$$\begin{array}{lcl} m\vec{A} & + & (-m\vec{A}_{\mathcal{N}}) = m\vec{a}. \\ \vec{F} & + & \vec{f}_{\text{setr}} = \vec{f}. \end{array}$$

Pozorovatel v neinerciální soustavě $\mathcal{N}$ spočítá výraz $m\vec{a}$ a bude ho chtít interpretovat podle 2.NZ jakožto celkovou sílu působící na HB a udělující mu proto naměřené zrychlení $\vec{a}$. Zjistí, že tato celková síla sestává jednak ze skutečné síly $\vec{F} = m\vec{A}$, jednak ze členu $(-m\vec{A}_{\mathcal{N}})$, který proto nazve setrvačnou silou $\vec{f}_{\text{setr}}$. Doplněním této „síly“ zachrání formální platnost 2.NZ i v neinerciální soustavě $\mathcal{N}$.

Měříme-li souřadnice HB v neinerciální vztažné soustavě, pak se HB jeví tak, jako by na něj navíc působily ještě tzv. setrvačné síly (odstředivá, Coriolisova atp.) o hodnotě $\vec{f}_{\text{setr}} = -m\vec{A}_{\mathcal{N}}$.

Pokud by například soused papírem urychleně táhl stále stejným směrem, byla by situace podobná situaci v rozjíždějící se tramvaji: z hlediska tramvaje (neinerciální soustavy) jsme v klidu, ale tlačí nás setrvačná síla na opěradlo, zatímco z hlediska vnějšího pozorovatele se pohybujeme zrychleně a je to opěradlo, které nás – původně jsoucí v klidu – tlačí a nutí se pohybovat zrychleně.

6.3 Velmi důležitá ideologie

Stručně shrnuto: aby i nadále platil Newtonův zákon síly rov. 11, musíme při popisu v neinerciální vztažné soustavě ke skutečným silám doplnit *setrvačné* síly. Ty budou „působit“ na *každé* těleso, které popisujeme.

Proč jsme ale dali ono „působení“ do uvozovek? Pročpak znevažujeme setrvačnou sílu?

Skutečné síly popisují opravdu *působení*, a to vždy mezi dvěma hmotnými body¹³, tedy na zkoumaný HB od nějakého jiného HB. Ke každé skutečné síle $\vec{F}_{AB}$ (působení bodu B na bod A) existuje také podle 3NZ reakce $\vec{F}_{BA}$, kterou působí bod A na bod B, a platí $\vec{F}_{AB} = -\vec{F}_{BA}$. Ale setrvačná síla *nepopisuje* působení mezi dvěma HB; ona „působí“ na zkoumaný HB jaksi „odnikud“. Fakticky totiž na HB nepůsobí vůbec nic – to jenom my jsme si zavedli novou „sílu“ pro napravení toho, že pohyb HB popisujeme v neinerciální soustavě. Proto se těmto dodatečně zavedeným silám říká také *zdánlivé, fiktivní, kinematické* apod. Jejich použití vždy doplňujeme upřesněním, ve které soustavě popisujeme (nerozumí-li se to z kontextu samo sebou). K setrvačným silám neexistuje žádná reakce.

Rozmyslete si do důsledků, že „setrvačná síla“ není nikdy síla ve smyslu interakce, ale jen způsob popisu zrychlení z jiné (neinerciální) soustavy. Pokud si narazím nos, když tramvaj prudce zabrzdí, pak z hlediska (neinerciální) tramvaje mnou tlačila setrvačná síla proti stěně, a ta svou pevností (neprohnula se, neprotrhla se) mi způsobila úraz. Z hlediska člověka vně vozu však stěna nebyla klidná, ale pohybovala se mi vstříc, až mne udeřila. Setrvačnou sílu potřebuji „do počtu“ – pro soulad s relativním zrychlením, aby mi vyšel 2.NZ při výpočtu vůči tramvaji. Ale úraz mi způsobí vždy nějaká *skutečná* síla!

Dále, těleso je těleso a „nenáleží“ žádné vztažné soustavě. Konstatujeme-li tedy v rozjíždějící se tramvaji, že na nás působí setrvačná síla a tlačí nás do sedadla, pak stejně oprávněně musíme konstatovat, že na domy, koleje, stromy atd. působí tatáž setrvačná síla. Protože však tyto objekty nemají za sebou tramvajové sedadlo, které by bylo v klidu (vůči tramvaji) a o které by se opřely, pohybují se všechny tyto objekty se zrychlením daným touto setrvačnou silou, tj. dozadu (opět vůči tramvaji).

¹³Těleso si prostě představíme složené z mnoha maličkých HB (třebas i molekul), které drží pohromadě silami (z hlediska tělesa vnitřními).

Toto vše si důkladně rozmyslete. Začátečník mívá totiž často zábrany: je ochoten počítat s odstředivou silou působící na broučka sedícího na podlaze kolotoče, ale váhá o působení setrvačných sil při popisu pohybu dravé mouchy sledující tohoto broučka a letící stále těsně nad ním, a vůbec si nepřipouští (byť stále při popisu vůči kolotoči) potřebu použít odstředivé síly pro popis vysoko nad kolotočem kroužícího kosa zaujatého broučkem i mouchou, nebo dokonce pro popis stromu stojícího opodál, z něhož vše sleduje se zájmem kosice. Chceme-li ale zkoumat fyziku na kolotoči (rozumí se: popisovat fyzikální děje z neinerciální vztažné soustavy spojené s otáčejícím se kolotočem), pak nutně zjistíme, že se např. domy na náměstí točí dokola kolem osy kolotoče. Zdůvodníme to tím, že na ně (v soustavě kolotoče) působí setrvačná síla odstředivá a Coriolisova, a to stejným právem jako na broučka, mouchu, kosa, kosici, strom, domy kolem i Slunce nad nimi všemi. Setrvačné síly jsou prostě univerzální daní odvedenou pohybovým rovnicím na to, aby byly platné i při popisu polohy (rychlosti a zrychlení) vůči neinerciální soustavě, jakým je v tomto případě kolotoč.

7 Setrvačné síly podrobně

Nebudeme se zabývat nejobecnějším pohybem (neinerciální) vztažné soustavy. Probereme jen dva základní pohyby, totiž nerovnoměrný přímočarý pohyb a rovnoměrný kruhový pohyb. Jak jejich společnou kombinaci, tak i nerovnoměrné otáčení přenecháme na další, specializované studium.

7.1 Nerovnoměrný pohyb přímočarý

Při přímočarém nerovnoměrném pohybu má (neinerciální) vztažná soustava vůči inerciální soustavě $\mathcal{S}$ zrychlení $\vec{A}_{\mathcal{N}}$. To se může případně měnit co do velikosti, ale nikoli co do směru.

Označíme-li tedy $\vec{A}$ zrychlení, které naměříme v inerciální soustavě $\mathcal{S}$ a $\vec{a}$ zrychlení naměřené v neinerciální soustavě, platí

$$\vec{A} = \vec{a} + \vec{A}_{\mathcal{N}}. \quad (20)$$

Přejdeme-li k vyjádření síly vynásobením hmotností m , můžeme psát

$$\begin{aligned} m\vec{A} - m\vec{A}_{\mathcal{N}} &= m\vec{a} \\ \vec{F} + \vec{f}_{\text{setr}} &= \vec{f}, \end{aligned} \quad (21)$$

kde jsme zavedli unášivou posuvnou setrvačnou sílu $\vec{f}_{\text{setr}} = -m\vec{A}_{\mathcal{N}}$. (To je tedy ta síla, která nás tlačí do sedadla, a to v opačném směru, než má zrychlení tramvaje vůči Zemi). Tuto sílu stačí doplnit ke skutečným silám, a Newtonův zákon síly bude platit nadále i v neinerciálních vztažných soustavách. (V inerciálních je tato síla identicky rovna nule.)

Přesně vzato, tuto posuvnou setrvačnou sílu jsem vám nesliboval vysvětlit. Slíbil jsem jen odstředivou a Coriolisovu, které jsou potřeba pro popis pohybu na rotující Zeměkouli. Ale posuvná síla je natolik jednoduchá, názorná a všeobecně známá, že jsem její uvedení zde prostě nemohl oželeť.

7.2 Rovnoměrný pohyb otáčivý: mechanika na severním pólu

Uvažujme (neinerciální) vztažnou soustavu otáčející se vůči inerciální soustavě $\mathcal{S}$ stálou úhlovou rychlostí Ω kolem pevné osy (zvolme ji jako svislou osu z). Zapisujme nyní polohu různých HB a uvažujme, jaké setrvačné síly budeme muset doplnit. Tyto síly budou obecně záviset

- na úhlové rychlosti Ω naší neinerciální soustavy (Ω je tedy měřeno v *inerciální* soustavě),
- na pohybu sledovaného bodu – tedy na jeho poloze $\vec{r}$ a rychlosti $\vec{v}$, měřených v soustavě *neinerciální*.

Omezíme se na pohyb v rovině kolmé k ose otáčení. Můžeme si představit, že jsme právě na severním pólu a nemáme nic lepšího na práci, než na pól položit svůj milimetrový papír a zachycovat na něj polohy různých HB. Z inerciální soustavy $\mathcal{S}$ nás bude pozorovat náš anděl strážný; jako svatá bytost ví, jak inerciální soustavu najít a jak se v ní udržet. Ten nám také spolehlivě sdělí všechny *skutečné* síly působící na HB. Jemu se jeví, že my se vůči němu s celou Zeměkoulí otáčíme (jednu otáčku za den, $\Omega = \frac{2\pi}{60 \cdot 60 \cdot 24}$ rad/s), naopak nám se jeví, že on se otáčí vůči nám stejnou rychlostí opačným směrem. Pro jednoduchost budeme dále otáčející se neinerciální soustavu nazývat „Zeměkoule“.

7.2.1 HB v klidu vůči Zeměkouli

Popis vůči $\mathcal{S}$ (andělovi)

HB se pohybuje rovnoměrně po kružnici, takže na něj musí působit vhodná dostředivá síla. Značíme-li směr od osy otáčení kladně, pak tato síla – a je to skutečná síla – musí být rovna

$$F = -mr\Omega^2. \quad (22)$$

Popis vůči Zeměkouli

Poloha HB se nemění, tedy všechny tři body B_- , B_0 , B_+ , splynou v jediný. Z hlediska Zeměkoule je tento bod v kolmé vzdálenosti $r = R$ od zemské osy v klidu, a proto z hlediska Zeměkoule je výsledná na něj působící síla nulová.

Od anděla (z inerciální soustavy) však víme, že na HB působí nějaká skutečná dostředivá síla realizovaná např. vazbou – provázkem, držícím HB ve stále stejné vzdálenosti od osy otáčení. (Náš anděl strážný tuto sílu vidí jasně, protože pro něj se HB pohybuje rovnoměrně po kružnici.) My tuto sílu od provázku známe: míří ke středu opisované kružnice a značíme-li směr od zemské osy kladně, pak je

$$F = -mr\Omega^2. \quad (23)$$

To je tedy jediná skutečná síla (dostředivá) působící na HB.

Zpět k Zeměkouli: aby celková síla byla přesto nulová, musíme z hlediska otáčející se Zeměkoule doplnit setrvačnou sílu, a to *odstředivou*, orientovanou opačně k dostředivé a mající stejnou velikost. Protože vzdálenost R od osy je stejná v obou vztažných soustavách, je také $r = R$, a platí:

Odstředivá síla (síla setrvačná)

velikost:	$f_{\text{odst}} = mr\Omega^2$	(24)
směr:	<i>radiální od osy otáčení.</i>	

Odstředivá síla má tedy směr vždy radiální (od osy otáčení) a působí na každý HB nezávisle na jeho rychlosti vůči Zeměkouli. (HB, se kterým jsme to právě odvodili, má vůči Zeměkouli rychlost $\vec{v} = \vec{0}$.) Nulová bude jediné na ose otáčení, protože na ní je $r = 0$. Musíme ji proto doplňovat ve *všech* případech, se kterými se dále setkáme. Zatím tedy už známe jednu setrvačnou sílu:

$$\vec{f}_{\text{setr}} = \vec{f}_{\text{odst}} \quad (\text{zatím}). \quad (25)$$

Pak pro HB v klidu vůči Zeměkouli platí, jak si také přejeme,

$$\vec{f} = \vec{F} + \vec{f}_{\text{setr}} = \vec{0}. \quad (26)$$

7.2.2 HB v klidu v inerciální soustavě

Popis vůči $\mathcal{S}$ (andělovi)

Výsledná síla působící na bod, který je v klidu (ve vzdálenosti R od zemské osy), je rovna nule.

Popis vůči Zeměkouli

HB vůči Zeměkouli opisuje kružnici o poloměru $r = R$ (v opačném směru, než ve kterém se Zeměkoule otáčí) a pohybuje se rychlostí o velikosti $v = r\Omega$. Výsledná síla, kterou z hlediska Zeměkoule naměříme, musí být tedy *dostředivá*: $f_{\text{měř}} = -mr\Omega^2$ (orientujeme-li kladný směr od osy Zeměkoule). Dále víme, že na něj z hlediska Zeměkoule musí působit právě odvozená odstředivá síla téže velikosti, ale *opačného* směru: $f_{\text{odst}} = mr\Omega^2$ podle rov. 24. Anděl strážný nám nepomůže, protože na tento HB nepůsobí žádná skutečná síla: $F_{\text{skut}} = 0$. Co teď s tím?

Nezbývá než doplnit další sílu; musí mít zřejmě v tomto případě hodnotu $f = -2mr\Omega^2$. HB se tentokrát pohybuje vůči Zeměkouli rychlostí o velikosti $v = r\Omega$ (směr rychlosti se mění a je vždy tečný ke dráze – ke kružnici). Vyjádříme proto tento výraz pomocí rychlosti: $-2mv\Omega$ a nazveme ho silou Coriolisovou¹⁴. Ta bude mít směr vždy kolmý k okamžitému pohybu HB i k ose otáčení:

Coriolisova síla (síla setrvačná)

velikost:	$f_{\text{Cor}} = 2mv\Omega$;	(27)
směr:	kolmý (prostředník pravé ruky) k okamžité rychlosti HB (palec) i k ose otáčení (ukazovák).	

Tímto jsme zavedli další setrvačnou sílu vázanou na skutečnost, že se HB vůči $\mathcal{N}$ pohybuje (rychlostí $\vec{v}$); je tedy

$$\vec{f}_{\text{setr}} = \vec{f}_{\text{odst}} + \vec{f}_{\text{Cor}} \quad (28)$$

Tím jsme hotovi; žádnou další setrvačnou sílu již nepotřebujeme a s těmito dvěma si vystačíme vždy, máme-li popsat pohyb HB nikoli v inerciální soustavě, ale v soustavě otáčející se stálou rychlostí kolem osy pevné v inerciální soustavě.

Opravdu, jediné zobecnění pro otáčející soustavu už je jen tehdy, když se neotáčí rovnoměrně; pak přibude ještě člen $\vec{\Omega} \times \vec{r}$ úměrný vektoru úhlového zrychlení, polohovému vektoru a kolmý na oba. Nazývá se Eulerovo zrychlení. Ale chvála bohu se Zeměkoule otáčí natolik rovnoměrně, že se o něj zde nemusíme zajímat. Podrobnosti v každé učebnici teoretické mechaniky.

7.2.3 A nešlo by to jinak?

Ted' mohla právem vyvstat pochybnost. „Odvození“ Coriolisovy síly nebylo jednoznačné; proč bychom to nemohli udělat jinak – místo $-2mv\Omega$ třeba $-2mv^2/r$? A jak máme zaručeno, že se nevyskytne potřeba nějaké další síly?

Odpověď je jednoduchá: použitý vztah $v = r\Omega$ opravdu platil jen pro ten (velmi speciální) pohyb, kdy HB byl v klidu vůči andělovi. Ale přesto jsou síly z rov. 24, rov. 27, resp. rov. 28 opravdu univerzální. Ověříme je na zcela obecném volném HB pohybujícím se (v následující kapitole) v rovině kolmé k ose otáčení; zobecnění na libovolnou rovinu (v další kapitole) už není obtížné.

7.2.4 Rovnoměrný přímočarý pohyb v inerciální soustavě $\mathcal{S}$

Vzorce Při úpravách využijeme jednak součtové vzorce:

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta \quad (29)$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta, \quad (30)$$

$$(31)$$

jednak rozvoje goniometrických funkcí:

$$\text{Pro } \varphi \rightarrow 0: \quad \sin \varphi \rightarrow \varphi \quad (+\mathcal{O}(\varphi^3)) \quad (32)$$

$$\cos \varphi \rightarrow 1 - \frac{1}{2}\varphi^2 \quad (+\mathcal{O}(\varphi^4)) \quad (33)$$

Úvaha Uvažujme HB, který se v inerciální soustavě (IS, anděl...) pohybuje stálou rychlostí o velikosti $W = L/\tau$ v rovině kolmé k ose otáčení Zeměkoule (neinerciální soustava, $\mathcal{N}$). Zvolme počátek IS v průsečíku této roviny s osou otáčení (osa z) a orientujme osu x rovnoběžně s trajektorií HB a s orientací ve směru letu. Situace v časech $t_- = t_0 - \tau$, t_0 , $t_+ = t_0 + \tau$ je zachycena na obrázku¹⁵. Velká písmena¹⁶ a α značí veličiny měřené v IS, malá písmena (kromě α) odpovídající veličiny měřené v $\mathcal{N}$.

¹⁴Objevil ji již v r. 1742 A. Clairaut, ale jeho práce upadla v zapomnutí. G. Coriolis ji v r. 1831 našel znovu a formuloval též věty o relativním pohybu.

¹⁵Obrázek doplním později.

¹⁶Velké řecké α je totožné s velkým latinským „A“ a pletlo by se nám se zrychlením.

Popis vůči $\mathcal{S}$ (andělovi)

Je zřejmé, že platí následující vztahy pro souřadnice HB v IS:

$$X_- = R_- \cos \alpha_- = R_0 \cos \alpha_0 - L \quad (34)$$

$$Y_- = R_- \sin \alpha_- = R_0 \sin \alpha_0 \quad (35)$$

$$X_0 = R_0 \cos \alpha_0 \quad (36)$$

$$Y_0 = R_0 \sin \alpha_0 \quad (37)$$

$$X_+ = R_+ \cos \alpha_+ = R_0 \cos \alpha_0 + L \quad (38)$$

$$Y_+ = R_+ \sin \alpha_+ = R_0 \sin \alpha_0. \quad (39)$$

Popis vůči Zeměkouli

V $\mathcal{N}$ (na Zeměkouli) zvolíme vztažnou soustavu tak, aby souhlasila s IS v čase t_0 . Bod B_0 tedy splývá s b_0 . Protože se však $\mathcal{N}$ otáčí úhlovou rychlostí $\Omega = \Phi/\tau$, bude b_- (stopa HB v $\mathcal{N}$ v okamžiku $t_0 - \tau$) mít od osy otáčení tutéž vzdálenost $r_- = R_-$, ale úhlovou souřadnici $\alpha + \Phi$. Podobně bod b_+ (stopa HB v $\mathcal{N}$ v okamžiku $t_0 + \tau$) bude mít od osy otáčení vzdálenost $r_+ = R_+$, ale úhlovou souřadnici $\alpha - \Phi$. Naší úlohou bude postupně

1. určit v $\mathcal{N}$ souřadnice HB, tj. x_-, y_-, x_+, y_+ ;
2. určit v $\mathcal{N}$ rychlosti HB, tj. $v_{x-}, v_{x+}, v_{y-}, v_{y+}, v_x, v_y$;
3. určit v $\mathcal{N}$ zrychlení HB, tj. a_x, a_y ;
4. zapsat setrvačnou sílu, tj. $\vec{f}_{\text{setr}} = -m\vec{A}_{\mathcal{N}}$. Protože HB je volný, podle rov. 26 je $\vec{F} = 0$ a $\vec{f}_{\text{setr}} = m\vec{a}$.
5. vyjádřit tuto sílu pomocí Ω (rychlost otáčení $\mathcal{N}$ vůči $\mathcal{S}$) a všech veličin HB měřených vůči $\mathcal{N}$, tedy r_0, α_0, v ;
6. interpretovat a diskutovat výsledek.

Hodnoty $R_0 = r_0, \alpha_0, L, \Phi, \tau$ pokládáme za dané.

Nejprve uvážíme, že zřejmě platí $R_- = r_-; R_0 = r_0; R_+ = r_+$. Dále rov. 34 a další nám umožňují nahradit výrazy typu $R \sin \alpha$, resp. $R \cos \alpha$ s indexem „+“ či „-“ užitím stejného výrazu s indexem 0:

$$R_{\pm} \sin \alpha_{\pm} = R_0 \sin \alpha_0 \quad (40)$$

$$R_{\pm} \cos \alpha_{\pm} = R_0 \cos \alpha_0 \pm L. \quad (41)$$

Vypíšeme všechno zcela podrobně, takže to bude moc psaní, ale NENÍ to nijak „těžké“!

ad 1. Spočítejme polohy HB v $\mathcal{N}$.

$$x_- = r_- \cos(\alpha_- + \Phi) \quad (42)$$

$$= r_- (\cos \alpha_- \cos \Phi - \sin \alpha_- \sin \Phi) \quad (43)$$

$$= r_0 \cos \alpha_0 \cos \Phi - l \cos \Phi - r_0 \sin \alpha_0 \sin \Phi \quad (44)$$

$$y_- = r_- \sin(\alpha_- + \Phi) \quad (45)$$

$$= r_- (\sin \alpha_- \cos \Phi + \cos \alpha_- \sin \Phi) \quad (46)$$

$$= r_0 \sin \alpha_0 \cos \Phi + r_0 \cos \alpha_0 \sin \Phi - l \sin \Phi \quad (47)$$

$$x_+ = r_+ \cos(\alpha_+ - \Phi) \quad (48)$$

$$= r_+ (\cos \alpha_+ \cos \Phi + \sin \alpha_+ \sin \Phi) \quad (49)$$

$$= r_0 \cos \alpha_0 \cos \Phi + l \cos \Phi + r_0 \sin \alpha_0 \sin \Phi \quad (50)$$

$$y_+ = r_+ \sin(\alpha_+ - \Phi) \quad (51)$$

$$= r_+ (\sin \alpha_+ \cos \Phi - \cos \alpha_+ \sin \Phi) \quad (52)$$

$$= r_0 \sin \alpha_0 \cos \Phi - r_0 \cos \alpha_0 \sin \Phi - l \sin \Phi \quad (53)$$

ad 2. Dále budeme počítat rychlosti z rozdílu poloh vyděleného dobou τ . Využijeme toho, že pro malé hodnoty τ (tj. pro $\tau \rightarrow 0$) je i Φ malé (tj. $\Phi \rightarrow 0$), takže platí přibližně

$$\sin \Phi \approx \Phi; \quad \cos \Phi \approx 1 - \frac{1}{2} \Phi^2; \quad \frac{\Phi}{\tau} = \Omega; \quad \frac{L}{\tau} = W; \quad \frac{\Phi^2}{\tau} \approx 0. \quad (54)$$

Vyjádříme rychlosti z poloh s využitím $x_0 = r_0 \cos \alpha_0$, $y_0 = r_0 \sin \alpha_0$:

$$v_{x-} = \frac{x_0 - x_-}{\tau} = \frac{1}{\tau} (r_0 \cos \alpha_0 (1 - \cos \Phi) + L \cos \Phi + r_0 \sin \alpha_0 \sin \Phi) \quad (55)$$

$$\approx \frac{1}{\tau} \left(\frac{1}{2} \Phi^2 r_0 \cos \alpha_0 + L(1 - \frac{1}{2} \Phi^2) + \Phi r_0 \sin \alpha_0 \right) \quad (56)$$

$$v_{x+} = \frac{x_+ - x_0}{\tau} = \frac{1}{\tau} (r_0 \cos \alpha_0 (\cos \Phi - 1) + L \cos \Phi + r_0 \sin \alpha_0 \sin \Phi) \quad (57)$$

$$\approx \frac{1}{\tau} \left(-\frac{1}{2} \Phi^2 r_0 \cos \alpha_0 + L(1 - \frac{1}{2} \Phi^2) + \Phi r_0 \sin \alpha_0 \right) \quad (58)$$

$$v_{y-} = \frac{y_0 - y_-}{\tau} = \frac{1}{\tau} (r_0 \sin \alpha_0 (1 - \cos \Phi) - r_0 \cos \alpha_0 \sin \Phi + L \sin \Phi) \quad (59)$$

$$\approx \frac{1}{\tau} \left(\frac{1}{2} \Phi^2 r_0 \sin \alpha_0 - \Phi r_0 \cos \alpha_0 + \Phi L \right) \quad (60)$$

$$v_{y+} = \frac{y_+ - y_0}{\tau} = \frac{1}{\tau} (r_0 \sin \alpha_0 (\cos \Phi - 1) - r_0 \cos \alpha_0 \sin \Phi - L \sin \Phi) \quad (61)$$

$$\approx \frac{1}{\tau} \left(-\frac{1}{2} \Phi^2 r_0 \sin \alpha_0 - \Phi r_0 \cos \alpha_0 - \Phi L \right) \quad (62)$$

ad 3. Vyjádříme (s užitím $\frac{L}{\tau} = W$ a $\frac{\Phi}{\tau} = \Omega$) střední rychlost $v = \frac{1}{2}(v_- + v_+)$ a zrychlení $a = \frac{1}{\tau}(v_+ - v_-)$:

$$v_x = \frac{1}{\tau} \left(L(1 - \frac{1}{2} \Phi^2) + \Phi r_0 \sin \alpha_0 \right) \approx W + \Omega r_0 \sin \alpha_0 \quad (63)$$

$$v_y = \frac{1}{\tau} (-\Phi r_0 \cos \alpha_0) = -\Omega r_0 \cos \alpha_0 \quad (64)$$

$$a_x = \frac{1}{\tau} (v_{x+} - v_{x-}) = \frac{1}{\tau^2} (-2 \frac{1}{2} \Phi^2 r_0 \cos \alpha_0) \quad (65)$$

$$= -\Omega^2 r_0 \cos \alpha_0 \quad (66)$$

$$a_y = \frac{1}{\tau} (v_{y+} - v_{y-}) = \frac{1}{\tau^2} (-2 \frac{1}{2} \Phi^2 r_0 \sin \alpha_0 - 2 \Phi L) \quad (67)$$

$$= -\Omega^2 r_0 \sin \alpha_0 - 2\Omega W \quad (68)$$

ad 4. Setrvačná síla je pro volný HB rovna $\vec{f}_{\text{setr}} = m\vec{a}$, tedy

$$\vec{f}_{\text{setr}} = (-m\Omega^2 r_0 \cos \alpha_0 \quad ; \quad -m\Omega^2 r_0 \sin \alpha_0 - 2m\Omega W) .$$

Interpretujme v dalším rozboru tento výraz.

Připomeňme, co se stane, když složky vektoru $\vec{v} = (v_x ; v_y)$ zaměníme a u první změny znamínko: $\vec{u} = (-v_y, v_x)$. Takto vytvořený vektor $\vec{u}$ zřejmě

- má velikost stejnou jako $\vec{v}$,
- je kolmý k $\vec{v}$ (jejich skalární součin je $v_x u_x + v_y u_y = 0$);
- dostaneme ho z $\vec{v}$ otočením kolem svislé osy o 90° ve směru chodu hodinových ručiček (udělejte si svou konstrukci např. pro vektor $\vec{v} = (1; 2)$; viz obrázek).

Porovnejme nyní složky této obecné setrvačné síly $\vec{f}_{\text{setr}}$ se složkami jednak vektoru $\vec{u}$ kolmého k rychlosti $\vec{v}$, jednak 2D-polohového vektoru $\vec{r}'$ (jeho třetí složka je nulová).

$$\begin{aligned} \vec{f}_{\text{setr}} = -m\vec{A}_{\mathcal{N}} = m\vec{a} &= m(-\Omega^2 r_0 \cos \alpha_0 \quad ; \quad -\Omega^2 r_0 \sin \alpha_0 - 2\Omega W) \\ \vec{u} &= (\Omega r_0 \cos \alpha_0 \quad ; \quad W + \Omega r_0 \sin \alpha_0) \\ \vec{r}' &= (r_0 \cos \alpha_0 \quad ; \quad r_0 \sin \alpha_0). \end{aligned}$$

Podle rozpisu do složek si ověřte, že platí

$$\vec{F}_{\text{setr}} = \vec{F}_{\text{odstř}} + \vec{F}_{\text{Cor}} \quad , \text{ kde} \quad (69)$$

$$\vec{F}_{\text{odstř}} = m\vec{r}'\Omega^2 \quad (70)$$

$$\vec{F}_{\text{Cor}} = -2m\Omega\vec{u} \quad (71)$$

Vektor $\vec{u}$ má velikost rovnou velikosti v rychlosti HB, ale směr kolmý na směr pohybu HB i na osu o rotace vztažené soustavy $\mathcal{N}$. Vektor $\vec{r}'$ vede od HB, kolmo od osy o .

7.3 Mechanika mimo severní pól

Jsme-li přímo na severním pólu, pak papír, na který rýsujeme, je kolmý k ose otáčení (zemské ose); jakákoliv rychlost HB na papíře je tedy vždy kolmá k zemské ose ($\theta = 90^\circ$). Na rovníku je ale směr podél poledníku se zemskou osou rovnoběžný ($\theta = 0^\circ$), jinde něco mezi tím. Ovšem žádný problém: síly jsou vektory. To, co jsme řekli o jejich směrech, to platí kdekoli, takže:

- u odstředivé síly nepovede 2D polohový vektor $\vec{r}'$ z počátku $\mathcal{N}$, ale i nadále kolmo na osu rotace.
- u Coriolisovy síly se u součinu $v\Omega$ objeví ještě sinus úhlu θ , který svírá okamžitá rychlost HB se zemskou osou o (na pólu probíhal pohyb v rovině kolmé k zemské ose, tedy i rychlost byla vždy k o kolmá a $\sin 90^\circ = 1$, proto jsme $\sin \theta$ neuváděli);

Značíme-li tedy r' vzdálenost HB od zemské osy a θ úhel mezi směrem okamžité rychlosti $\vec{v}$ částice a zemskou osou o , pak kdekoli na povrchu Zeměkoule platí:

*Odstředivá síla má velikost $F_{\text{odst}} = mr'\Omega^2$ a směřuje radiálně od zemské osy o ;
Coriolisova síla má velikost $F_{\text{Cor}} = 2mv\Omega \sin \theta$ a směr kolmý na $\vec{v}$ i o :*

Jestliže palec pravé ruky ukazuje směrem rychlosti HB a ukazováček má směr zemské osy (od jižního pólu k severnímu), pak prostředník (na oba předchozí prsty kolmý) udává směr Coriolisovy síly.

Mimochodem, odstředivá síla nás tedy při běhu podél rovníku „nadlehčuje“ proti zemské tíži; mimo rovník mají obě tyto síly různé směry (odstředivá radiálně od zemské osy, gravitační kamsi „do středu Zeměkoule“). Neradujte se, příspěvek odstředivé síly je nepatrný, menší než půl procenta. Jak známo, tak na otáčející se Zeměkouli

$$\text{tíhová síla} = \text{gravitační síla} + \text{odstředivá síla}. \quad (72)$$

7.4 Společné vlastnosti setrvačných sil

Setrvačné síly působí¹⁷ na *všechny* objekty popisované z hlediska neinerciální soustavy. Tyto síly tedy např. z hlediska kolotoče „nutí“ budovy kolem, aby se pohybovaly po kruhových drahách kolem osy kolotoče apod. Jinými slovy, zavedeme-li je, můžeme i z hlediska kolotoče úspěšně popisovat svět, a to jak předměty spojené s kolotočem, tak i stojící mimo něj. Odstředivá a Coriolisova síla tedy z hlediska Zeměkoule točící se kolem vlastní osy správně popíší pohyb Foucaltova kyvadla, stáčení pasátů i (zdánlivé) pohyby hvězd na obloze.

8 Slovní zmatky; dostředivá síla

Pojem odstředivé síly právě vyložený je sám o sobě dosti obtížný. Ale ještě horší je, že stejný termín – odstředivá síla – se užívá v podobném kontextu, ale pro něco zcela jiného.

¹⁷Méně emotivně řečeno: Setrvačné síly musíme zahrnout do pohybových rovnic pro libovolný objekt, který popisujeme v neinerciální soustavě.

8.1 (Vazbová) dostředivá síla

K tomu, aby se HB pohyboval rovnoměrně po kružnici, musí na něj působit nějaká síla kolmo k jeho směru pohybu. Nejčastěji bývá tato síla vazbová (provázek, koleje apod.), u planet je to gravitační síla centrálního slunce. Při rovnoměrném pohybu HB směřuje tato síla do středu kružnice, a proto se nazývá *dostředivá síla*. Je to síla skutečná a proto vždy skutečně působí na HB. (Pokud ale pohyb není rovnoměrný, tak „dostředivá“ síla *nemá* směr do středu kružnice.)

8.2 Odstředivá síla (působící na vazbu)

Pokládáme-li vazbovou dostředivou sílu za akci, pak reakcí k ní je síla, kterou obráceně působí HB na vazbu (provázek, kolejnici ...). Někdy se tato síla nazývá *odstředivou*: „Koleje poškodila odstředivá síla projíždějících vlaků; ložisko vymlela odstředivá síla špatně vyváženého kola“. Není to moc šťastné z více důvodů. Jednak v případě ložiska ho tato síla poškodí směrem do středu, nikoli od středu¹⁸. Ale především je tato síla něco úplně jiného než právě vyložená (setrvačná) odstředivá síla:

- nová odstředivá síla působí na vazbu (závěs, kolej...), zatímco setrvačná odstředivá síla „působila“ na HB;
- nová odstředivá síla je ve vztahu akce – reakce s dostředivou silou, nutící HB k pohybu po kružnici, zatímco setrvačná odstředivá síla nemá k sobě žádnou reakci;
- nová odstředivá síla jakožto skutečná síla existuje při popisu v kterékoli vztažné soustavě, zatímco setrvačná odstředivá síla se vyskytuje *výhradně* při popisu v rotující, neinerciální soustavě.

Nicméně, říká se to takto, a těžko najít něco jiného, co by se ujal¹⁹. Nezbyvá než uvážít vždy, o co se jedná: tři výše uvedené rozdíly vám určitě pomohou jednoznačně rozhodnout.

9 Příklady

9.1 Košíková na kolotoči: zvláště názorný příklad

Oblíbeným pouťovým trikem na kolotoči bývá volejbalový koš na ose: během zastavování kolotoče se vhodí mezi vozíci se zákazníkovi volejbalový míč s tím, že každý, kdo se trefí do koše, se může vozit znovu zadarmo.

Každý to rád zkusí, přesně zamíří – ale většinou se velice mine: míč namířený na koš se v letu jaksi zahne a proletí dost daleko od koše. „Inu, odehnula ho Coriolisova síla spolu s odstředivou“ – řekne si fyzik sedící na kolotoči. „Ten míč letí ve svislé rovině, a ne po nějaké zahnuté ploše. Ale proč s ním ten člověk míří na koš a ne doleva, když ví, že se sám pohybuje doprava?“ – řekne si fyzik stojící na zemi vedle kolotoče. On totiž vidí, že házející, který míří na koš, se sám pohybuje kolmo ke směru, kterým hází. Je to stejné, jako kdyby házeli z auta, které projíždí okolo rychlostí stejnou, jakou má na kolotoči házející, tedy $V' = R\Omega$. Je-li míč vržen rychlostí $\vec{v}$ k ose, má vůči Zemi rychlost $\vec{W}$, která je vektorovým součtem těchto rychlostí: $\vec{W} = \vec{v} + \vec{V}'$; rychlosti $\vec{v}$, $\vec{V}'$ jsou k sobě kolmé. Letí-li míč k ose dobu $\tau = R/v$, pak proletí ve vzdálenosti $D = V'\tau = RV'/v$ od osy.

9.2 Střelba na židličky

K otáčivé židli je našroubována vzduchová pistole a terč. Roztočíme-li židli, dopadnou střely jinam, než když je židle v klidu.

Pozorovatel na židli měří zakřivený let střely a vysvětlí ho Coriolisovou a odstředivou silou, působící na pohybující se střelu. Pozorovatel na Zemi vidí shora přímý let střely. Vidí však, že střela má vedle své rychlosti $\vec{w}$ vůči zbraňi i složku o velikosti $V = R\Omega$ danou tím, že se zbraň ve vzdálenosti R od osy otáčí úhlovou rychlostí Ω , a dále že během doby letu τ se cíl posune po oblouku o středovém úhlu $\Omega\tau$.

K oběma popisům přistupuje ovšem ještě pokles ve výšce daný volným pádem střely.

¹⁸No vážně: osa ložiska je prý vymletá *odstředivou silou* – ale je snad nafouklá od středu osy, ven? Nikoli, je vmačkaná, a to samozřejmě ke středu osy, dovnitř!

¹⁹Zkuste přemluvit lidi, aby říkali *teplotoměr* namísto *teploměr*, když měří teplotu, a ne teplo!

9.3 Odklon pasátů (opravená verze 8e)

Předmět, který stojí na rovníku, se vůči našemu andělu strážnému pohybuje úctyhodnou rychlostí. Rovník má 40 000 km, Zeměkoule se otočí jednou za 24 hodin, čili předmět má vůči němu nadzvukovou rychlost:

$$V_{0^\circ} = \frac{40\,000}{24} \text{ km/h} \approx 1667 \text{ km/h} \approx 463 \text{ m/s.} \quad (73)$$

Posune-li se o 30° na sever, měl by – pro klid vůči Zeměkouli – mít rychlost nižší:

$$V_{30^\circ} = 463 \cdot \cos 30^\circ \text{ m/s} \approx 400 \text{ m/s.} \quad (74)$$

Pokud si tedy předmět o hmotnosti m setrvačností ponechal svých 463 m/s, tak přesunem na sever o 30° získal slušnou rychlost $\Delta v = 63 \text{ m/s}$ vůči Zeměkouli, a také tomu odpovídající hybnost $\Delta \vec{p} = m\Delta \vec{v}$ (se směrem na východ). Z hlediska Zeměkoule se předmět urychlil; toto zrychlení $\vec{a}_{\text{Cor}}$, stejně jako přírůstek $\Delta \vec{p}$ hybnosti, se jeví jako důsledek Coriolisovy síly $\vec{f}_{\text{Cor}}$ „působící“ na točící se Zeměkouli: $\vec{a}_{\text{Cor}} = \vec{f}_{\text{Cor}}/m$.

A konkrétně k pasátům a vůbec k proudění vzduchu na naší Zeměkouli: když se vzduch přesouvá na severní polokouli směrem od rovníku k pólu (to nastává v horních vrstvách troposféry), tak se právě popsáním mechanismem „předbíhá“ doprava (na východ). Na jižní polokouli při přesunu směrem od rovníku k jižnímu pólu se předbíhá rovněž na východ, tentokrát je to ovšem z jeho hlediska doleva. Naopak, proudí-li vzduch obráceným směrem, tedy směrem od pólů k rovníku (to pozorujeme ve spodních vrstvách atmosféry), pak „nestíhá Zeměkouli“, zpožďuje se oproti zemskému povrchu, a tedy z hlediska svého pohybu se stácí na západ (opět je to na severní polokouli doprava, na jižní doleva).

Obecně vzato je toto „Coriolisovo stáčení“ při pohybu předmětu na (otáčející se) Zeměkouli tím výraznější, čím blíže jsme pólu. Na rovníku samotném se Coriolisova síla uplatní jen nepatrně – tím, že při pádu z výšky se předmět uchyluje na východ, při pohybu po rovníku směrem východním je předmět nadlehčován. Při pohybu na rovníku směrem k pólu (kterémukoliv) je ovšem Coriolisova síla nulová, protože jde o směr rovnoběžný s osou rotace Zeměkoule.

9.4 A nakonec Cimrmanovo „Tudy cesta nevede, přátelé!“

Při zájezdu na Blízký východ se na rovníku setkáte s ochotnými obchodníky, kteří vám (za mírný bakšiš) ukáží, jak na severní polokouli se při vytékání vody z nádoby malým otvorem ve dně tvoří vír doprava, zatímco o metr dále – už na jižní polokouli – v téže nádobě bude táž voda při vytékání tvořit vír levotočivý. Je to velice efektní. (Vy se o to nepokoušejte. Nejspíš se vám to nějak nepovede zopakovat.)

Když si ale uvědomíte:

- kolik asi činí součin $2mv\Omega \sin \theta$ v Coriolisově síle při zemském poloměru 6 378 km a odchylce v poloze 1 m ($\sin \theta \approx \theta = \frac{1}{6\,378\,000} \approx 0,16 \cdot 10^{-6}$), při nepříliš velké rychlosti v proudící vody a při nepatrné úhlové rychlosti otáčející se Zeměkoule $\Omega = \frac{1}{60 \cdot 60 \cdot 24} \approx 11,6 \cdot 10^{-6} \text{ s}^{-1}$;
- že je značně těžké ustálit čerstvě nalitou vodu v nádobě tak, aby se ani trošinku netočila;
- že s klesající hladinou a poloměrem otáčení se původní úhlová rychlost víru v kapalině výrazně zvyšuje;
- co dokážou nepatrné mimovolné (ba i nemimovolné) pohyby lidského těla, dané už prostě jen tepem našeho srdce, chvěním svalstva a podobně,

jmou se vás jistě pochybnosti a věrohodnosti tohoto „důkazu“ Coriolisovy síly. Docela právem.