

Shrnutá fyzika (mechanika-NMFY 160 L)

(předběžná pracovní verze)

Jan Obdržálek, Jitka Houfková

2018-07-05

Obsah

1	O fyzice obecně	2018-06-25	9
1.1	Literatura		9
1.2	Fyzika coby věda		9
1.3	Fyzika v rámci ostatních věd		9
1.4	Výchozí představy fyziky		10
1.4.1	Fyzika klasická, relativistická, kvantová		10
1.4.2	Klasická fyzika		10
1.4.3	← „Moderní“ (kvantová) fyzika, současný pohled		11
1.5	Filozofie a fyzika (informativní body)		14
1.5.1	Cesty rozvoje fyziky (indukce vs. dedukce)		14
1.5.2	Zdůvodnění (kauzální, teleologické; statistika)		15
1.5.3	Klasifikace vědy: fenomenologická, fundamentální		15
1.5.4	„Je foton částice nebo vlna?“		16
1.5.5	$E = mc^2$ aneb je hmota jen „nesmírně zhuštěná energie“?		16
1.5.6	Co s rozpory		16
1.5.7	Resumé		16
2	Základní pojmy („mechanikopis“)	2018-06-17	17
2.1	Literatura		17
2.2	Typické matematické pojmy v různých přístupech		17
2.3	Základní fyzikální pojmy a termíny (připomenutí)		17
2.3.1	Rámec popisu; terminologie		17
2.3.2	Zkoumané objekty		18
2.3.3	Vlivy působící na zkoumané objekty		20
2.4	Přístup		20
2.4.1	Porovnání: vektorová (newtonovská) mechanika		20
2.4.2	Porovnání: analytická mechanika		21
2.5	Matematický aparát: vektorová algebra		22
2.5.1	Skalár α		22
2.5.2	Vektor $\vec{v}$		23
2.5.3	Vektorové pole; siločáry		24
2.5.4	Geometrické a složkové pojetí vektoru		24
2.5.5	Součiny vektorů		24
2.5.6	Volný, vázaný, klouzavý vektor		25
2.5.7	Tenzor T_{ij} ; $T_{i,\dots,k}$; $T_{m,\dots,n}^{i,\dots,k}$		26
2.6	Matematický aparát: vektorová analýza		27
2.6.1	Parciální derivace (∂)		27
2.6.2	Operátor nabla (∇)		27
2.6.3	Gradient (grad , ∇)		27
2.6.4	Totální derivace (d)		27
2.6.5	Součiny operátoru nabla; aplikace		28
2.6.6	Popis pole ve fyzice		28
3	Kinematika hmotného bodu	2018-05-30	31
3.1	Předmět kinematiky		31
3.2	Základní pojmy		31
3.2.1	Vztažná soustava		31
3.2.2	Poloha		31

3.2.3	Trajektorie	31
3.2.4	Délka křivky, dráha	32
3.2.5	Rychlost $\vec{v}$, posuvná rychlost	32
3.2.6	Zrychlení $\vec{a}$	32
3.3	Poloha a rychlost obecných objektů	33
3.4	Úhlové veličiny	33
3.5	Plošné veličiny	34
3.6	Více vztažných soustav	34
3.6.1	Problematika	34
3.6.2	Galileova transformace	34
3.6.3	Zdroj signálu v pohybující se soustavě	35
4	Dynamika hmotného bodu 2018-06-22	37
4.1	Předmět	37
4.2	Základní veličiny dynamiky hmotného bodu	37
4.2.1	Síla: různé typy klasifikace	38
4.3	Silový diagram	38
4.4	Newtonovy pohybové zákony	39
4.4.1	Rámec: Newtonův absolutní prostor a čas (původní pojetí)	39
4.4.2	Newtonovy pohybové zákony	39
4.4.3	Nultý Newtonův zákon – (přísně tajný) zákon výslednice	39
4.4.4	První Newtonův zákon – zákon setrvačnosti (1NZ)	39
4.4.5	Druhý Newtonův zákon – zákon síly (2NZ)	40
4.4.6	Třetí Newtonův zákon – zákon akce a reakce (3NZ)	40
4.5	Princip relativity; Galileo, Einstein	41
4.6	Další příbuzné mechanické veličiny	41
4.7	Práce, energie	42
4.7.1	Zákon zachování mechanické energie; konzervativní síla	43
4.7.2	Konzervativní síly	44
4.8	Tření	44
4.8.1	Klasifikace	44
4.8.2	Smykové tření	44
4.8.3	Valivý odpor	45
4.8.4	Vnitřní tření; odpor prostředí	45
4.9	Výpočty se započítáním tření	46
4.9.1	Tření za pohybu (kinetické)	46
4.9.2	Tření klidové	46
5	Řešení pohybové rovnice: kmity 2018-05-31	47
5.1	Matematický aparát	47
5.1.1	Homogenní rovnice	47
5.1.2	Nehomogenní rovnice	48
5.1.3	Pohybová rovnice – 2. Newtonův zákon	48
5.2	Konkrétní tvary síly	48
5.2.1	Nulová síla: $F = 0$	48
5.2.2	Konstantní síla: $F = F_0$	48
5.2.3	Netlumený harmonický oscilátor: $F = -kx$	49
5.2.4	Harmonický oscilátor s předpětím: $F = -kx + F_0$	50
5.2.5	Tlumený harmonický oscilátor: $F = -kx - h\dot{x}$	51
5.2.6	Vynucené kmity: $F = -kx - h\dot{x} + F(t)$	54
5.2.7	Skládání kmitů	58
5.2.8	Vázané kmity. Kvazičástice	60
5.2.9	$\longleftrightarrow$ Řetízek oscilátorů (podélné kmity)	61
5.2.10	$\longleftrightarrow$ Struna	62
5.2.11	$\longleftrightarrow$ Řetízek s bází	62
5.3	Speciální pohyby 3D: centrální pole	62
5.3.1	Definice centrálního pole	62
5.3.2	Obecné vlastnosti centrálních polí	62
5.3.3	Prostorový harmonický oscilátor	63
5.4	Relaxační kmity	64

6	Setrvačné (zdánlivé) síly	2018-06-07	65
6.1	Mechanika v nenormálních situacích		65
6.1.1	Pohyb částice v normální situaci		65
6.1.2	První nenormální situace		66
6.1.3	Druhá nenormální situace: neinerciální soustava		66
6.1.4	Čtyři vysvětlující poznámky		68
6.1.5	Jak popisovat co nejvýhodněji		69
6.2	Neinerciální vztažné soustavy – analytická metoda		69
6.3	Populárně: Neinerciální vztažné soustavy grafickou metodou		71
6.3.1	Diskretizace		71
6.3.2	Parametrizovaná trajektorie (označovaná cesta)		72
6.3.3	Rychlost		72
6.3.4	Zrychlení		72
6.3.5	Výsledná síla (výslednice)		73
6.4	Cvičení		73
6.5	Společné vlastnosti setrvačných sil		74
6.6	Slovní zmatky; dostředivá síla a jiná „odstředivá síla“		74
6.6.1	(Vazbová) dostředivá síla		74
6.6.2	Odstředivá síla (působící na vazbu)		74
6.7	Příklady		75
6.7.1	Košiková na kolotoči: zvláště názorný příklad		75
6.7.2	Střelba na židličky		75
6.7.3	Odklon pasátů		75
6.7.4	Pád z velké výšky		76
6.7.5	A nakonec Cimrmanovo „Tudy cesta nevede, přátelé!“		76
7	Soustava HB a tuhé těleso	2018-06-07	77
7.1	Soustava hmotných bodů		77
7.1.1	Zavedení, základní pojmy		77
7.1.2	Střed hmotnosti, hmotný střed; těžiště, metacentrum ap.		78
7.1.3	Věta o hybnosti		79
7.1.4	Věta o momentu hybnosti		79
7.1.5	Kinetická energie; Königova věta		79
7.1.6	Zákony zachování		80
7.1.7	Srážka (ráz)		80
7.2	Pojem tuhého tělesa		80
7.2.1	Základní představy		80
7.2.2	Popis tuhého tělesa. Stupně volnosti		80
7.3	Kinematika tuhého tělesa		82
7.3.1	Přemístění tuhého tělesa		82
7.3.2	Kinematický šroub		82
7.3.3	Ekvivalence rotace kolem bodu a kolem osy		84
7.4	Dynamika TT: skládání sil; silová dvojice; dynamický šroub		85
7.4.1	Pojmy a názvy: vektor volný, vázaný, klouzavý		85
7.4.2	Klouzavý vektor		85
7.4.3	Skládání dvou klouzavých vektorů. Silová dvojice; dynamický šroub		86
7.4.4	Skládání libovolného počtu klouzavých vektorů a silových dvojic		87
7.4.5	Těžiště; metacentrum		88
7.5	Dynamika tuhého tělesa		89
7.6	Rovnováha tuhého tělesa		90
7.7	Rotace kolem pevné osy		90
7.7.1	Problematika		90
7.7.2	Charakteristické veličiny		90
7.7.3	Porovnání rotace a posuvu		91
7.8	Tenzor setrvačnosti, Eulerovy rovnice		92
7.8.1	Tenzor setrvačnosti		92
7.8.2	Eulerovy rovnice		93

8	Základy teorie relativity	2018-06-17	95
8.1	Motivace		95
8.1.1	Co je a co není teorie relativity		95
8.1.2	Důvod pro STR: nyní, začátkem 21. století		96
8.1.3	Důvod pro STR v době jejího vzniku: začátek 20. století		96
8.2	Klasické pojetí času a prostoru (připomenutí)		97
8.2.1	Vztažná soustava; synchronizace		97
8.2.2	Událost		97
8.2.3	Synchronizace vztažných soustav navzájem		97
8.2.4	Současnost a souměrnost; relativní a absolutní		97
8.2.5	Galileova transformace		98
8.2.6	Měření dob a délek		98
8.2.7	Klasické skládání rychlostí		98
8.3	Princip konstantní světelné rychlosti		99
8.4	Lorentzova transformace		99
8.4.1	Motivace		99
8.4.2	Speciální Lorentzova transformace (1D prostor x a čas t)		100
8.4.3	Obecná Lorentzova transformace (pro 3D prostor $x; y; z$ a čas t)		100
8.5	Vlastnosti a důsledky speciální Lorentzovy transformace		101
8.5.1	Transformace rychlostí („skládání rychlostí“)		101
8.5.2	Interval jako invariant Lorentzovy transformace		102
8.5.3	Časová proměnná; metrika		102
8.5.4	Relativita současnosti		103
8.6	Klasické interpretace: kontrakce délek, dilatace času, éter		104
8.6.1	Vlastní délka		104
8.6.2	Kontrakce délek		104
8.6.3	„Dlouhé auto projíždí krátkou garáží“		105
8.6.4	Dilatace času		105
8.6.5	„Paradox dvojčat“		106
8.6.6	Éter		106
8.6.7	Měření rychlosti světla v různých směrech; Michelson-Morley		107
8.6.8	„Strhování světla“		107
8.6.9	Světlo v látkovém prostředí a relativita		108
8.7	Vektorový formalismus, čtyřvektory		108
8.7.1	Základní idea		108
8.7.2	Čtyřskaláry, čtyřvektory, čtyřtenzory		109
8.7.3	Vlastní čas (vlastní doba)		109
8.7.4	Polohový čtyřvektor X		110
8.7.5	Čtyřvektor rychlosti – čtyřrychlost U		110
8.7.6	Čtyřvektor hybnosti P ; klidová m_0 a relativistická m hmotnost		110
8.7.7	Čtyřvektor zrychlení A		110
8.7.8	Čtyřvektor síly. Pohybová rovnice		111
8.7.9	Relativistická hmotnost; jiné odvození		112
9	Analytická mechanika	2018-05-17	115
9.1	Plán; pojem principu		115
9.1.1	Co, proč a jak (syntéza vs. analýza)		115
9.1.2	Příklad z optiky		115
9.1.3	Troška filosofie		116
9.1.4	Proč tedy tuto novotu?		116
9.2	Rekapitulace vektorové mechaniky		116
9.2.1	Základní pojmy ve vektorové mechanice		117
9.2.2	Analogické pojmy v analytické mechanice		117
9.3	Vazby, zobecněné souřadnice		118
9.3.1	Vazba		118
9.3.2	Typy vazeb		119
9.3.3	$\leftarrow$ Neholonomní vazby integrabilní a neintegrabilní		120
9.3.4	Zobecněné souřadnice		121
9.3.5	Zobecněné rychlosti		122
9.3.6	Označení prostorů		122
9.3.7	Zahrnutí vazeb do mechaniky		122

9.4	Lagrangeovy rovnice 1. druhu	122
9.5	Princip virtuální práce	123
9.5.1	Statika	123
9.5.2	Dynamika; d'Alembertův princip	123
9.6	Lagrangeovy rovnice 2. druhu. Hamiltonovy rovnice	124
9.6.1	Zákon zachování energie	124
9.6.2	Lagrangeovy rovnice 2. druhu v kartézských souřadnicích	124
9.6.3	Lagrangeovy rovnice 2. druhu v zobecněných souřadnicích	124
9.6.4	Lagranžian	125
9.6.5	Hamiltonův princip, princip minimální akce	125
9.6.6	Zobecněné hybnosti. Fázový prostor	126
9.6.7	Hamiltonovy rovnice	126
9.6.8	Názorný význam hamiltoniánu	126
9.7	Kanonické transformace	126
9.8	Hamiltonova-Jacobiho rovnice	127
9.9	Přednosti analytického přístupu	127
A	Keplerova úloha – problém dvou těles 2016-09-03	129
A.1	Formulace úlohy	129
A.1.1	Cíl	129
A.1.2	Co záměrně zanedbáme	129
A.1.3	Vztah k reálné situaci	129
A.1.4	Další možný rozvoj teorie	130
A.2	Problém dvou těles – Keplerova úloha	130
A.3	Těžišťová vztažná soustava	130
A.4	Redukovaná úloha	131
A.5	Rovinný problém; moment hybnosti	131
A.6	Zákony zachování	132
A.7	Řešení rovinného problému	132
A.7.1	Polární souřadnice	132
A.7.2	Výpočet závislosti vzdálenosti r a času t	133
A.7.3	Výpočet trajektorie kvaziplanety $r = r(\varphi)$	133
A.7.4	Pohyb planety a slunce	135
A.7.5	Shrnutí a diskuse	135
A.8	Keplerovy zákony	136
A.8.1	1. Keplerův zákon	136
A.8.2	2. Keplerův zákon	136
A.8.3	3. Keplerův zákon	136
A.9	Označení	137
A.9.1	Elipsa	137
A.9.2	Označení užitá v Keplerově úloze	138
B	Kinematika graficky 2017-05-27	139
B.1	Grafický popis	139
B.1.1	Grafický popis obecně	139
B.1.2	Grafický popis událostí a dějů	139
B.1.3	Změna vztažné soustavy	140
B.1.4	Grafický popis homogenní Galileovy transformace	140
B.1.5	Grafický popis homogenní Lorentzovy transformace	141
B.2	Omyly způsobené nekonzistencí	142
C	Srážka (ráz) 2016-08-24	143
C.1	Srážka obecně	143
C.2	Srážka dvou těles	144
C.2.1	Strategie	144
C.2.2	Těžišťová soustava $\mathcal{T}$	144
C.2.3	Označení	144
C.3	Srážka dvou hmotných bodů podél přímky	145
C.3.1	Příklad úlohy	145
C.3.2	Popis v těžišťové soustavě $\mathcal{T}$	146
C.3.3	Popis srážky v laboratorní soustavě $\mathcal{L}$	147

C.4	Aplikace	147
C.4.1	Pružná srážka stejných těles	147
C.4.2	Kolmý odraz míčku od pevné zdi	148
C.4.3	Kolmý odraz pingpongového míčku od páčky	148
C.4.4	Necentrální srážka	148
C.4.5	Gravitační prak	148
C.5	Co ovlivňuje srážku	148
C.5.1	Geometrie srážky těles	148
C.5.2	Povrch těles	148
C.5.3	Materiál těles	149
D	Jedinečnost Lorentzovy transformace 2017-05-27	151
D.1	Záměr	151
D.2	Odvození Lorentzovy transformace pro 1D prostor	151
D.2.1	Zachování zákona setrvačnosti	151
D.2.2	Soustava $\mathcal{S}'$ má vůči soustavě $\mathcal{S}$ rychlost W	151
D.2.3	Soustava $\mathcal{S}$ má vůči soustavě $\mathcal{S}'$ rychlost $-W$	151
D.2.4	Má-li bod v soustavě $\mathcal{S}$ rychlost c , pak má v $\mathcal{S}'$ rovněž rychlost c	152
D.2.5	Inverzní transformace k Lorentzově transformaci je rovněž Lorentzova.	152
E	Veličina, měření, zápis hodnot 2018-06-10	153
E.1	Veličina: pojem, hodnota veličiny	153
E.2	Zápis číselných hodnot veličin	153
E.3	Popis os grafu, nadpis sloupce tabulky	154
E.4	Měření – základní pojmy	154

Kapitola 1

O fyzice obecně

2018-06-25

↔ Odstavce a kapitoly takto označené můžete přeskočit, aniž ztratíte souvislost.

1.1 Literatura

Doporučenou literaturou pro přednášku Fyzika pro matematiky (NMFy160) je základní učebnice

- Halliday D., Resnick R., Walker J.: Fyzika. VUTIUM Brno, 2013 (dřívější překlad VUTIUM Brno + Prometheus Praha, 2001, dotisky 2003, 2006), dále uváděná jako **HRW**

Zajímavou literaturou o fyzice všeobecně je

- The Feynman lectures on physics. Addison-Wesley, 1963, 1966
existuje i překlad český (2000) a slovenský (1990, Alfa, Bratislava)

Hlavně ale využijte *texty ze stránky UTF*, např. výborné výklady doc. Langer a prof. Podolského k mechanice nebo skriptum doc. Semeráka k relativitě. Text této své přednášky (zhruba) dávám průběžně na svou webovou stránku utf.mff.cuni.cz/~jobdr, tamtéž je i shrnutí Kalkul aj.

Občas jsou v textu zařazeny otázky; jejich řešení je na konci dále uvedené kapitoly.

??? **Otázka:** Jakou že to má webovou stránku UTF? (→str. 10)

1.2 Fyzika coby věda

Fyzika je **objektivní věda** (vědecký postup, přístup, pohled atd., versus umění, umělecký přístup; tedy objektivní vs. subjektivní). Snaží se proto o co nejmenší vliv **subjektu**, který vědu tvoří nebo ji přijímá, a maximální vliv **objektu**, který je vědou studován.

Věda formuluje **model** a vytváří **pojmy** vhodné pro popis reality, přiřazuje jim názvy – **termíny**; studuje vlastnosti tohoto modelu a porovnává ho s **pozorováním** či (dokonce) **experimentem**. Ideálem je pak možnost předvídat (na základě modelu), co se stane v budoucnu. V tomto modelu požívá (fyzikální) **veličiny** popisující ty vlastnosti objektů, které lze vyjádřit číslem (a referencí, viz str. 153) a měřit.

Objektivita: velký význam **měření**.

Galileo: Co lze změřit, máme změřit; co změřit nejde, máme převést na měřitelné.

Lord Kelvin (1906, IEC): If you can't measure it, you can't improve it. Viz též kap. E.1.

Kritérium pravdivosti teorie: konečkonců soulad teorie s pozorováním reálného světa. Dílčí kritéria jsou vnitřní logická konzistence, jednoduchost teorie, vyvratitelnost (Popper) . . .

1.3 Fyzika v rámci ostatních věd

Fyzika je **přírodní věda** (vs. **společenské**, humanitní vědy o člověku a lidské společnosti). Další přírodní vědy jsou např. chemie, biologie, ale i mineralogie, geofyzika, astrofyzika, technické vědy apod.. V aplikované fyzice se můžeme setkat s **filozofickými kategoriemi** jako jsou **příčina** či **důsledek**¹, ale předmětem našich úvah **nebudou** kategorie typu **vůle**, **vědomí**, **myšlenka**, **víra**,

¹ Akce a reakce vyskytující se ve 3. Newtonově zákonu *nemají* charakter příčiny a důsledku. Viz str. 40.

Bůh, smysl (života, věcí), **dobro**, zlo apod. (Mohou se samozřejmě vyskytnout ve styčných oblastech s historií vědy, didaktikou, v aplikacích apod.)

Fyzika zkoumá nejzákladnější procesy v přírodě, zejména neživé (i když biofyzika vykládá fyzikálními metodami i chování živých objektů). Je ze všech přírodních věd nejvíce „matematizovaná“ (fakticky: axiomatizovaná, má nejpřesněji formulované předpoklady i pracovní metody). V tomto smyslu je i „nejhlubší“ přírodní vědou: např. kvantová fyzika vysvětluje pojem *chemické vazby* (klíčový pro chemii), který chemie jen postuluje z experimentu.

Samozřejmě existují **mezní obory**: *fyzikální chemie*, *kvantová chemie*, *biofyzika* (fyzikální základy základních projevů živých organismů), *biomechanika* (mechanika člověka — balet, sport).

V historii šel velmi často ruku v ruce vývoj *fyziky* a *matematiky* (např. Newton — diferenciální počet pro popis pohybu hmotného bodu; Cauchy, Riemann — parciální diferenciální rovnice pro popis mechaniky kontinua). Fyzika jednak využívala hotového matematického aparátu (např. teorie grup, zejména teorie reprezentací má rozsáhlé a klíčové aplikace v kvantové teorii), ale současně inspirovala matematiku pro aktivitu v nových oblastech (ve fyzice užívaná, ale matematicky nekorektní Diracova δ -funkce vedla v matematice k teorii distribucí).

!!! Odpověď ze str. 9: <http://utf.mff.cuni.cz/>

1.4 Výchozí představy fyziky

1.4.1 Fyzika klasická, relativistická, kvantová

Základní je rozdělení na

- teorie *nerelativistické* vs. *relativistické* podle popisu prostoročasu; srovnání se *světelnou rychlostí* $c = 299\,792\,458\text{ m/s}$;
- teorie *nekvantové* vs. *kvantové* podle popisu hmoty a energie (při malých rozměrech a energiích), když se uplatní *Planckova konstanta* $h = 6,624 \dots 10^{-34}\text{ J}\cdot\text{s}$.

	nerelativisticky	relativisticky
nekvantově	$c \rightarrow \infty \quad \hbar \rightarrow 0$	$c < \infty \quad \hbar \rightarrow 0$
kvantově	$c \rightarrow \infty \quad \hbar > 0$	$c < \infty \quad \hbar > 0$

Většinou „klasicky“ = „nekvantově & nerelativisticky“, nyní často „klasicky“ = „nekvantově“.

Označení „velké“ či „malé“ u veličin s rozměry: nutno srovnat s hodnotou jiné veličiny mající též rozměr (např. srovnávání s člověkem a jeho možnostmi — antropomorfismus).

1.4.2 Klasická fyzika

Rámec popisu (podrobněji viz kap. 2.3.1)

Prostor (3D). Z geometrie: euklidovská metrika (prostor je plochý = není zakřivený)

Čas (1D) plyne jen jedním směrem. Z filosofie přebíráme *princip kauzality*: nejprve nastane příčina, po ní teprve důsledek; ve vlastní fyzice se však kauzalita vyskytuje zřídka².

V klasické fyzice jsou prostor a čas *nezávislé* na sobě a vytvářejí *pevný rámec pro popis* přírodních dějů zájímajících fyziku. V moderních partiích fyziky tomu tak už není: ve STR jsou prostor a čas svázány na **prostoročas**, v OTR má prostoročas aktivní účast na dynamice těles: vystihuje a tím nahrazuje dosavadní gravitaci. Z hlubších teorií: superstruny.

Objekt, který sledujeme (podrobněji viz kap. 2.3.2)

Těleso je obvyklým modelem objektu. Má jistý **tvar** a jistou **polohu** v prostoru (vs. objekty abstraktní, jako např. MŠMT). Tvar se může s časem měnit: těleso **deformovatelné** (materiál: **kontinuum**), nebo se nemění: **tuhé těleso** (něco jiného je pevná látka, viz dále).

Látka = **hmota** = **materiál** (synonyma).

²Jak už bylo na str. 9 pod čarou podotknuto a na str. 40 bude vysvětleno, síly vystupující ve 3. Newtonově zákonu jako akce a reakce *nejdou* v kauzálním vztahu.

Tvar tělesa: nejjednodušší situace je, když na tvaru nezáleží a těleso lze pokládat za bodové (např. jeho vlastní rozměry jsou zanedbatelně malé vůči jeho vzdálenosti od ostatních uvažovaných objektů): **hmotný bod** (HB). Jeho poloha v prostoru je určena jen třemi souřadnicemi, např. kartézskými. Jako synonymum pro „hmotný bod“ zde často používáme kratší, jednoslovné označení „částice“. (Zde *nejde* o „elementární částice“ kvantových teorií.)

Soustava (= **systém**) několika částic (hmotných bodů).

Spojitě prostředí (**kontinuum**), např. voda v moři, vs. **diskrétní soustava** (částice, tuhá tělesa), např. písek a kameny na pláži.

Kontinuum předpokládáme v klasické fyzice za prakticky nekonečně jemně dělitelné; moderní člověk ovšem ví, že nemůže dělit do oblastí co do rozměrů srovnatelných s molekulami příslušné látky. Kontinuum lze také získat abstrakcí, když počet částic v soustavě zvětšujeme do nekonečna a současně tyto částice zmenšujeme tak, aby vhodné veličiny (např. hustota látky) měly rozumnou limitu. Naopak kontinuum při popisu často diskretizujeme na infinitezimální „částice“, dostatečně malé s velikostí výchozí oblasti, ale přitom řádově větší, než jsou rozměry molekul. V klasické matematické analýze předpokládáme pak u těchto částic následný limitní přechod, v alternativní analýze pracujeme s infinitezimálními veličinami přímo.

Atributy těles: zejména **hmotnost** m a **náboj** q , na úrovni elementárních částic dále zejména **spin** s coby vlastní moment hybnosti elementární částice či jejich soustavy.

Interakci mezi látkovými objekty popisuje klasická fyzika pojmem **síla** (podrobněji viz kap. 2.3.3); jejím spojitým zobecněním je silové **pole**: gravitační pole, elektromagnetické pole.

Veličina je vlastnost objektu či jevu popsateľná číslem a referencí, viz kap. E.1.

Měření veličiny je realizováno interakcí měřeného objektu a měřicího přístroje. V klasické fyzice však předpokládáme, že proces měření buď vůbec neovlivňuje měřenou veličinu (např. „bezkontaktní“ měření délky), nebo ji ovlivňuje známým, pro daný účel „nezávadným“ způsobem („řehačka“ u mikrometru).

Klasická teorie elektromagnetického pole však už v sobě obsahuje veškerou matematiku teorie relativity (např. invariantnost vůči Lorentzově a nikoli Galileova transformaci). Chybí jí k relativitě jen Einsteinův krok – zavedení pojmu prostoročasu, tj. pochopení, že např. Lorentzova kontrakce pohybujících se objektů není vlastností těchto objektů (či jejich materiálu), ale vlastností prostoročasu, v němž tyto objekty popisujeme a měříme.

V klasické fyzice jsou tedy dvojí základní „stavební kameny“, **částice** (korpuskule) a **pole**. Jsou diametrálně odlišné, proto byl rozpor mezi korpuskulární a vlnovou teorií světla. Tento rozdíl setře *kvantová fyzika*, která jak částice, tak pole popisuje stejně (např. vlnovou funkcí) a rozdíl je jen v tom, že pro „částice“ je $m > 0$, pro „pole“ je $m = 0$.

1.4.3 $\leftrightarrow$ „Moderní“ (kvantová) fyzika, současný pohled

Co nového

Termín „moderní fyzika“ se užívá zpravidla jako protiklad ke klasické fyzice a zahrnuje **teorii relativity** a zejména **kvantovou fyziku** (i když obě disciplíny jsou více než jedno století staré!).

U **relativity** nastává podstatná *změna názoru na prostor a čas* (spojují se v prostoročas, současnost se stává relativní, naproti tomu rychlost světla je absolutní, tedy stejná v každé inerciální soustavě).

V **kvantové** teorii nastává podstatná *změna v pohledu na částici* (korpuskule) a *pole* (objekt doposud „vlnové povahy“), tj. mění se i představa a pojem hmoty. Kvantová částice se chová stejně jako kvantové pole, liší se jen jediným parametrem – klidovou hmotností m_0 , která je kladná pro dosavadní částice (např. elektron) a nulová pro dosavadní pole (např. foton).

Nerozlišitelnost: Částice ztrácejí svou individualitu: částice téhož druhu jsou navzájem nerozlišitelné, asi jako jednotlivé koruny na elektronickém bankovním účtu nebo vlny na vodě. Vkládáte-li každý den po koruně, nemá smysl otázka, zda příští týden vybraná koruna je pondělní či páteční. Jdou-li proti sobě dvě vlny na rybníce, nemá smysl rozlišovat, zda se vlny od sebe odrazily nebo zda jedna prošla druhou („která je která“).

Kvantování: Podobně jako je kvantována hmota (např. molekulami), jsou kvantovány i fyzikální veličiny, např. energie. Atom vodíku tvořený navzájem se přitahujícími elektronem a protonem má povoleny jen některé stabilní stavy (se zápornou energií, bereme-li nulovou hodnotu energie pro

situaci, kdy jsou obě částice od sebe tak daleko, že už na sebe prakticky nepůsobí). Při interakci atomu vodíku s okolím se energie vodíku mění jen o dané rozdíly energií jednotlivých stavů, nikoli tedy spojitě.

Měření je v principu interakce objektu s měřicím přístrojem, a to zcela jiného typu, než jeho „běžný“ časový vývoj. Zatímco v klasické fyzice se předpokládá možnost provést měření tak „šetrně“, aby tato interakce znatelně neovlivnila měřený objekt, v kvantové fyzice je nutno počítat s tím, že v principu každé měření změní měřený objekt. (Jedinou výjimkou je opakované měření, které však zase nepřináší novou informaci o měřeném objektu.)

Stav: vlnová funkce, stavový vektor; reprezentace

Soustava např. 5 klasických částic je popsána $2 \times 3 \times 5 = 30$ funkcemi času t v 3D prostoru, např. jejich polohami $\vec{r}_i(t)$ a hybnostmi $\vec{p}_i$ (jde o vektory, každý má 3 nezávislé složky). Naproti tomu soustava 5 kvantových částic je popsána jedinou **vlnovou funkcí** v prostoru o $5 \times 3 + 1 = 16$ rozměrech: $\Psi(\vec{r}_i, t)$. Tato funkce se též nazývá *stavový vektor*, zejména je-li opravdu reprezentována vektorem – svým rozvojem ve vhodné soustavě ortogonálních funkcí. Je-li tedy $\Psi = \sum_j a_j \psi_j$, kde ψ_j jsou vlastní funkce operátoru $\hat{Q}$, pak se (stavový) vektor a_j nazývá ***Q-reprezentací*** vlnové funkce Ψ . Vlnová funkce je komplexní, komplexní sdružení se značí hvězdičkou: ψ^* , někdy pruhem: $\bar{\psi}$.

U vlnové funkce není podstatná amplituda; funkce ψ a $(-5 + 2i)\psi$ by popisovaly přesně stejný stav. Pracujeme proto většinou s vlnovými funkcemi normalizovanými, zpravidla na jednotku, tj. aby např. $\langle \psi | \psi \rangle = \int \psi^*(x) \psi(x) dx = 1$.

Koherentní směs vlnových funkcí je popsána jejich lineární kombinací: $\psi = \sum a_k \phi_k$. Nejobecnějším popisem kvantového systému je pak *matice hustoty* M_{ik} popisující nekoherentní směs vlnových funkcí.

Veličina: operátor

Každé fyzikální veličině L je přiřazen *operátor*, tedy předpis přiřazující jedné funkci obecně jinou funkci; značí se stříškou: $\hat{L}$. V maticové reprezentaci, kde je vlnová funkce popsána vektorem (v Hilbertově prostoru), je operátor popsán maticí L_{ik} . Střední hodnota $\bar{L}$ veličiny L ve stavu $\psi(x)$ je pak

$$\bar{L} \equiv \langle \psi | \hat{L} | \psi \rangle = \int \psi^*(x) L(x) \psi(x) dx \quad (1.1)$$

Měřitelné fyzikální veličiny L jsou popsány hermitovskými operátory (samosdruženými, $L_{ik} = L_{ki}^*$). Možné naměřitelné hodnoty jsou pak vlastní hodnoty λ_k tohoto operátoru; vlastní funkce ϕ_k vyhovují rovnici

$$\hat{L} \phi_k = \lambda_k \phi_k \quad (\text{nesčítá se přes } k) \quad (1.2)$$

Vlnová funkce ϕ_k popisuje stav mající hodnotu λ_k veličiny L . Při měření veličiny L ve stavu popsaném funkcí $\psi = \sum a_k \phi_k$ dostáváme jako výsledek měření náhodně veličiny λ_k , každou s pravděpodobností $a_k^* a_k$.

Teorie „skrytých parametrů“, předpokládající, že stav „ve skutečnosti“ má nějakou přesnou hodnotu měřené veličiny a že je jen otázkou naší (ne)dokonalosti ji naměřit, se ukázaly z principu nepravdivé a byly vyvráceny i experimentálně (Bellův teorém).

Z nerozlišitelnosti kvantových částic plynou symetrie kladené na jejich vlnovou funkci, viz dále.

Fermiony, bosony; Pauliho vylučovací princip

Kterákoliv z elementárních částic je buď **fermion**, nebo **boson**, podle statistiky (buď Fermiho-Diracova, nebo Boseho-Einsteinova), kterou se řídí. Tytéž částice (např. čtyři elektrony) jsou nerozlišitelné. Jsou popsány jedinou funkcí $\Psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3, \vec{r}_4)$ (zpravidla stručně $\Psi(1, 2, 3, 4)$, nevypisujeme pro jednoduchost možnou závislost na čase t), která je funkcí $4 \times 3 = 12$ proměnných, tedy v 12D prostoru, a tato funkce Ψ při záměně dvou trojic proměnných popisujících dvě vybrané částice téhož druhu (např. 2. a 3.) buď změní znaménko (fermiony, $\Psi(1, 3, 2, 4) = -\Psi(1, 2, 3, 4)$), nebo nezmění (bosony, $\Psi(1, 3, 2, 4) = \Psi(1, 2, 3, 4)$). Z toho plyne pro fermiony **Pauliho vylučovací princip**: dva fermiony v jednom systému nemohou být v tomtéž stavu. To by totiž záměnou dvou stejných fermionů změnila jejich vlnová funkce Ψ znaménko na $-\Psi$, ale vzhledem k nerozlišitelnosti těchto částic by musela zůstat stejná, tedy $\Psi = -\Psi$, takže Ψ by musela být nulová.

Nebylo by na místě zde vykládat kvantovou mechaniku. Ale důkaz, že pro kvantovou částici není jiná možnost než být bosonem nebo fermionem, je tak jednoduchý a názorný, že stojí za uvedení: Zavedme zde operátor $\hat{T}_{23}$ záměny druhé částice s třetí (transpozice) a hledíme vlastní funkce $\psi(1, 2, 3, 4)$ a vlastní hodnoty λ tohoto operátoru, tedy funkce, pro něž vede aplikace operátoru na pouhé vynásobení číslem λ :

$$\hat{T}_{23}\psi(1, 2, 3, 4) \equiv \psi(1, 3, 2, 4) = \lambda\psi(1, 2, 3, 4) \quad . \quad (1.3)$$

Opakovaná aplikace $\hat{T}_{23}$ však vede k původní funkci, tedy

$$\hat{T}_{23}\hat{T}_{23}\psi(1, 2, 3, 4) \equiv \hat{T}_{23}\psi(1, 3, 2, 4) \equiv \psi(1, 2, 3, 4) = \lambda^2\psi(1, 2, 3, 4) \quad , \quad (1.4)$$

odkud plyne

$$\lambda^2 = 1 \quad (1.5)$$

$$\lambda = -1 \quad \text{anebo} \quad \lambda = 1 \quad , \quad (1.6)$$

vlastní hodnota λ operátoru částice je buď -1 a částice je fermion (záměna částic mění znaménko vlnové funkce), anebo $+1$ a částice je boson (záměna částic nemění znaménko vlnové funkce).

Standardní model

Základními prvky hmoty jsou podle současných představ tzv. **standardního modelu** fermiony, a to dvě šestice **leptonů** a **kvarků** (a ke každé částici ještě existuje antičástice s opačným nábojem, značka s pruhem nahoře: k elektronu to je pozitron, $\bar{e} = e^+$, k protonu antiproton $\bar{p} = p^-$). Tabulky shrnují k r. 2016 jejich značky, hmotnosti m (v $\text{MeV}/c^2 \sim 1,783 \times 10^{-36} \text{ kg}$), náboje q a názvy („vůně“). Hmotnost neutron je nepatrná, je však nenulová. Všechny tyto částice jsou fermiony, mají tedy poločíselný spin a platí pro ně Pauliho vylučovací princip.

Kvarky se v přírodě nikdy nevyskytují samostatně, ale jen ve dvojicích nebo trojicích držených spolu **gluony** a bosony W, Z vždy tak, aby výsledná „barva“³ byla neutrální – „bílá“. **Nukleony** (tvořící jádro atomu) a jiné **baryony** (těžší částice) jsou tvořeny trojicemi kvarků (např. **proton** $p^+ = uud$, **neutron** $n = udd$, $\Lambda = uds$, $\Omega^- = sss$), **mezony** jsou tvořeny kvarkem a antikvarkem (pion $\pi^+ = u\bar{d}$, kaon $K^- = s\bar{u}$).

Leptony

zn.	m	q	vůně	zn.	m	q	vůně	zn.	m	q	vůně
e^-	0,511	-1	elektron	μ^-	105,67	-1	mion	τ^-	1 776,8	-1	tauon
ν_e	$< 2,2 \cdot 10^{-6}$	0	e-neutrino	ν_μ	$< 1,7$	0	μ -neutrino	ν_τ	$< 15,5$	0	τ -neutrino

Kvarky

zn.	m	q	vůně	zn.	m	q	vůně	zn.	m	q	vůně
u	2,4	$+\frac{2}{3}$	nahoru up	c	1 275	$+\frac{2}{3}$	půvabný charm	t	172 440	$+\frac{2}{3}$	svrchní top
d	4,8	$-\frac{1}{3}$	dolů down	s	95	$-\frac{1}{3}$	podivný strange	b	4 180	$-\frac{1}{3}$	spodní bottom

Interakce mezi fermiony – a tedy obecně mezi libovolnými hmotnými částicemi – se kvantově vykládá jako výměna bosonů coby kvantovaných polí příslušné interakce. Podle našich znalostí existují čtyři⁴ interakce, z nichž nejslabší, ale v makrosvětě na velké vzdálenosti prakticky jediná významná, gravitační interakce, se popisuje v obecné teorii relativity zakřivením prostoru, tedy geometricky; to bohužel zatím vzdoruje snahám o úspěšné kvantování. Přehledně:

³Tato charakteristika kvarku a gluonu nabývá jedné z hodnot červená, zelená, modrá a samozřejmě nemá s optickou barvou nic společného.

⁴Tzv. **výměnná interakce** není skutečnou interakcí, ale jen názornou interpretací principu nerozlišitelnosti kvantových částic.

jméno interakce	„síla“	dosah	zprostředkuje	důsledek (např.)
gravitační	10^{-40}	makro	??? (graviton)	stabilita sluneční soustavy
elektromagnetická	10^{-2}	makro	γ (foton)	stabilita atomu
silná	10^{+1}	mikro	g (gluon)	stabilita atom. jádra, protonu
slabá	10^{-5}	mikro	W^+, W^-, Z^0	stabilita elementárních částic

Makroskopické interakce: síla klesá se vzdáleností r jako r^{-2} , tedy energie jako $\frac{1}{r}$.

Mikroskopické interakce: závislost energie je jiná: $r e^{-r}$, proto je srovnání jen velmi přibližné. Uvedená hodnota „síla“ je řádová velikost energie na vzdálenost poloměru atomového jádra.

Interakce mezi fermiony jsou popsány kvantovými poli; jejich kvantováním dostáváme rovněž částice, ale *bozony*: pro elektromagnetickou interakci jsou to **fotony** (s nulovou hmotností a bez náboje), pro slabou interakci jsou to částice W (elektricky nabitě) a Z (elektricky nenabitě) s hmotnostmi $80,6 \text{ GeV}/c^2$ a $91,2 \text{ GeV}/c^2$ (tedy cca tisíckrát těžší než proton!), pro silnou interakci mezi kvarky jsou to **gluony** (s nulovou hmotností, elektricky nenabitě) popsané *kvantovou chromodynamikou* QCD.

Interakci elektromagnetickou a slabou se podařilo sjednotit na interakci zvanou **elektroslabá**. **Velké sjednocení** bude její spojení se silnou interakcí (GUT = grand unification theory).

Gravitaci se zatím kvantovat nedaří, lze ji však v obecné teorii relativity popsat geometrií prostoru (gravitace jako zakřivení prostoru). O její spojení se silnou a elektroslabou interakcí se snaží tzv. *teorie všeho* (TOE = theory of everything), např. teorie strun. Problémy: rovnice obecné teorie gravitace jsou výrazně nelineární. Zatím však umíme pohodlně kvantovat jen lineární teorie.

1.5 Filozofie a fyzika (informativní body)

1.5.1 Cesty rozvoje fyziky (indukce vs. dedukce)

Indukce: Konkrétní, jednotlivé zkušenosti zobecňujeme na výroky s obecnou platností. Jejich důsledky pak ověřujeme pozorováním, event. experimentem, abychom teorii potvrdili. (Přesněji řečeno: abychom tím teorii vyvrátili, je-li pozorování s ní v rozporu.) Příklady:

- J. Kepler ze svých pozorování planet induktivně odvodil své **tři Keplerovy zákony** pro pohyb planet.
- Na základě pozorování pádu pozemských těles (legendární jablko) a pohybu těles „nebeských“ (Měsíc) I. Newton induktivně odvodil **Newtonův gravitační zákon** a indukci usoudil, že v „nebeské sféře“ platí stejné zákony jako na Zemi, což byl v té době významný fyzikální i filosofický zlom.
- J. J. Thomson objevil, že katodové záření je tvořeno zápornými částicemi (elektrony) vytrženými z neutrálních atomů. Na základě indukce proto navrhl tzv. pudingový model atomu, v němž elektrony jsou jako záporně nabitě hrozinky plovoucí v kladně nabitém pudingu tvořícím atom látky. Protože se však kladně nabitě α -částice po dopadu na látku občas odrazí do ostrého úhlu zpátky (experimentální vyvrácení představy řídkého kladného pudingu), vyslovil Rutherford domněnku (indukce), že i kladný náboj je v látce nikoli spojitě rozestřen, ale soustředěn do velmi malého jádra atomu, kolem kterého lehký a záporný elektron obíhá, tzv. planetární model atomu.

Dedukce: Z dané soustavy zákonů (principů, v matematice z axiomů) logicky přesně odvodíme zákon nový. (Jeho případné experimentální popření pak popírá nejen nový zákon, ale i výchozí axiomy, případně postup odvození.) Příklad:

- Z Newtonových pohybových zákonů + Newtonova gravitačního zákona lze deduktivně odvodit Keplerovy zákony, a to v obecnějším a přesnějším tvaru, než byly formulovány indukci z pozorování:
 1. vedle eliptických trajektorií přibudou i parabolické a hyperbolické (např. pro komety);
 2. v ohnisku kuželočky je nikoli Slunce, ale hmotný střed soustavy Slunce + planeta.

1.5.2 Zdůvodnění (kauzální, teleologické; statistika)

Kauzální (příčinné) vysvětlení: „Děje se XX (důsledek, teď), **protože** YY (příčina, teď či dříve)“.

- Světlo (ale také částice) se na rozhraní odráží tak, že úhel odrazu = úhel lomu. **Protože** v okamžiku dopadu dopadá pod jistým úhlem, tak se v následujícím okamžiku odráží pod určeným úhlem odrazu.
- Částice se pohybuje pod vlivem síly (příčina, nyní) $\vec{F}$ tak, že její zrychlení $\vec{a}$ (důsledek, nyní) je rovno $\vec{a} = \vec{F}/m$ (odkud získáme $\vec{r}$ pomocí dvojí integrace).

Teleologické (účelové) vysvětlení: „Děje se XX (teď), **aby** YY (cíl, v budoucnosti)“.

- Světlo (ale také částice) se pohybuje při odrazu po **takové** trajektorii, **aby** se z výchozího do cílového bodu dostalo (rychlostí odpovídající místnímu indexu lomu) v co nejkratším čase.
- Částice se pohybuje po takové trajektorii $q(t)$ a takovou rychlostí $\dot{q}(t)$, **aby** při dodržení zákona zachování energie byla minimální akce, tj. integrál

$$\mathcal{A} = \int \mathcal{L}(q(t), \dot{q}(t), t) dt \quad . \quad (1.7)$$

kde lagrangián $\mathcal{L}$ je rozdíl kinetické a potenciální energie částice.

Statistický výklad rovnovážných stavů.

- Popis rovnovážného systému pomocí pravděpodobnostního výkladu dějů. Přejít k rovnováze je přechodem k makrostavu majícímu největší pravděpodobnost (makrostav realizovaný největším počtem mikrostavů). Popis fázových přechodů. Termodynamika. Statistická fyzika.

Vzájemný vztah Mezi kauzálním a teleologickým popisem není v rámci klasické fyziky filozofický rozpor, protože jak mechanika, tak optika je přísně deterministická a není v ní tedy prostor pro vlastní vůli. Oba výklady jsou ve svých důsledcích — jak se ve fyzice dokazuje — ekvivalentní, a jak již bylo ostatně řečeno, fyzika jev svobodné vůle neuvažuje a nezkoumá.

Ve vědách zkoumajících život je naopak zpravidla přirozenější teleologické vysvětlení:

- Zvíře jde na lov, aby se nasytilo.
- Motýli v březovém háji časem zbělají, aby unikli pozornosti predátorů.

Vysvětlení kauzální, s výčtem faktů a případně s použitím statistiky, zní těžkopádně a svou délkou odvádí pozornost jinam:

- Zvíře jde na lov, protože má hlad a protože má k tomu v paměti uloženu zkušenost, že hlad přejde po úspěšném lovu.
- I motýli v březovém háji podléhají přirozenému výběru. Jejich tmavé mutace, pozorujícím predátorem lépe viditelné na bílé kůře břízy, mají nižší pravděpodobnost přežití než světlé. Proto po několika generacích výrazně převládá či úplně přežijí jen světlé mutace motýlů.

Kauzálně založený teoretický fyzik či matematik se o tom lépe poučí např. v úvodních kapitolách v populární verzi učebnice „Úvod do evoluční biologie“, J. Flegl, Praha, Academia 2007.

1.5.3 Klasifikace vědy: fenomenologická, fundamentální

Tato klasifikace je spíše záležitostí historie fyziky a je relativní, tj. v tomto případě závislá na výběru dvou uvažovaných disciplín; sama o sobě by striktně vzato byla snad každá disciplína fenomenologická.

Příklad: při zkoumání jevů „teplo“, „teplota“ apod. je *termodynamika* onou vědou **fenomenologickou**, tedy vycházející jen z popisu těchto jevů a ze zkoumání jejich vzájemných vztahů. Naproti tomu *molekulová fyzika* uvedené jevy převádí na jevy jiné, „hlubší“, totiž na mechanické vlastnosti a chování molekul. Je tedy vůči termodynamice vědou **fundamentální**.

(Ovšem koneckonců i té „nejhlubší vědě“ je vždy nutné něco předpokládat, z toho vycházet a na základě toho vykládat pozorované jevy.)

1.5.4 „Je foton částice nebo vlna?“

Fyzika především popisuje jevy a hledá v jevech zákonitosti. Úspěšnou metodou přitom bývá **redukcionismus**. Jev popisujeme na základě modelu tím, že ho převedeme či rozložíme na souhrn jiných (jednodušších) jevů. Tak např. pohyb Země kolem Slunce převedeme s vyhovující přesností na gravitační zákon a pohybové rovnice pro dva hmotné body. (Chceme-li přesnost zvýšit, vezmeme jiný model, zahrneme další vlivy.) Redukcionismus má ovšem své meze i svá úskalí.

Vyslovíme-li otázku typu „Co je to plyn“, „Co je to hmota“, „Je foton částice nebo vlna?“, „Co je to kvark“, očekáváme úplné převedení daného objektu či jevu na objekty či jevy jednodušší. To jde celkem úspěšně u první otázky: prakticky vždycky nám stačí představa, že plyn je soubor obrovského počtu částic (molekul), které se na nejbližších vzdálenostech (menších než rozměr molekuly) silně odpuzují, na větších vzdálenostech naopak jen slabě přitahují silou klesající jako dipólová interakce. U otázky na podstatu hmoty stačí fakticky jen podat výčet leptonů a kvarků a interakcí mezi nimi, i když to asi zpravidla tazatele moc neuspokojí. U třetí otázky jsou však podsunuty pouhé dva klasické modely, z nichž ani jeden nevyhovuje úplně; foton sám však můžeme výstižně popsat v kvantové elektrodynamice. Otázka typu „**Co je to** kvark“ však v tomto kontextu nemá ani smysl, protože kvark není na co jednoduššího převést. Smysl však má otázka jiná: „**Jak se chová** kvark, když ...“, nebo „Co se stane s protonem (složeným ze 3 kvarků), když ...“, a podobně.

Zjednodušující otázka typu „Co to je ...“ navádí v takovém případě k jednoduché, případně elegantní, ale bezobsažné odpovědi užitím jiných nedefinovaných nebo záměrně vágních pojmů typu „Hmota je nesmírně zhuštěná energie“. (A co je pak ta energie? A z čeho je ta? Jak lze tuto definici použít, co z ní lze odvodit? Lze ji vyvrátit (Popper)?) Takové pseudo-odpovědi se ovšem snažte vyhnout (alespoň nejste-li profesionální politik).

1.5.5 $E = mc^2$ aneb je hmota jen „nesmírně zhuštěná energie“?

Není. Stejně jako z rovnice $s = ct$ pro dráhu s uraženou světlem za dobu t neusuzujeme, že by čas byl jen velice zhuštěný prostor. Ale především, m je **hmotnost**, tedy jen jedna z mnoha **vlastností** hmotného předmětu (jako objem V , náboj q apod.), nikoli hmota sama (**materiál**).

V praxi neměříme „celou“ energii soustavy, ale její přírůstek ΔE před dějem a po něm. Z Einsteinovy rovnice tedy plyne, že zvětšíme nebo zmenšíme-li energii soustavy o ΔE , bude mít soustava o $\Delta m = \Delta E/c^2$ větší či menší setrvačnost a o totéž víc či méně bude gravitačně přitahovat jiné hmotné objekty.

1.5.6 Co s rozpory

Rozpory teorie a přístup k nim:

- Rozpor teorie s praxí:
 - revize měření (Weberovo měření s rychlostí světla cca o 10 % větší; zřejmě šlo o omyl v experimentu);
 - revize toho, která teorie a jak byla použita (např. byl použit příliš zjednodušený model);
 - revize teorie samé (Rozbor Michelsonova-Morleyova pokusu vedl ke vzniku teorie relativity).
- Vnitřní rozpory a nekonzistence teorie.

Neměly by být, ale proces poznávání je opravdu obtížný. Občas jsou známa „bolavá místa“ teorie, kde jistá pragmatická nekonzistentnost je nejjednodušším (přip. zatím jediným známým) řešením. Tak v chemii předkvantového věku byl rozpor v chování celkem velmi stabilního benzenu popsaného jako vysoce nenasycený cyklohexatrien se třemi dvojnými vazbami v uhlíkovém cyklu; teprve kvantová mechanika vysvětlila jeho stabilitu pomocí úplné delokalizace π -elektronů vytvářejících tyto vazby. Podobně o historickém Bohrově modelu vodíku se žertem říkávalo, že podle něj se počítá jedním způsobem v pondělí, středu a pátek, jiným způsobem v úterý, čtvrtek a sobotu, a že v neděli se nepočítá.

1.5.7 Resumé

Víme toho na jednu stranu překvapivě mnoho, ovšem zdaleka ne ani to, co bychom dost urgentně potřebovali. To je samozřejmě docela dobře — je to šance pro mladé fyziky, ale i pro matematiky: Nobelovu cenu za fyziku dostal v roce 1961 matematik Rudolf Ludwig Mössbauer za rezonanční absorpci γ -záření a s tím spojený jev po něm nazvaný.

Kapitola 2

Základní pojmy („mechanikopis“) 2018-07-05

2.1 Literatura

Jde hlavně o připomenutí známých věcí a zasazení do kontextu. Mnohé z toho je v úvodním kurzu **HRW**. Důraz klademe na fyzikální *představy*, v žádném případě memorování vzorců či velký objem látky.

Pro rozšíření lze využít zejména *webové stránky UTF* (Langer, Podolský, Semerák), a dále standardní učebnice teoretické mechaniky.

2.2 Typické matematické pojmy v různých přístupech

Vektorová (newtonovská) mechanika:

Připomeňme, že **vektorový** počet $\{vector\ algebra\}$ i **infinitesimální** počet (limita, derivace, integrál) $\{calculus\}$ se vyvíjely souběžně s mechanikou a ve svých počátcích byly vytvořeny víceméně „na zakázku“ pro ni.

Derivace $\{derivative\}$: Grafický význam: určuje směrnici tečny. Fyzikální význam: derivace podle času $\{time\ derivative\}$ dává obecně rychlost $\{speed\}$, $\{velocity\}$ pro změnu délky, např. $v = ds/dt$, $\{rate\}$ pro jiné: rychlost koroze, růstu krystalu daná např. derivací dm/dt apod.). Derivace podle *prostorových souřadnic* dává hustotu $\{density\}$, např. hustotu hmotnosti (dm/dV) zvanou obvykle jen „hustota“, hustotu energie apod.; pečlivěji o hustotě viz str. 20.

Parciální derivace, např. $(\partial f / \partial x)_{y,z} \equiv \partial f(x, y, z) / \partial x$ zavádíme při více nezávislých proměnných, např. při popisu pole.

Integrál („spojitý součet“). Určitý integrál $\int_a^b f(x)dx$ udává pro $f \geq 0$ obsah plochy pod křivkou $f(x)$ od $x = a$ do $x = b$. Primitivní funkce (integrál jako funkce horní meze) $\int_a^x f(\xi)d\xi = F(x)$, často psáno $F(x) = \int f(x)dx$; potom platí $dF(x)/dx = f(x)$ („opak derivace“).

Analytická mechanika, kvantová fyzika:

Funkcionál přiřazuje funkci číslo. Typická úloha: která funkce minimalizuje daný funkcionál a vyhovuje přitom jistým podmínkám (např. ve dvou bodech má dané funkční hodnoty)?

Variace δf funkce f . Variační počet zkoumá vliv malé změny δf průběhu funkce f na vhodný funkcionál (např. na akci, rov. (1.7)).

Transformace $\mathcal{T}(f) = g$ přiřazuje funkci g k funkci f .

Operátor $\hat{L}$, např. $\hat{L}(f) = g$ rovněž přiřazuje funkci g k funkci f .

2.3 Základní fyzikální pojmy a termíny (připomenutí)

2.3.1 Rámec popisu; terminologie

- **prostor** $\{space\}$, **3D-prostor**¹; 3D kontinuum. Polohu v něm určuje **polohový vektor** $\vec{r}$;
oblast $\{domain\}$, **3D-doména** je 3D část prostoru (objekt, nikoli veličina);

¹3D je běžná zkratka za „trojrozměrný“; podobně 2D atp.

objem V $\{volume\}$ je jedna z veličin charakterizujících oblast – její míra (dalšími charakteristikami oblasti jsou např. poloha jejího těžiště, hranic, geometrický tvar apod.);

plocha $\{surface\}$, **2D-doména** je 2D část prostoru (objekt, nikoli veličina);

povrch $\{surface\}$, **hladina** je plocha, někdy jen myšlená, oddělující dva objekty;

obsah A $\{area\}$ je veličina charakterizující plochu, míra plochy.

- **čas** $\{time\}$ (1D kontinuum). Slovo „čas“ se často používá v různých blízkých významech, nedorozumění zpravidla nehrozí. Přesto pro úplnost uvádíme:

okamžik $\{instant\}$ je bod na časové ose (objekt, nikoli veličina);

časový údaj, **datum** t $\{date\}$ je veličina charakterizující okamžik. Užívá se **počáteční čas** t_i $\{initial\ time\}$, **koncový čas** t_f $\{final\ time\}$;

(časový) **interval** $\{interval\}$ je úsek na časové ose (objekt v technice a klasické mechanice; v STR a OTR se však užívá i pro veličinu, „čtverec intervalu“);

doba, **doba trvání** Δt $\{duration\}$ je jedna z veličin charakterizujících časový interval.

Speciálně pro „hodinu“ rozlišují angličtina i němčina *časový údaj* (it is 5 o'clock, es ist 5 Uhr) od *doby* (during 5 hours, innerhalb 5 Stunden); čeština nikoli (pro obojí slouží „hodina“: je 5 hodin, během 5 hodin).

- **prostorčas** $\{spacetime\}$ (4D) je sjednocením prostoru a času (v STR a OTR).

Sv. Augustin v „De tempore“ („O čase“) odpovídá na otázku, co to je čas: když se mne neptáte, vím, co to je; když se mne zeptáte, nevím.) To ovšem nevysvětlí pojem času, ale ilustruje potíže s definicemi právě těch nejzákladnějších pojmů, kdy již „není z čeho vycházet“. Výkladem pojmu či jevu rozumíme jeho převedení na pojmy a vztahy pokládané na dané úrovni za známé, tj. nevysvětlované hlouběji, nanejvýš přiblížené příkladem; viz kap. 1.5.4.

2.3.2 Zkoumané objekty

- **prostředí** $\{medium\}$ je nejobecnější pojem pro vše, co je rozloženo v prostoru a má nějakou fyzikálně podstatnou vlastnost; může to být hmota (látka), pole (např. elektromagnetické) i vakuum;

- **látka** $\{matter\}$; **hmota** $\{mass\}$ (vs. pole): materiál, z něhož je vytvořena většina objektů, které ve fyzice sledujeme. Termín *látka* se užívá zpravidla tam, kde je hmotnost materiálu málo podstatná (např. v elektrostatice: látkové prostředí vs. vakuum).
- **substance** $\{substance\}$: Látku zpravidla pokládáme za *substanci*, tj. za něco, co trvá, nevzniká ani nezaniká a jehož části se nanejvýš jen přesunují v prostoru. Matematickým vyjádřením této vlastnosti (zachování substance v lokálním tvaru) je *rovnice kontinuity* pro hustotu ρ substance:

$$\operatorname{div}(\rho \vec{v}) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 . \quad (2.1)$$

- **kontinuum** $\{continuum\}$ je deformovatelné, spojitě prostředí. To může být v jednom ze tří skupenství:
- **skupenství** $\{state\}$ je pevné, kapalné nebo plynné. Ostřejší dělení dává fáze:
- **fáze** $\{phase\}$ je homogenní prostředí fyzikálně odlišitelné od jiné fáze, např. dvě krystalické modifikace, třeba i téže látky (CaCO_3 : vápenec a aragonit). Různá skupenství vytvářejí vždy různé fáze.

Specifika různých skupenství:

- * **pevná látka** $\{solid\}$, s, má jistý tvar, ale obecně je schopná deformace (otázky pružnosti, pevnosti).

Pod vlivem malé konstantní síly se pevné těleso deformuje, tj. jeho části získají v rovnovážném stavu jinou *polohu*, ale pak zůstanou v *klidu*.

Mikroskopicky: molekuly v typické pevné látce jsou uspořádány pravidelně až do značných vzdáleností.

Populárně řečeno: molekuly jsou „v dotyku“ v jisté rovnovážné poloze. Pevná látka má proto vysokou hustotu, je málo stlačitelná a je soudržná.

- * **kapalina** $\{liquid\}$, l, neudrží smykové napětí („nebrání se stříhání“).
Je málo soudržná – pod vlivem i malé stálé síly (tíže) převezme tvar nádoby, v níž se nachází, při zachování svého objemu, případně pod vlivem **povrchového napětí** zaujme kulovitý tvar.
Pod vlivem konstantní síly získá v rovnovážném stavu jistou *rychlost* (závislou na vazkosti, tj. vnitřním tření v kapalině), a pohybuje se tedy stále dál („teče“).
Má zpravidla jen o málo nižší hustotu a je trochu více stlačitelná než pevná látka.
Ideální kapalina $\{ideal liquid\}$ se pokládá za nestlačitelnou a bez vnitřního tření (vazkosti, viskozity).
Mikroskopicky: molekuly v typické kapalině jsou pravidelně uspořádány jen do malých vzdáleností.
Populárně řečeno: molekuly jsou skoro v dotyku, ale kloužou po sobě jako hladká zrnka písku.
 - * **plyn** $\{gas\}$, g, také získá pod vlivem konstantní síly v rovnovážném stavu jistou *rychlost*. Plyn má řádově $1000\times$ menší hustotu než kapalina či pevná látka, není soudržný (vyplní celý prostor nádoby) a je-li v uzavřeném prostoru, je celkem snadno stlačitelný. (Na druhou stranu, vzduch v otevřeném ovzduší se za obvyklých rychlostí cca do 30 m/s pohybuje jako prakticky nestlačitelný.)
Mikroskopicky: molekuly v plynu jsou rozloženy chaoticky a ve velkých vzdálenostech (za obvyklých podmínek asi $10\times$ více, než je jejich vlastní velikost).
Populárně řečeno: molekuly rychle létají (více než rychlostí zvuku) a jsou od sebe asi desetkrát dál, než je jejich vlastní velikost; kromě vlastního okamžiku srážky na sebe buď nepůsobí vůbec (**ideální plyn** $\{ideal gas\}$), nebo se slabě přitahují (**neideální plyn** $\{non-ideal gas\}$).
 - * **kondenzovaná fáze** $\{condensed matter\}$ je společný název pro *pevnou látku* a *kapalinu* (obě mají vysokou hustotu a malou stlačitelnost).
 - * **tekutina** $\{fluid\}$ je společný název pro *kapalinu* a *plyn* (obě mají chaotickou mikroskopickou strukturu).
 - * **kritický stav** $\{critical state\}$ (daný teplotou t_{kr} , tlakem p_{kr} , molárním objemem $V_{m\ kr}$ či hustotou $\rho_{kr} = M_m/V_{m\ kr}$) je stav, v němž mizí rozdíl mezi plynem a kapalinou. Blíže v termodynamice.
 - * **superfluidní stav** $\{superfluid state\}$: plyn stlačený tak, že má hustotu kapaliny.
- **těleso** $\{body\}$ je prostorově vymezená část látky. V daném čase je určena poloha každé jeho části v prostoru.
 - **individualita vs. nerozlišitelnost** $\{indistinguishability\}$: U těles zpravidla předpokládáme, že mají svou individualitu, tj. nejsou to **nerozlišitelné** $\{indistinguishable\}, \{indiscernible\}$ objekty, jako vlna na vodě, kvantové částice, text na displeji PC. Např. při srážce dvou stejných klasických částic lze po srážce odlišit, která byla která, zatímco u vln na vodě, u kvantových částic či u obrázků na displeji taková otázka ztrácí smysl.
 - **charakteristiky tělesa: „míra hmoty“**
 - * **hmotnost** $\{mass\}$ $m > 0$, $[m] = 1\text{ kg}$ je v mechanice nejčastější mírou.
Poznámky:
 - „Hmotnost jako míra množství hmoty“ – vhodné pro fyziku, nikoli pro filosofii. Klidová hmotnost se v TR nezachovává, pohybová hmotnost je různá v různých inerciálních soustavách. Vhodnější mírou je *látkové množství* s jednotkou mol (značka rovněž mol).
 - Setrvačná hmotnost: vyskytuje se ve vztahu $\vec{F} = m\vec{a}$;
 - Gravitační hmotnost: ve vztahu $|\vec{F}| = G\frac{m_1m_2}{r^2}$, $G \approx 6,67 \cdot 10^{-11}\text{ m}^3\text{ kg}^{-1}\text{ s}^{-2}$.
 - Rovnost setrvačné a gravitační hmotnosti je v klasické mechanice náhodná shoda, stává se významnou v obecné teorii relativity.
 - * **látkové množství** $\{amount of matter\}$ N , $[N] = 1\text{ mol}$ je výstižnější mírou zejména tam (např. v termodynamice), kde se vyšetřuje i změna hmoty (např. chemickými reakcemi);
 - * **objem** $\{volume\}$ V , $[V] = 1\text{ m}^3$ (za daného tlaku a teploty) je výhodný pro měření v praxi, zejména kapalin.

- **Hustota:** Hustota $\rho(\vec{r})$ hmotnosti m je definována tak, aby hmotnost dm infinitezimální oblasti $d\Omega$ kolem bodu určeného polohou $\vec{r}$ o objemu dV byla rovna $dm = \rho dV$.
Obecně: hustota $q(\vec{r})$ aditivní veličiny Q (lhostejno, zda skalární, vektorové atp.) je definována tak, aby $dQ = q(\vec{r})dV$, kde dQ je celková hodnota veličiny Q v infinitezimální oblasti $d\Omega(\vec{r})$ o objemu dV kolem bodu $\vec{r}$. Častý zápis derivací $q(\vec{r}) = \frac{dQ}{dV}$ může snadno mást (např. v termodynamice), pak je nutné vyjasnit souvislost V a závislosti V na $\vec{r}$.
- **Některé speciální druhy těles:**
 - * **hmotný bod** $\{mass\ point\}$ (HB) je nejjednodušší těleso: jeho vlastní rozměry můžeme v dané úloze zanedbat a je tedy popsán hmotností ($m > 0$) a polohou v čase: $\vec{r} = \vec{r}(t)$. Pro zjednodušení textu ho zde nazýváme často **částice**;
 - * **soustava N hmotných bodů**; příklady:
 - planety kolem svého slunce;
 - hmotné body s vazbami $\rightarrow$ pákové mechanismy; tuhé těleso.
 Pro $N \rightarrow \infty$: kontinuum; molekulová fyzika; statistická fyzika;
 - * **tuhé těleso** $\{rigid\ body\}$: takové těleso, které se může přemísťovat, ale nedeformuje se (v dané úloze), tj. vzájemné vzdálenosti jeho částí se s časem nemění, bez ohledu na event. působící síly.
 - * **deformovatelné** $\{deformable\}$ těleso, **kontinuum** $\{continuum\}$:
 - **elastické** $\{elastic\}$, vrací-li se do původního tvaru poté, co síly přestaly působit,
 - **plastické** $\{plastic\}$, zůstává-li po působení sil trvalá deformace.

2.3.3 Vlivy působící na zkoumané objekty

- **síla** $\{force\}$ popisuje vnější působení na těleso. Síla může měnit polohu částí tělesa v prostoru (pohyb) nebo i jejich polohu navzájem (deformace). Síla je matematicky popsána vektorem: $\vec{F}$. U částice a soustavy částic viz *vázaný* vektor, u tuhého tělesa *klouzavý* vektor.
- **pole, silové pole** $\{field\}, \{force\ field\}$: $\vec{F} = \vec{F}(\vec{r}, t)$, popis spojitě rozloženého silového působení.
- **vazba** $\{constrain\}$, které je těleso podrobena, omezuje jeho pohyb. Nechceme se přitom zabývat tím, jak je realizována (zda je těleso přivázáno, ve žlábkku, na kolejkách apod.), ale tím, jak se toto omezení projeví na pohybu tělesa prostorem. Pro úlohy s vazbami je zvláště vhodná analytická mechanika.

2.4 Přístup

V klasické mechanice jsou dva základní přístupy: vektorová (newtonovská²) mechanika vs. analytická mechanika (např. Lagrangeův či Hamiltonův formalismus).

- **vektorová (newtonovská) mechanika** $\{Newtonian\ mechanics\}$ používá **pohybové rovnice** $\{laws\ of\ motion\}$, které určují časovou změnu fyzikálních veličin popisujících části zkoumaných objektů (zpravidla diferenciální rovnice podle času t). Umožňují tak předpovídat (predikovat) jejich chování v časovém vývoji. Veličiny mají charakter vektorů (poloha, rychlost, síla);
- **analytická mechanika** $\{analytical\ mechanics\}$ formuluje **principy** $\{principle\}$, což jsou obecné výroky o vztazích či o chování fyzikálních veličin popisujících soustavu, natolik mohutné, aby v dané oblasti fyziky umožnily určit stav systému či jeho vývoj. Tyto veličiny jsou skalární a mají rozměr energie (lagranžián, hamiltonián). Viz kap. 9.

2.4.1 Porovnání: vektorová (newtonovská) mechanika

vykládá chování mechanických systémů (pohyb, rovnováha apod.) užitím základních pojmů

- **hmotný bod** (částice), **tuhé těleso** (TT), **těleso**;
- **síla** (působící na částici);

²Zde je na místě rozlišit *Newtonovu* mechaniku, tj. skutečné, historicky věrné Newtonovy formulace a ideje, a *newtonovskou mechaniku*, tj. pojetí, které se z těchto idejí vyvinulo jistým směrem v dalším rozvoji.

Nepoužívá se pojem **vazba** (které je objekt podroben), ale podle **principu uvolnění** se doplní **vazbová síla** takového směru a velikosti, aby výsledný pohyb vyhovoval vazbě.

Pohyb popisují pohybové rovnice – 2. Newtonův zákon (zákon síly): časová změna hybnosti $\vec{p} = m\vec{v}$ hmotného bodu je rovna výslednici $\sum \vec{F}$ sil, které na hmotný bod působí.

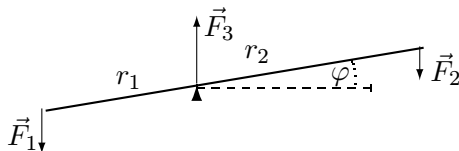
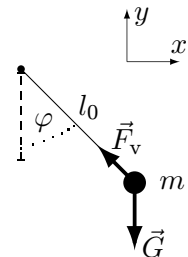
Rovnováha tělesa nastane, jsou-li výsledná síla a výsledný moment sil na něj působící nulové.

¶ Veličiny popisující soustavu, např. síla, polohový vektor, rychlost, hybnost, zrychlení, ... jsou matematicky popsány vektory; odtud označení „vektorová mechanika“. Newton ve svých Principiích jako první podal systematický výklad mechaniky s užitím zejména diferenciálního počtu, který pro tento účel vytvořil.

1. příklad: Matematické kyvadlo v rovině – hmotný bod o hmotnosti m na nehmotné tyči délky l_0 . Na bod působí dvě síly: jednak tíže $\vec{G} = (0, -mg)$, jednak vazbová síla $\vec{F}_v = (2\lambda x, 2\lambda y)$ vystihující vazbu $x^2 + y^2 - l_0^2 = 0$. K vyřešení problému řešíme soustavu 2 rovnic pro 2 neznámé $\vec{r}, \lambda$ (neboli po rozepsání do složek 4 rovnice pro 4 neznámé x, y, z, λ):

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{G} + \vec{F}_v \quad ; \quad r^2 - l_0^2 = 0 \quad (2.2)$$

(Vazbová síla $\vec{F}_v$ zde realizuje potřebnou dostředivou sílu $\vec{F}_d = m\omega^2\vec{r}$; toho lze použít pro zjednodušení řešení). Analytický přístup je naznačen v kap. 2.4.2.



2. příklad: Rovnováha na páce. Páku můžeme vyšetřovat čistě newtonovsky jako tuhé těleso; rovnováha nastane právě tehdy, bude-li rovna nule i výsledná síla, i výsledný moment sil. Odtud

$$\vec{F}_3 = -(\vec{F}_1 + \vec{F}_2) \quad (2.3)$$

$$F_1 r_1 \cos \varphi = F_2 r_2 \cos \varphi . \quad (2.4)$$

I pro tuto úlohu je analytický přístup naznačen v následující kap. 2.4.2.

2.4.2 Porovnání: analytická mechanika

zkoumá mechanický objekt spíše jako celek, popisovaný vhodně zvolenými **zobecněnými proměnnými** (nejen souřadnice, ale třeba i úhel). Formuluje různé principy, popisující jeho chování, např. (zjednodušeně):

- **princip virtuální práce**, resp. **virtuálních posunutí** (infinitesimálních, splňujících vazby):
Soustava je v rovnováze, je-li práce vtištěných sil vykonaná při virtuálním posunutí nulová.
- d'Alembertův princip: I dynamický vývoj soustavy lze popsat principem virtuálních prací, *doplníme-li ke vtištěným silám síly „setrvačné“*, tj. člen $(-m\vec{a})$ ze 2NZ. Protože $\vec{a} = \ddot{\vec{r}}$, přejdou tím algebraické rovnice na diferenciální, ale přístup zůstává stejný.
- Hamiltonův princip: Mezi všemi myslitelnými pohyby, splňujícími tytéž podmínky počáteční a koncové, je skutečným pohybem takový, při němž *časový integrál z lagranžiánu* $L(\vec{r}, \vec{v}, t) = E_k - E_p$ (tj. rozdílu kinetické a potenciální energie) *nabývá minimální hodnoty*.

Obecně ovšem principy nemohou vést k odlišným výsledkům ani navzájem, ani ve srovnání s vektorovým popisem a (např.) s Newtonovými pohybovými rovnicemi. Jejich tvar a formulace však

- mohou být v konkrétních případech podstatně výhodnější či nevýhodnější jak pro popis zkoumaného systému, tak i pro proces jeho řešení, tj. zpravidla nalezení rovnovážného stavu či popisu časového vývoje pro nás zajímavých parametrů;
- mohou umožňovat snadnější rozšíření do nových oblastí mechaniky či fyziky vůbec;
- umožní najít nejlepší aproximaci na třídě funkcí, do níž skutečné řešení nemusí patřit.

Někdy umožní zodpovědět globální otázku (např. stability řešení), aniž musíme detailně počítat celý dlouhý časový vývoj soustavy.

Veličiny charakterizující systém v analytické mechanice (např. energie, lagranžián, hamiltonián) jsou skalární a mají rozměr energie.

1. příklad: Matematické kyvadlo z předchozí úlohy bychom analyticky řešili např. zavedením polárních souřadnic r, φ , kde vazba je identicky splněna podmínkou $r = l_0$. Protože rovnovážná poloha bude pro $y = -l_0$, bude zřejmě výhodné odečítat úhel φ od této polohy, tedy např. zavést $x = r \sin \varphi$, $y = -r \cos \varphi$. Pomocí neznámé souřadnice φ vyjádříme potenciální energii $E_p = -mgl \cos \varphi$ a kinetickou energii $E_k = \frac{1}{2}ml_0^2\dot{\varphi}^2$, z nich lagranžián $L(\varphi, \dot{\varphi}) = E_k - E_p$ a z něj pomocí tzv. *Lagrangeových rovnic 2.druhu* pohybovou rovnici

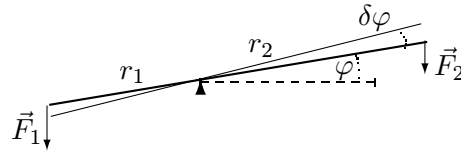
$$ml_0^2\ddot{\varphi} + mgl_0 \sin \varphi = 0. \quad (2.5)$$

Jiný přístup: Analytické ideji je rovněž blízký postup, kdy vycházíme ze zákonů zachování. Zde (1D případ) postačí jediný zákon zachování, např. energie:

$$E_0 = \frac{1}{2}mv^2 + mgy = \frac{1}{2}ml_0^2\dot{\varphi}^2 - mgl_0 \cos \varphi, \quad (2.6)$$

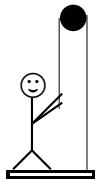
což můžeme též získat z výše uvedené rovnice vynásobením $\dot{\varphi}$ a jednoduchou integrací.

2. příklad: Rovnováha na páce. Při vyšetřování páky **principem virtuální práce** si představíme malý pohyb soustavy kolem rovnovážné polohy (o úhel $\delta\varphi$) a spočteme vykonanou práci; poloha bude rovnovážná, je-li úhrnná vykonaná práce rovna nule:



$$\delta A = F_1 r_1 \cos \varphi \delta\varphi - F_2 r_2 \cos \varphi \delta\varphi = 0; \text{ tedy } F_1 r_1 = F_2 r_2. \quad (2.7)$$

To vede samozřejmě k témuž výsledku jako dříve, ale jinou cestou a s jinou interpretací.



Obrázek vedle ukazuje příklad obtížný k řešení newtonovským přístupem (nezmýlit se ve volbě sil): liftboy stojící na desce drží sám sebe i s deskou přes pevnou vnější kladku. Analyticky se však řeší snadno: potažením lana o 2 cm zvedne liftboy desku o 1 cm, k udržení stačí tedy síla poloviční vůči tíze desky i s ním.

Obojí pojetí je užitečné i mimo mechaniku, např. v teorii pole. Analytický popis lze zpravidla snadněji zobecňovat (systém je popsán jedinou veličinou).

2.5 Matematický aparát: vektorová algebra

Tato kapitola (i následující) *není* výkladem. Spíš *shrnuje a připomíná* užívaný aparát a označení.

Vektorová algebra {*vector algebra*} se zabývá algebraickými operacemi s vektory.

2.5.1 Skalár α

Skalár³ {*scalar*} nabývá *jediné číselné* hodnoty. Příkladem může být teplota, energie, hmotnost, z geometrie třeba délka úsečky, objem tělesa. Rovněž čísla sama, jako $-7, 25$; $1 - 2i$; π apod., pokládáme za skaláry.

Skalární veličina ve fyzice má rozměr neboli dimenzi (délka L, hmotnost M, energie $L^2T^{-2}M$, teplota Θ , ...). Rozměrem se v této kapitole nezabýváme; jím se zabývá **veličinový kalkulus** {*quantity calculus*}. V dalším bereme skalární veličiny též prostě jako skaláry.

Veličiny s rozměrem 1 (přesněji: je to nikoli *číslo* 1, ale *neutrální dimenze* $L^0T^0M^0I^0 \Theta^0N^0J^0$ ve veličinovém kalkulu) se nazývají trochu nevhodně **bezrozměrové** {*dimensionless*}, {*unit with dimension 1*}. Z jazykového hlediska připomeňme, že **bezrozměrný** objekt (bod v geometrii) má nikoli rozměr 1, ale *počet* rozměrů 0.

V teoretické fyzice zužujeme pojem skalár na takovou veličinu, která se navíc nemění při změně vztažné soustavy (tj. zůstává invariantní při transformaci souřadnic). V tomto pojetí je tedy velikost vektoru $v = |\vec{v}|$ skalár, ale složka vektoru F_x nebo energie E nikoli, třebaže jsou popsány jediným číslem (s rozměrem).

³lat. scala = žebřík, schody, „škála“; skaláry nabývají takových hodnot, které lze uspořádat do řady.

Pseudoskalár $\{pseudoscalar\}$ je skalární veličina, která při inverzi jedné prostorové osy změní znaménko, např. orientovaný objem $V = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$.

Skaláry budeme zde ve vzorcích značit malými řeckými písmeny: α, β, γ .

V konkrétních aplikacích můžeme být samozřejmě vázáni jinými zvyklostmi co do označení skaláru.

Součet skalárů $\alpha + \beta$, rozdíl $\alpha - \beta$. Součin nejčastěji prostým zápisem po sobě $\alpha\beta$, případně hvězdičkou $\alpha * \beta$ tam, kde by mohlo dojít k nedorozumění (např. součin dvou čísel: $3 * 2\pi$).

Tečku $(\alpha \cdot \beta)$ a křížek $(\alpha \times \beta)$ ponecháme pro jiné účely, totiž pro skalární a vektorový součin vektorů.

Připomeňme, že násobení skalárů je:

- komutativní: $\alpha * \beta = \beta * \alpha$ resp. $\alpha\beta = \beta\alpha$ $\{commutativity\}$
- asociativní: $(\alpha * \beta) * \gamma = \alpha * (\beta * \gamma)$ resp. $(\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma)$ $\{associativity\}$
a lze je tedy psát i bez závorek:
 $\alpha * \beta * \gamma$ resp. $\alpha\beta\gamma$
- distributivní: $\alpha * (\gamma + \delta) = \alpha * \gamma + \alpha * \delta$ resp. $\alpha(\gamma + \delta) = \alpha\gamma + \alpha\delta$ $\{distributivity\}$
 $(\alpha + \beta) * \delta = \alpha * \delta + \beta * \delta$ resp. $(\alpha + \beta)\delta = \alpha\delta + \beta\delta$

Skalární funkce $\{scalar\ function\}$: nabývá číselné hodnoty (s event. rozměrem). Např. teplota T se může měnit s časem t : je tedy funkcí času, $T = T(t)$.

Pole $\{field\}$: funkce, závisící na prostorových souřadnicích. Příklad skalárního pole: teplota ovzduší T závisící na souřadnicích x, y a nadmořské výšce z , tedy $T = T(x, y, z) = T(\vec{r})$ (ev. dalších parametrech: $T = T(\vec{r}, t, \alpha)$). **Ekviskalární** čáry, příp. plochy (vrstevnice, izobary, izotermy, ekvipotenciální plochy apod.), jsou takové, na nichž je hodnota příslušného skaláru konstantní.

2.5.2 Vektor $\vec{v}$

Zde pracujeme hlavně s **kartézskou soustavou** $\{cartesian\ coordinate\ system\}$ určenou počátkem O soustavy $\{origin\}$, jímž procházejí tři navzájem kolmé osy x, y, z , resp. x_1, x_2, x_3 .

Vektor $\vec{v}$ $\{vector\}$ popisujeme buď **složkově**: trojice⁴ čísel $\{v_1; v_2; v_3\}$, resp. $\{v_x; v_y; v_z\}$ s definovanými operacemi rovnosti a sčítání (= skládání), nebo **geometricky**, tj. **směrem a velikostí**. (Není-li výslovně řečeno jinak, rozumí se směr vždy orientovaný.) S ortonormální bází $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ pak značíme $\vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k}$. Obecnou křivočarou bází (souřadnice kovariantní a kontravariantní) jen zmíníme na str. 26 a str. 102.

V teoretické fyzice zužujeme pojem vektor na takovou veličinu, která se navíc při změně vztažné soustavy transformuje jako infinitezimální posunutí $d\vec{r}$.

Pseudovektor $\{pseudovector\}$ při inverzi jedné prostorové osy nezmění znaménko, např. úhlová rychlost $\vec{\omega}$ či magnetická indukce $\vec{B}$ (při jeho definici musíme užít nějakou konvenci typu pravidla pravé ruky apod.). Někdy se pseudovektor nazývá **axiálním** vektorem $\{axial\ vector\}$, „obyčejný“ vektor pak **polárním** vektorem $\{polar\ vector\}$.

Tři čísla a_k jsou tedy **souřadnice** $\{coordinate\}$ vektoru $\vec{a}$, tři vektory $a_k\vec{e}_k$ se nazývají **složky** $\{component\}$ vektoru $\vec{a}$. Tyto termíny se často zaměňují, zpravidla to však nevede k nedorozumění.

Polohový vektor $\{position\ vector\}$ $\vec{r}$ popisuje *bod* v prostoru – svůj „koncový bod“. U jiného než polohového vektoru – např. u rychlosti $\vec{v}$ či síly $\vec{F}$ – nemá „koncový bod“ geometrický smysl. Viz str. 31.

Nulový vektor $\{zero\ vector\}$ $\vec{0}$. Složkově: $\vec{0} = \{0; 0; 0\}$. Geometricky: velikost 0, směr nedefinován⁵.

Jednotkové vektory $\{unit\ vectors\}$ často značíme⁶ $\vec{e}$, někdy ho značíme exponentem 0, tedy např. $\vec{a}^0 = \vec{a}/a$ pro nenulový vektor $\vec{a}$. Platí $|\vec{e}| = 1$. Slouží mj. k určení směru v prostoru.

Jednotkové vektory ve směru os x, y, z se občas značí $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$.

Rovnost $\{equality\}$ vektorů $\vec{a}, \vec{b}$: složkově $a_k = b_k$; geometricky: stejné velikosti $a = b$, pro $a \neq 0$ i stejné směry (viz poznámku pod čarou: běžně řekneme „stejně velikosti a stejné směry“).

⁴Z pedagogických důvodů zde pro vektor v rozepsaném složkovém zápisu (3 složky v 3D, 2 složky v 2D) užívám jen složené závorky $\{ \}$. Běžně se užívají i kulaté $()$, i hranaté $[]$. Při popisu v různých soustavách $\mathcal{S}', \mathcal{S}''$ značíme pro rozlišení i závorku: $\{ \}'$, $\{ \}''$, např. v kap. 8.

⁵V praxi lze nulovému vektoru přiřadit libovolný směr, který nám v úloze vyhovuje. Zjednoduší se tím často formulace některých výroků, kde výsledkem může být nulový vektor; viz dále „Rovnost“.

⁶Z něm.: Einheitsvektor.

Sčítání {*addition*} (na SŠ **skládání**) vektorů: po složkách resp. pravidlo rovnoběžníka. Sčítání vektorů je komutativní, asociativní, existuje nulový prvek $\vec{0}$, opačný prvek (k vektoru $\vec{v}$ vektor $-\vec{v}$).

Odčítání {*subtraction*}: přičítání opačného prvku. Odčítání není asociativní, je antikomutativní.

Násobení {*multiplication*} vektoru skalárem: je distributivní v obou smyslech, tj.

$$(a + b)\vec{v} = a\vec{v} + b\vec{v} \quad (2.8)$$

$$a(\vec{v} + \vec{w}) = a\vec{v} + a\vec{w} \quad (2.9)$$

2.5.3 Vektorové pole; siločáry

Vektorové pole {*vector field*} $\vec{v}$ je funkce přiřazující každému bodu $\vec{r}$ dané oblasti Ω vektor $\vec{v}(\vec{r})$.

Vektorové pole lze zobrazit **siločárami**, přesněji **vektorovými liniemi** {*force line*} všude, kde je $\vec{v} \neq \vec{0}$. Každým bodem pole prochází právě jedna siločára vystihující svou tečnou *směr* $\vec{v}^0$ pole v tomto bodě. K vystižení navíc *velikosti* $|\vec{v}|$ pole lze použít *hustotu* siločar: zvolíme jednu siločáru, elementární plochu $d\vec{\Sigma}$ kolmou k ní, skrz $d\vec{\Sigma}$ nechť prochází N siločar; pak hustota $N/d\Sigma$ určuje číselnou hodnotu velikosti pole v oblasti $d\vec{\Sigma}$. Tyto (vybrané) siločáry ovšem už nemusí být spojitě (budou nespojitě v oblasti Ω' , když $\text{div } \vec{v}(\vec{r}) \neq 0$ pro $\vec{r} \in \Omega'$).

2.5.4 Geometrické a složkové pojetí vektoru

V geometrickém pojetí je vektor určen svou velikostí {*magnitude*} $r \geq 0$ a (orientovaným) směrem {*direction*} pro $r > 0$.

Ve složkovém pojetí má vektor tři kartézské složky; značíme je indexy. Indexy nazýváme

- **volný index** {*free index*} a_i ; podobně v tenzoru: $a_k b_j$, T_{klmn} apod.
- **sčítací index** {*summation index*}, {*dummy index*} $\sum_{k=1}^3 a_k b_k$; lze pro něj užít jakékoli ve členu dosud neužité písmeno.

1. Index vyskytující se ve členu jen *jednou* je volný; index vyskytující se *dvakrát* je sčítací; index vyskytující se *tříkrát* či vícekrát je chybný.

2. V jiných než kartézských souřadnicích, kde je potřeba rozlišovat složky kovariantní a kontravariantní (viz str. 26), je vždy jeden ze sčítacích indexů kovariantní a druhý kontravariantní.

Einsteinova konvence {*Einstein convention*} pro sčítací index se vynechává značka součtu a píše se stručně $a_k b_k \equiv \sum_{k=1}^3 a_k b_k$.

2.5.5 Součiny vektorů

Kroneckerovo delta {*Kronecker delta*}: $\delta_{ik} = 1$ pro $i = j$, $\delta_{ik} = 0$ pro $i \neq j$.

Pozor, $\delta_{ii} = 3$, nikoli 1! Proč? (Einsteinova sčítací konvence).

Levi-Civitův symbol {*Levi-Civita symbol*}: ε_{ikl} , úplně antisymetrický.

$$\varepsilon_{123} = \varepsilon_{231} = \varepsilon_{312} = 1; \quad \varepsilon_{321} = \varepsilon_{213} = \varepsilon_{132} = -1; \quad \text{pro ostatní } i, j, k \text{ platí } \varepsilon_{ijk} = 0. \quad (2.10)$$

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{pqr} = \delta_{ip}\delta_{jq}\delta_{kr} + \delta_{iq}\delta_{jr}\delta_{kp} + \delta_{ir}\delta_{jp}\delta_{kq} - \delta_{ip}\delta_{jr}\delta_{kq} - \delta_{iq}\delta_{jp}\delta_{kr} - \delta_{ir}\delta_{jq}\delta_{kp} \quad (2.11)$$

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ipq} = \delta_{jp}\delta_{kq} - \delta_{jq}\delta_{kp} \quad (2.12)$$

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ijp} = 2\delta_{kp} \quad (2.13)$$

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ijk} = 6 \quad (2.14)$$

Mezi dvěma vektory $\vec{v} \equiv v_i$, $\vec{w} \equiv w_k$ zavádíme tři druhy součinů:

skalární {*scalar product*}, {*inner product*}, {*dot product*}: výsledkem je skalár $\alpha = \delta_{ik}v_iw_k = v_iw_i$.

vektorový {*cross product*}, {*vector product*}: výsledkem je vektor (přesněji: pseudovektor, kap. 2.5.2)
 $b_i = \varepsilon_{ijk}v_jw_k$;

přímý (neboli **direktní**, **tenzorový**, **dyadický**) {*direct product*}, {*dyadic product*} výsledkem je tenzor 2. řádu: $T_{ij} = v_iw_j$

Součiny lze aplikovat i na tenzory libovolných řádů; pro skalární součin zůžeme přímý součin s Kroneckerovým δ_i^k , pro vektorový zůžeme přímý součin s Levi-Civitovým ε_{ijk} . Násobení dvou čísel je jejich přímý součin, násobení vektoru skalárem je přímý součin skaláru a vektoru.

Asociativita

- u skalárního součinu $\vec{a} \cdot (\vec{b} \cdot \vec{c})$ nemá smysl, a rovněž obecně⁷ $\vec{a}(\vec{b} \cdot \vec{c}) \neq (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c}$;
- u vektorového součinu smysl sice má, ale neplatí: obecně $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) \neq (\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}$
- přímý součin je asociativní: $a_i(b_j c_k) = (a_i b_j)c_k = a_i b_j c_k$.

Komutativita

- skalární součin je komutativní, $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a} = a_i b_i$
- vektorový součin je antikomutativní, $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a} = \varepsilon_{ijk} a_j b_k$
- přímý součin není ani komutativní, ani antikomutativní: obecně $a_i b_j \neq a_j b_i$

Distributivní zákon platí pro všechny tři součiny. Zejména platí

$$(\alpha + \beta)\vec{v} = \alpha\vec{v} + \beta\vec{v} \quad \alpha(\vec{v} + \vec{w}) = \alpha\vec{v} + \alpha\vec{w} \quad (2.15)$$

$$\vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \times \vec{v} + \vec{u} \times \vec{w} \quad \vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w} \quad (2.16)$$

Smíšený součin *{scalar triple product}* $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]$ udává objem rovnoběžnostěnu. Platí

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b} \cdot (\vec{c} \times \vec{a}) = \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) \quad (2.17)$$

$$= (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = (\vec{b} \times \vec{c}) \cdot \vec{a} = (\vec{c} \times \vec{a}) \cdot \vec{b} \quad (2.18)$$

Dvojnásobný vektorový součin *{vector triple product}* *{Lagrange's formula}*

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b} (\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c} (\vec{a} \cdot \vec{b}) \quad (2.19)$$

Řešení rovnic Předpokládejme známý vektor $\vec{a} \neq 0$. Jestliže

$$\vec{a} \cdot \vec{v} = \gamma, \quad (2.20)$$

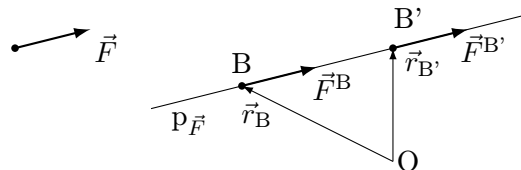
$$\vec{a} \times \vec{v} = \vec{b}, \quad (2.21)$$

$$\text{pak} \quad \vec{v} = \frac{1}{a^2} (\vec{a}\gamma - \vec{a} \times \vec{b}) = \vec{v}_{\parallel} + \vec{v}_{\perp} \quad (2.22)$$

Interpretace: rozklad vektoru $\vec{v}$ na složku $\vec{v}_{\perp}$ kolmou k $\vec{a}$ a složku $\vec{v}_{\parallel}$ rovnoběžnou s $\vec{a}$.

2.5.6 Volný, vázaný, klouzavý vektor

Pojem vektoru rozšiřujeme v mechanice tuhého tělesa (str. 85) tímto postupem:



- **Volný vektor** $\vec{F}$ je dosavadní vektor, tj. veličina určená velikostí a orientovaným směrem, skládající se podle pravidel vektorového počtu.

⁷Ve formulacích tohoto typu má slovo „obecně“ stejný význam jako v běžném jazyce „Různí lidé mají obecně různá jména“, i když nevylučujeme, že lze najít třeba dva Jany Nováky.

- **Vázaný vektor**⁸ $\vec{F}^B$ je dvojice volný vektor $\vec{F}$ a bod B, nazývaný **umístěním vektoru** $\vec{F}$, případně **působištem**, jde-li o sílu. Bod B může být zadán svým polohovým vektorem $\vec{r}_B$.

Libovolná algebraická operace $\otimes$ mezi vázanými vektory $\vec{F}^B$ a $\vec{G}^C$ má smysl jen tehdy, když $B = C$; pak je jejím výsledkem

$$\vec{F}^B \otimes \vec{G}^B = (\vec{F} \otimes \vec{G})^B. \quad (2.23)$$

- **Klouzavý vektor** $\langle \vec{F}^B \rangle$ (síla působící na TT) je třída ekvivalentních ($\sim$) vázaných vektorů s tímž volným vektorem $\vec{F}$ a s umístěním B' kdekoli na vektorové přímce $p_{\vec{F}}$ vektoru $\vec{F}$. Označíme-li $\vec{F}_0$ jednotkový vektor se směru vektoru $\vec{F}$, pak libovolný bod B' definovaný vztahem

$$\vec{r}_{B'} = \vec{r}_B + \lambda \vec{F}_0 \quad (2.24)$$

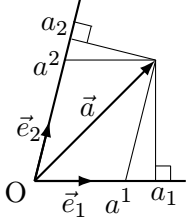
pro libovolné λ může být použit jako umístění pro klouzavý vektor:

$$\vec{F}^B \sim \vec{F}^{B'} \text{ neboli } \langle \vec{F}^B \rangle = \langle \vec{F}^{B'} \rangle. \quad (2.25)$$

Kovariantní a kontravariantní souřadnice, složky

Zvolme, obecně v n -rozměrném prostoru, n lineárně nezávislých **bázových vektorů** $\{\text{base vectors}\}$; nemusí být jednotkové, nemusí být k sobě kolmé. Značme je $\vec{e}_k$, **kovariantní bázové vektory**. Čísla $a_k = \vec{a} \cdot \vec{e}_k$ se nazývají **kovariantní souřadnice** $\{\text{covariant coordinate}\}$ vektoru $\vec{a}$. Jestliže vektor $\vec{a}$ rozložíme na $\vec{a} = \sum_k a^k \vec{e}_k$, pak čísla a^k se nazývají **kontravariantní souřadnice** $\{\text{contravariant coordinate}\}$ vektoru $\vec{a}$.

Jak známo, ke kovariantní bázi $\vec{e}_k$ existuje vždy jediná **kontravariantní báze** $\vec{e}^k$ taková, že $\vec{a} = \sum_k a_k \vec{e}^k$ a platí $a^k = \vec{a} \cdot \vec{e}^k$. Vztah mezi kovariantní a kontravariantní bázi je popsán **metrickými tenzory** $g^{\mu\nu}$, resp. $g_{\mu\nu}$, kde



$$a^2 = \sum_{i,k} g_{ik} a^i a^k = \sum_{i,k} g^{ik} a_i a_k = \sum_k a_k a^k \quad (2.26)$$

Rozlišení indexů na horní (kontravariantní) a dolní (kovariantní) se užívá ovšem i u tenzorů libovolného kladného řádu: T_{klm}^{ij} . Zde se dále zabýváme jen ortonormálními (kartézskými) souřadnicemi. V nich jsou vektory báze jednotkové a navzájem kolmé; pak $\vec{e}_k = \vec{e}^k$, $a_k = a^k$ a není nutno rozlišovat veličiny kovariantní od kontravariantních. Jsou nezbytné např. v obecné teorii relativity.

2.5.7 Tenzor T_{ij} ; $T_{i,\dots,k}$; $T_{m,\dots,n}^{i,\dots,k}$

O kovariantních indexech (dole) a kovariantních (nahore) v zápisu $T_{m,\dots,n}^{i,\dots,k}$ jsme se zmínili výše; protože v tomto skriptu užíváme jen kartézské souřadnice, nerozlišujeme je a píšeme zde zpravidla jen dolní indexy.

Řád tenzoru je počet jeho volných indexů. *Skalár* je tenzor řádu 0, *vektor* je tenzor řádu 1. Tenzor 2. řádu můžeme zapsat maticí, tenzor libovolného řádu n zpravidla zapisujeme složkově, tedy jako $T_{\underbrace{i,j,\dots,k}_n}$.

Nulový tenzor $\{\text{zero tensor}\}$ má všechny prvky rovny nule: $T_{ik} = 0$ pro všechny i, k .

Tenzor je **symetrický** $\{\text{symmetric tensor}\}$ ve dvojici indexů i, k , když $T_{\dots i, \dots k, \dots} = T_{\dots k, \dots i, \dots}$, např. δ_{ik} . Někdy značíme $T_{(ik)}$.

Úplně symetrický tenzor $\{\text{completely symmetric tensor}\}$, $\{\text{totally symmetric tensor}\}$ je symetrický v každé dvojici indexů.

Tenzor je **antisymetrický** $\{\text{antisymmetric tensor}\}$ ve dvojici indexů i, k , když $T_{\dots i, \dots k, \dots} = -T_{\dots k, \dots i, \dots}$. Někdy značíme $T_{[ik]}$.

Úplně antisymetrický tenzor $\{\text{completely antisymmetric tensor}\}$, $\{\text{totally antisymmetric tensor}\}$ je antisymetrický v každé dvojici indexů, např. ε_{ijk} .

⁸Vzájemné rozlišení těchto vektorů není obecně kodifikováno a vyrozumí se (nebo by se aspoň mělo vyrozumět) z kontextu. V tomto místě používáme $\vec{F}^B$ pro vázaný a $\langle \vec{F}^B \rangle$ pro klouzavý vektor.

Nenulový tenzor nemůže být v jednom páru indexů symetrický a v druhém se společným indexem antisymetrický: je-li $T_{(ij)k}$ a také $T_{i[jk]}$, pak $T_{ijk} = 0$ pro všechna i, j, k .

Úžení *{tensor contraction}* tenzoru ve dvojici indexů i, k snižuje řád tenzoru o 2: $T_{\dots i \dots k \dots} \delta_{ik} = T_{\dots j \dots j \dots}$.

2.6 Matematický aparát: vektorová analýza

Rovněž tato kapitola *není* výkladem, pouze *připomíná* užívaný aparát a označení.

Ve vektorové analýze *{vector calculus}* derivujeme vektory. Užíváme následující značky:

2.6.1 Parciální derivace (∂)

Parciální derivace *{partial derivative}* $\partial_i f \equiv \frac{\partial f}{\partial x_i}$ je pro funkci $f(x_k)$ více proměnných prostě derivací podle i -té proměnné; ostatní proměnné se uvažují na x_i nezávislé (často se to vyjadřuje poněkud matoucími slovy „při konstantních $x_k, k \neq i$ “; tím se rozumí, že ostatní proměnné se nemění během limitního procesu derivace podle x_i .)

Kroucené „ ∂ “ oproti prostému „ d “ prostě jen varuje, že jde o funkci více proměnných⁹. V matematice, zvláště jsou-li vypsány proměnné u derivované funkce, se často ani nepoužívá. Ve fyzice je hlavně klíčové k odlišení od totálního diferenciálu při časové derivaci.

Vždy však musí být jasno, které jsou ty „ostatní“ proměnné. Někdy se vypisují jako indexy u závorek (v termodynamice), tedy např.

$$\frac{\partial f(V, T)}{\partial T} \equiv \left(\frac{\partial f}{\partial T} \right)_V \quad (2.27)$$

Bez nich by zápis nedával smysl.

2.6.2 Operátor nabla (∇)

Nabla *{nabla}, {del operator}* je vektorový operátor¹⁰ $\vec{\nabla} \equiv \left\{ \frac{\partial}{\partial x}; \frac{\partial}{\partial y}; \frac{\partial}{\partial z} \right\} \equiv \{\partial_x; \partial_y; \partial_z\}$, složkově ∂_i .

2.6.3 Gradient (grad, ∇)

Přímý součin nabla a argumentu φ se nazývá **gradient** φ *{gradient}*: $\vec{u} = \text{grad } \varphi \equiv \vec{\nabla} \varphi$, neboli $u_k = \partial_k \varphi$. Gradient zvyšuje řád tenzoru o 1, tedy skaláru φ přiřadí vektor $\vec{u}$, kde $u_i = \partial_i \varphi$.

Je-li $T(\vec{r}, t)$ pole teploty, udává **grad** $T(\vec{r}_0, t)$ směr největšího růstu teploty T v místě $\vec{r}_0$ v čase t . Vrstevnice na mapě je **ekviskalární** křivka $h(x, y) = h_0$ k funkci „nadmořská výška“ $h(x, y)$. Spádnicе zobrazuje směr jejího 2D gradientu.

2.6.4 Totální derivace (d)

Totální neboli **úplná derivace** *{total derivative}, {full derivative}* veličiny q , zpravidla podle času, značí se $\frac{dq}{dt}$, podle Newtona tečkou nad písmenem: $\dot{q}$; jde totiž o derivaci podle *jediné* proměnné t . Ve fyzice a v technice se užívají zápisy

$$\dot{q} = \dot{q}(\vec{r}, t) = \frac{dq(\vec{r}, t)}{dt} = \frac{\partial q}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial q}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial q}{\partial z} \frac{dz}{dt} + \frac{\partial q}{\partial t} = \text{grad } q \cdot \vec{v} + \frac{\partial q}{\partial t} = \vec{v} \cdot \nabla q + \frac{\partial q}{\partial t} \quad (2.28)$$

což není matematicky korektní: fyzikálně jde sice o tutéž veličinu, ale je vyjádřena v různých proměnných ($q(t)$ vs. $q(x, y, z, t)$), a také jde o proměnnou jednou závislou, podruhé nezávislou ($x(t)$ vs. x). Matematicky korektní (ale neužívaný) zápis ukážeme na následujícím příkladu.

⁹ Asi jako množné číslo v gramatice. Japonština se umí obejít i se samotným jednotným číslem.

¹⁰ Omlouvám se čtenáři za své pedantství, se kterým píšu šipku i nad nablou, na tabuli dokonce i nad gradientem a rotací, protože to jsou vektory. Obvykle se to nedělá, ale příslušné značky se tisknou tučně, což je na tabuli obtížné.

Příklad: Po rybníce plave loďka, má souřadnice $x(t)$, $y(t)$. Dá-li se rybník vypouštět, je v něm v místě $\{\xi, \eta\}$ na čase t závislá hloubka $h = h(\xi, \eta, t)$. Údaj $q(t)$ sonaru měřícího hloubku pod loďkou se s časem mění. Rychlost $\dot{q}(t)$ změny údaje sonaru s časem je rovna

$$\dot{q} = \frac{dq}{dt} = \frac{\partial h}{\partial \xi} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial h}{\partial \eta} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial h}{\partial t} . \quad (2.29)$$

Ve fyzice a v technice se obvykle ztotožňují $q \equiv h$, $z \equiv \xi$, $y \equiv \eta$.

Obvyklé názvy v technice:

$$\begin{aligned} \dot{q} \equiv \frac{dq}{dt} &= \underbrace{\frac{\partial q}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial q}{\partial y} \dot{y} + \frac{\partial q}{\partial z} \dot{z}} + \frac{\partial q}{\partial t}, \quad \text{neboli} \\ \frac{dq}{dt} &= \vec{v} \cdot \mathbf{grad} q + \frac{\partial q}{\partial t} . \end{aligned} \quad (2.30)$$

Člen $\frac{dq}{dt}$ se nazývá **úplná** čili **totální derivace**; v našem příkladu popisuje změnu údaje sonaru.

Člen $\vec{v} \cdot \mathbf{grad} q$ se nazývá **konvekční** čili **proudová derivace**; je dán pohybem loďky a profilem dna.

Člen $\frac{\partial q}{\partial t}$ se nazývá **lokální** čili **místní derivace** a popisuje „vypouštění rybníka“.

Detaily k této rovnici viz Kalkul.

2.6.5 Součiny operátoru nabla; aplikace

Derivuje-li vektorový operátor $\vec{\nabla}$ tutéž veličinu, na kterou se váže coby vektor příslušným součinem, užívají se pro něj speciální názvy:

divergence {*divergence*} při skalárním součinu: $\beta = \text{div } \vec{v} \equiv \vec{\nabla} \cdot \vec{v}$ neboli $\beta = \delta_{jk} \partial_j v_k = \partial_i v_i$.

Je-li $\vec{v}(\vec{r}, t)$ rychlost plynu v místě $\vec{r}$ v čase t , udává $\text{div } \vec{v}$ vydatnost vzniku (zdroj, zřídlo, při negativní hodnotě nor) plynu v místě $\vec{r}_0$ v čase t .

rotace {*curl*} při vektorovém součinu: $\vec{a} = \mathbf{rot} \vec{v} \equiv \vec{\nabla} \times \vec{v}$ {*curl v*}, neboli $a_i = \varepsilon_{ijk} \partial_j v_k$.

Je-li $\vec{v}(\vec{r}, t)$ rychlost plynu v místě $\vec{r}$ v čase t , udává $\mathbf{rot} \vec{v}$ svým směrem osu v prostoru, kolem které se má tendenci plyn točit (tvořit vír). V anglofonních zemích namísto **rot** užívají značku **curl** $\vec{v}$.

gradient {*gradient*} ve všech ostatních případech: $\mathbf{grad} \Theta$; $(\vec{a}_1 \cdot \mathbf{grad})(\vec{a}_2 \cdot \mathbf{grad}) \varphi$.

Gaussova věta (též Gaussova-Ostrogradského) {*divergence theorem*}:

$$\iiint_{\Omega} \text{div } \vec{v} dV = \iint_{\partial\Omega} \vec{v} \cdot d\vec{n} \quad (2.31)$$

Stokesova věta {*curl theorem*}, {*Kelvin-Stokes theorem*}:

$$\iint_{\Sigma} \mathbf{rot} \vec{v} d\Sigma = \oint_{\partial\Sigma} \vec{v} \cdot d\Gamma \quad (2.32)$$

Laplaceův operátor neboli **laplacián** {*Laplacian*} Δ je skalární součin nabla sama se sebou:

$$\Delta \equiv \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} = \frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2}{dy^2} + \frac{d^2}{dz^2} \quad (2.33)$$

Pro aplikaci na skalár φ bývá vhodný tvar $\Delta\varphi \equiv \text{div } \mathbf{grad} \varphi$.

Pro aplikaci na vektor $\vec{v}$ bývá vhodné užít relaci $\mathbf{rot} \mathbf{rot} \vec{v} = \mathbf{grad} \text{div } \vec{v} - \Delta\vec{v}$.

2.6.6 Popis pole ve fyzice

Pole φ (gravitační, elektrostatické) se zdrojem hustoty ρ vyhovuje vztahu

$$\Delta\varphi \sim -\rho ; \quad (2.34)$$

součinitel úměrnosti závisí jen na volbě jednotek pro φ a ρ .

Pole φ v oblasti beze zdrojů ($\Delta\varphi = 0$) splňuje **větu o střední hodnotě**:

$\varphi(\vec{r}_0)$ je rovno střední hodnotě z $\varphi(\vec{r})$, kde $\vec{r}$ určují povrch koule se středem v $\vec{r}_0$, tedy

$$\varphi(\vec{r}_0) = \frac{1}{4\pi a^2} \int_{\Gamma_a} \varphi(\vec{r}) d\vec{r}, \quad (2.35)$$

kde Γ_a je povrch koule o poloměru a a středu v $\vec{r}_0$.

Existenční věta: Znalost $\Delta \vec{u}$ uvnitř oblasti Ω + hraniční podmínky na hranici Ω určují $\vec{u}$ uvnitř celé oblasti Ω jednoznačně.

Odtud plyne: Znalost $\mathbf{rot} \vec{u}$ a $\operatorname{div} \vec{u}$ uvnitř oblasti Ω + hraniční podmínky na hranici $\partial\Omega$ určují pole $\vec{u}$ uvnitř celé oblasti Ω jednoznačně.

Kapitola 3

Kinematika hmotného bodu

2018-07-05

3.1 Předmět kinematiky

Kinematika se zabývá jen *popisem* geometrie pohybu (poloha, čas, rychlost...), tedy *bez* zřetele k *příčinám* pohybu. Neužívá a nepotřebuje proto pojmy jako síla, hmotnost, hybnost, energie ...

3.2 Základní pojmy

3.2.1 Vztažná soustava

Polohu objektu určujeme vzhledem k jiným tělesům zvaným **referenční tělesa** *{reference points}*. Abstrakcí z referenčních těles dostáváme pojem **referenční systém** neboli **vztažná soustava** *{reference frame}*. *{frame of reference}*. Zde budeme používat především **kartézskou** vztažnou soustavu *{Cartesian frame of reference}* se třemi na sebe kolmými osami x, y, z *{axis; pl. axes}* a jednotkovou bází *{set of basis vectors}*, obvykle značenou $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$ nebo $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$. Poloha bodu v okamžiku t je určena jeho polohovým vektorem $\vec{r}(t) = \{x; y; z\}$, viz dále.

Newton předpokládal existenci „absolutního prostoru“ a „absolutního času“ jakožto referenční soustavy pro své zákony. V současném pojetí klasické mechaniky stačí k těmto jakákoli z inerciálních soustav (viz kap. 4.4.4).

Řadu úloh z kinematiky, zejména v souvislosti se změnami vztažné soustavy, lze výhodně znázornit (a často tím i vyřešit) graficky, viz kap. B.1. Dvě úlohy probereme zde na konci, v kap. 3.6.3.

Problematickou přechodu popisu mezi (inerciálními) vztažnými soustavami při všech rychlostech, i blízkých světelné rychlosti, se zevrubně zabývá speciální teorie relativity, kap. 8.

3.2.2 Poloha

Polohový vektor *{position vector}* (str. 23) se zpravidla značí $\vec{r}$ (z lat. radius, paprsek), ale jeho souřadnice x, y, z nebo x_1, x_2, x_3 . Poloha se mění s časem (= pohyb v užším smyslu): $\vec{r} = \vec{r}(t)$.

Posunutí *{displacement}*

$$\Delta\vec{r} := \vec{r}_f - \vec{r}_i \quad (3.1)$$

je definováno jako vektor rozdílu koncové (finální) a počáteční (iniciální) polohy bodu.

Elementární posunutí $d\vec{r}$ (též **infinitesimální**) je popsáno diferenciálem polohového vektoru: $d\vec{r} \equiv d(\vec{r})$. Má rovněž charakter vektoru. Použití: např. $d\vec{r} = \frac{d\vec{r}}{dt}dt = \vec{v}dt$. Častá je obrazná interpretace „dva sousední body“ (rozumí se velmi blízké z hlediska úlohy).

3.2.3 Trajektorie

Trajektorie *{trajectory}*, *{flight path}* je **křivka** *{curve}* Γ , kterou bod během svého pohybu prochází, tedy množina všech koncových bodů polohového vektoru $\vec{r}(t)$ pro jistý časový interval, tj. pro všechna $t \in (t_1, t_2)$. Může být zadána např. parametricky: $x = x(p)$, $y = y(p)$, $z = z(p)$. Často se užívají parametrizace časem ($p \equiv t$) a parametrizace uraženou dráhou ($p \equiv s$, tzv. přirozená parametrizace, např. kilometrovníky na silnici, krejčovský metr).

Tečna $\{tangent\}$, $\{tangent\}$ křivky v daném bodě B je limitou **sečen**, $\{secant\}$, $\{secant\}$ jejichž dva společné body s křivkou se blíží bodu B. Jednotkový **tečný vektor** $\{tangent\}$, $\{unit\}$ je

$$\vec{\tau} := \frac{d\vec{r}}{ds} \quad ; \quad |\vec{\tau}| = 1 \quad . \quad (3.2)$$

Derivací $\vec{\tau} \cdot \vec{\tau} = 1$ dostaneme $0 = \frac{d(\vec{\tau} \cdot \vec{\tau})}{dt} = 2\vec{\tau} \cdot \dot{\vec{\tau}}^0$; derivace $\vec{\tau}$ je na $\vec{\tau}$ kolmá.

Normála $\{normal\}$, $\{normal\}$ je přímka kolmá na tečnu k trajektorii ležící v rovině dané vektory $\vec{\tau}$ a $\dot{\vec{\tau}}$. Má proto směr stejný jako $\dot{\vec{\tau}}$. Pro jednotkový vektor $\vec{\nu}^0$ ve směru normály platí

$$\vec{\nu}^0 = \frac{d\vec{\tau}}{ds} \quad . \quad (3.3)$$

Binormála $\{binormal\}$ je ve 3D přímka kolmá k tečně i k normále. Jednotkový vektor:

$$\vec{\beta} := \vec{\tau} \times \vec{\nu} \quad . \quad (3.4)$$

3.2.4 Délka křivky, dráha

Element délky křivky určíme podle Pythagorovy věty:

$$(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2 \quad (3.5)$$

např. pro křivku danou vztahy $y = y(x)$, $z = z(x)$ je

$$ds = |dx| \sqrt{1 + y'^2 + z'^2} \quad . \quad (3.6)$$

Dráha $\{length\}$ $\{of\}$ $\{curve\}$ s (= délka křivky) $s = \int_{s_1}^{s_2} ds = s_2 - s_1$, je závislá na procházené trajektorii Γ , nejen na koncovém a počátečním bodě (jako *posunutí*, str. 31).

Někdy se užívá slova dráha volně, ve smyslu trajektorie: „Dráhy planet jsou elipsy“.

3.2.5 Rychlost $\vec{v}$, posuvná rychlost

$$\vec{v} := \dot{\vec{r}} \equiv \frac{d\vec{r}}{dt} \quad . \quad (3.7)$$

Rychlost $\{velocity\}$ je definována pro jistý bod a podle definice (3.7) je vektorem. Pro velikost rychlosti $v = |\vec{v}|$ užívá angličtina termín $\{speed\}$; čeština bohužel takové rozlišení nemá. V zadání fyzikální úlohy proto píšeme raději „Auto jede rychlostí o velikosti 50 km/h“.

Plný termín **posuvná rychlost** užíváme, chceme-li zdůraznit, že nejde o rychlost úhlovou apod.

3.2.6 Zrychlení $\vec{a}$

Zrychlení $\{acceleration\}$ je definováno opět pro bod, jako časová změna jeho rychlosti:

$$\vec{a} := \dot{\vec{v}} = \ddot{\vec{r}} \quad (3.8)$$

Rozklad zrychlení na **tečnou** $\vec{a}_t$ a **normálovou** $\vec{a}_n$ složku:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{ds} \frac{ds}{dt} = v\vec{\tau}^0 \quad ; \quad (3.9)$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv}{dt}\vec{\tau}^0 + v\frac{d\vec{\tau}^0}{dt} = \frac{dv}{dt}\vec{\tau}^0 + v\frac{d\vec{\tau}^0}{ds}\frac{ds}{dt} = \underbrace{\frac{dv}{dt}\vec{\tau}^0}_{\vec{a}_t} + \underbrace{\frac{v^2}{R}\vec{\nu}^0}_{\vec{a}_n} \quad (3.10)$$

Význam: $\vec{a}_t$ popisuje *změnu velikosti* rychlosti, $\vec{a}_n$ popisuje *změnu směru* rychlosti.

3.3 Poloha a rychlost obecných objektů

Poloha $\vec{r}$, rychlost $\vec{v} = \dot{\vec{r}}$ i zrychlení $\vec{a} = \ddot{\vec{r}}$ atd. byly jasně definovány pro bod. Lze je zobecnit i na jiné objekty (poloha tělesa), které ani nemusejí být substancí (fázová rychlost vlny či moiré obrazce). Definice pak ovšem musí být dosti obezřetná, nejde o „samozřejmost“. Připomeňme, že rychlost vlny na vodě, co do velikosti i směru, nesouvisí s pohybem částic tvořících tuto vodu (korek na hladině rybníka kmitá jen nahoru a dolů, zatímco vlna přeběhne od jednoho kraje rybníka ke druhému).

Jsou prakticky dvě možnosti tohoto zobecnění:

- objekt lze pro danou úlohu popsat jediným bodem (např. těleso nahrazené svým hmotným středem nebo metacentrem). Pak lze snadno mluvit o jeho poloze, rychlosti, zrychlení;
- zavedeme v jednom okamžiku každém bodě $\vec{r}$ dané oblasti uvažovanou charakteristiku Q (fáze vlny, polohu „částičky“ objektu mající individaulitu), stanovíme novou polohu $\vec{r}'$, kterou tato charakteristika má za infinitezimální dobu dt a odtud určíme **rychlostní pole**

$$\vec{w}(\vec{r}) := \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{dt} \quad (3.11)$$

které přiřadíme veličině Q .

Pokud ve druhém případě je $\vec{w}(\vec{r})$ táž pro všechna $\vec{r}$ v dané oblasti („rychlostní pole je homogenní“), lze mluvit přímo o rychlosti veličiny Q bez zavedení pole; to je případ fázové rychlosti rovinné vlny. Výběr veličiny Q vůbec není samozřejmý např. při pokusu o definici rychlosti šíření tepla vedením (kondukcí). Není na místě zde rozebírat detaily, ale je třeba o tomto úskalí obecně vědět.

3.4 Úhlové veličiny

Úhlové veličiny se uplatňují např. při popisu pohybu tuhého tělesa (kap. 7.2) nebo při problému dvou těles (kap. A). Vždy existuje *význačný bod* O (počátek souřadnic, těžiště tělesa, ...), *orientovaná osa* o jím procházející, kolem které probíhá otáčení a *orientovaný směr*, od kterého měříme úhel φ (na Zemi k základnímu poledníku, Greenwich).

Úhlová poloha φ (častěji: **natočení otočení**)
je charakterizována dvěma veličinami:

- úhlem φ ;
- orientovanou osou otočení (s orientací např. dle pravidla pravé ruky).

Pozor, dvojice $[\varphi_i; \mathbf{o}_i]$ se jako vektor $\vec{\Omega}_i$ chová **jen** ve dvou případech:

- otáčení kolem pevné osy o libovolný úhel φ_i , pokud se poloha osy nemění ani vůči tělesu, ani vůči okolí (tj. $\mathbf{o}_i = \mathbf{o}_k$ pro všechna i, k), nebo
- infinitezimální otočení $d\varphi_i$ (kolem libovolné osy $\mathbf{o}_i$).

V ostatních případech **nelze** takové otočení popsat vektorem (součet dvou otočení závisí na pořadí, není tedy komutativní na rozdíl od sčítání vektorů).

Úhlová rychlost $\vec{\omega}$

Definice:

$$\text{velikost } \omega := \dot{\varphi}, \text{ směr } \vec{\omega} \text{ je dán osou rotace.} \quad (3.12)$$

Úhlová rychlost je vektor, protože byla zavedena z *infinitezimálního*, nikoli konečného otočení. (Přesněji řečeno, jde o pseudovektor, kap. 2.5.2).

Úhlové zrychlení $\vec{\varepsilon}$

Definice:

$$\vec{\varepsilon} := \dot{\vec{\omega}} \quad (3.13)$$

3.5 Plošné veličiny

Plošné veličiny se uplatňují např. při problému dvou těles (kap. A).

Plošná rychlost $\vec{w}$

Definice:

$$\vec{w} := \lim_{t' \rightarrow t} \frac{1}{2} \frac{\vec{r}(t) \times \vec{r}(t')}{t' - t} = \frac{1}{2} \vec{r} \times \vec{v}. \quad (3.14)$$

Závisí na volbě počátku O .

Plošné zrychlení $\dot{\vec{w}}$

Definice:

$$\dot{\vec{w}} := \frac{1}{2} \vec{r} \times \vec{a} \quad (3.15)$$

Závisí rovněž na volbě počátku O .

3.6 Více vztažných soustav

3.6.1 Problematika

Úlohy, v nichž jsou dílčí vztahy popsány v různých vztažných soustavách, je potřeba převést do jediné. V klasické mechanice je nejobecnější přechod mezi dvěma *inerciálními* soustavami (tj. v nichž se souřadnice každé volné částice mění lineárně s časem, str. 39) popsán dále uvedenou Galileovou transformací; popisu v neinerciální soustavě a převodu do ní se věnujeme v kap. 6.

Vedle přímého výpočtu je, zvláště pro odhad či výklad, vhodná názorná grafická metoda (kap. B); je ostatně vhodná i pro kinematické úlohy v teorii relativity (kap. B.1.5). Její ilustrativní použití následuje v kap. 3.6.3.

3.6.2 Galileova transformace

Uvažujme dvě inerciální soustavy $\mathcal{S}$, $\mathcal{S}'$, které mají rovnoběžné odpovídající osy a jsou **synchronizovány** *{synchronisation}* tak, že prostorový počátek v $\mathcal{S}$ v okamžiku $t = 0$ byl rovněž prostorovým počátkem v $\mathcal{S}'$ v okamžiku $t' = 0$. Jestliže

- v obou měříme stejně konstruovanými měřidly (abychom měli stejné jednotky)
- jistá událost nastane v $\mathcal{S}$ v okamžiku t a má souřadnici $\vec{r}$
- téže události odpovídá v $\mathcal{S}'$ okamžik t' a souřadnice $\vec{r}'$
- $\mathcal{S}'$ má vůči $\mathcal{S}$ rychlost $\vec{V}$,

pak platí

$$\begin{aligned} \vec{r}' &= \vec{r} - \vec{V}t & (\text{Galileova transformace}) \\ t' &= t \end{aligned} \quad (3.16)$$

a pokud se soustava $\mathcal{S}'$ pohybuje vůči $\mathcal{S}$ jen podél osy x , a to rychlostí V , pak

$$\begin{aligned} x' &= x - Vt & (\text{speciální Galileova transformace}) \\ y' &= y \\ z' &= z \\ t' &= t \end{aligned} \quad (3.17)$$

Pokud soustavy synchronizovány nejsou (např. v soustavách se měří podle různých časových pásem), a víme jen, že jistá událost, která nastala v $\mathcal{S}$ v okamžiku t_0 v souřadnici $\vec{r}_0$ měla v $\mathcal{S}'$ v okamžiku t'_0 souřadnici $\vec{r}'_0$, pak se rov. (3.16) jen mírně pozmění:

$$\begin{aligned} \vec{r}' - \vec{r}'_0 &= (\vec{r} - \vec{r}_0) - \vec{V}(t - t_0) \\ t' - t'_0 &= t - t_0 \end{aligned} \quad (3.18)$$

Pro rychlost $\vec{v} = d\vec{r}/dt$ a zrychlení $\vec{a} = d\vec{v}/dt$ platí univerzálně

$$\vec{v}' = \vec{v} - \vec{V} \quad (3.19)$$

$$\vec{a}' = \vec{a} \quad (3.20)$$

3.6.3 Zdroj signálu v pohybující se soustavě

Jako ukázkou zde vyřešíme dvě situace, kdy periodický děj je popsán v jiné vztažné soustavě než v té, kterou bychom chtěli použít. Dobrodružný čtenář může řešit, jak se z hlediska pronásledujícího policejního auta jeví bandité, kteří za jízdy střílejí a houkají sirénou. Dopad střel a zvuku bude jistě různý z různých hledisek; my si všimneme jen jednoho – fyzikálního, a to změny frekvence (tj. kadence zbraně, resp. výšky tónu sirény) pro pozorovatele.

Hlavní rozdíl mezi těmito úlohami je v tom, že zvuk má danou rychlost $v \approx 330 \text{ m/s}$ vůči *vzduchu*, v němž se šíří, zatímco automatická zbraň má rychlost střely $v \approx 715 \text{ m/s}$ vůči *ústí hlavně*. Také rozdíl ve frekvenci je cca 2 řády, ale ten nemění postup řešení.

Dopplerův jev

Tón frekvence f_{zdr} vysílaný (na obě strany) zdrojem pohybujícím se rychlostí v_{zdr} vůči Zemi vnímá pozorovatel, který stojí nebo se pohybuje rychlostí v_{poz} vůči Zemi, s jinou frekvencí f_{poz} . Označme v_{sig} rychlost zvuku ve vzduchu (předpokládáme bezvětří).

Pro zápis (a fakticky i pro řešení) použijeme grafické zobrazení z kap. B.1. Zakreslíme světočáry zdroje a pozorovatele ve vztažné soustavě spojené se Zemí (viz obr.).

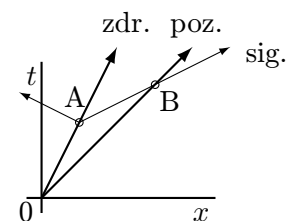
Předpokládejme nejprve, že pozorovatel je rychlejší než zdroj zvuku (zvuk ho dohání a všechny rychlosti jsou kladné). Počátek zvolíme v okamžiku, kdy se míjejí (událost 0), a tam bude i první zvukový signál (např. maximum akustického tlaku). Druhý signál (následující maximum) je vyslán (A) a přijat (B).

Z definice rychlosti (rychlost = dráha / doba) dostáváme vztahy

$$v_{\text{zdr}} = \frac{x_A}{t_A} \quad (3.21)$$

$$v_{\text{poz}} = \frac{x_B}{t_B} \quad (3.22)$$

$$v_{\text{sig}} = \frac{x_B - x_A}{t_B - t_A}, \quad (3.23)$$



eliminujeme x_A, x_B z rov. (3.23) a spočteme $\frac{t_B}{t_A}$. Dosazením ($f = 1/T$) dostaneme konečně

$$\frac{f_{\text{poz}}}{f_{\text{zdr}}} = \frac{v_{\text{sig}} - v_{\text{zdr}}}{v_{\text{sig}} - v_{\text{poz}}} \quad (3.24)$$

Je-li naopak zdroj zvuku rychlejší než pozorovatel, je formálně $v_{\text{sig}} < 0$, úloha však má řešení stejné.

??? **Otázka:** Jak by se na výsledku projevil vítr rychlosti v_{vitr} ? (→str. 35)

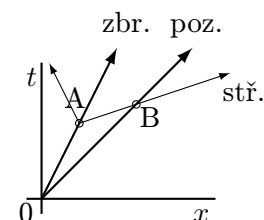
!!! **Odpověď** ze str. 35: Rychlost zvuku se ve vzorci zvýší o rychlost větru.

Kadence pohybující se zbraně

Kadenci f_{zbr} (počet střel vypálených za sekundu) zbraně na vozidle jedoucím rychlostí v_{zbr} vnímá pozorovatel pohybující se rychlostí v_{poz} jako četnost f_{poz} dopadu střel. Rychlost střely u ústí hlavně označme $v_{\text{stř}}$, odpor vzduchu zanedbáváme.

Principiální rozdíl mezi předchozím problémem spočívá v tom, že vůči Zemi má střela nyní rychlost jinou, totiž $v'_{\text{stř}} = v_{\text{stř}} + v_{\text{zbr}}$. Platí tedy

$$\frac{f_{\text{poz}}}{f_{\text{zbr}}} = \frac{v_{\text{stř}}}{v_{\text{stř}} + v_{\text{zbr}} - v_{\text{poz}}} \quad (3.25)$$



??? **Otázka:** A jakpak by se na tomto výsledku projevil vítr rychlosti v_{vitr} ? (→str. 35)

!!! **Odpověď** ze str. 35: Nijak. Na rozdíl od zvuku, vítr střelu „nenese“. A odpor vzduchu jsme v zadání zanedbali.

Kapitola 4

Dynamika hmotného bodu 2018-06-22

4.1 Předmět

Stav $\{state\}$ soustavy je určen tím, že známe polohu a rychlost každé její části; jejich změnu v čase nazýváme **pohyb** $\{motion\}$ soustavy. Těleso nezanedbatelných vlastních rozměrů se také může deformovat a měnit svou dosavadní orientaci v prostoru (otáčení neboli rotace). Zatímco kinematika se zabývá jen *popisem* pohybu soustavy, **dynamika** se zabývá *příčinou* pohybu, zejména jeho *změny*.

Připomeňme, že pohyb je relativní, tedy že jeho popis je vázán na zvolenou *vztažnou soustavu*. Příčinu změny pohybu hledáme v interakci (vzájemném působení) mezi tělesy (nebo tělesem a okolním silovým polem) a v klasické vektorové (newtonovské) mechanice ji popisujeme pojmem **síla**. V analytické mechanice studujeme navíc samostatně i **vazby** a namísto sil mezi tělesy se staráme o energii soustavy jako celku.

Dřívější představy (před Newtonem) byly jiné: podle Aristotela mají předměty svá přirozená místa v přírodě (země jezdole, nad ní je voda, ještě výše vzduch, nejvýše oheň) a tato místa se snaží zaujmout.

Speciálním případem dynamiky je **statika** $\{statics\}$. Ta se zabývá soustavami v rovnováze, např. zkoumá, jaké musí být síly mezi tělesy, aby soustava tělesy tvořená byla a zůstávala v rovnováze.

4.2 Základní veličiny dynamiky hmotného bodu

K poloze $\vec{r}$ (kap. 3.2.2), rychlosti $\vec{v}$ (kap. 3.2.5) a zrychlení $\vec{a}$ (kap. 3.2.6) známým z kinematiky přibudou veličiny spjaté s hmotností.

Hmotnost m $\{mass\}$ je jedním ze základních atributů hmotných objektů. Vždy platí $m \geq 0$. Hmotnost tělesa se zpravidla uvažuje v čase neproměnná: $\frac{dm}{dt} \equiv \dot{m} = 0$. U soustavy s proměnnou hmotností je nutno také zadat, jakou má mizející nebo přibývajících hmota hybnost. Např. padající a odpařující se kapka vody ztrácí s hmotou nejen hmotnost, ale i hybnost (odpařující se molekuly mají střední počáteční rychlost rovnou rychlosti kapky), zatímco nabývajících kapka deště získává s vodou kondenzujících z okolí hmotnost, nikoli však hybnost (střední rychlost kondenzujících molekul je nulová vůči okolí, nikoli vůči pohybující se kapce).

Hmotnost je v nerelativistické fyzice aditivní a absolutní (nezávislá na volbě vztažné soustavy).

Hybnost $\vec{p}$ $\{momentum\}$ je definovaná pro částici jako součin hmotnosti m a rychlosti $\vec{v}$

$$\vec{p} := m\vec{v} \quad . \quad (4.1)$$

Je to aditivní vektorová veličina a je relativní, tj. závislá na volbě vztažné soustavy. Je rovněž „**mírou pohybu**“ tělesa (další mírou pohybu je např. kinetická energie).

Nepůsobí-li na soustavu vnější síly $\vec{F}$ (nebo je-li jejich výslednice $\vec{F}_\Sigma$ nulová), pak se celková hybnost soustavy zachovává (zákon zachování hybnosti).

Hybnost lze zobecnit i na některá pole (např. elektromagnetické).

V teorii relativity se zavádí relativistická čtyřhybnost, kap. 8.7.6, analogických vlastností.

Síla $\vec{F}$ $\{force\}$ popisuje **interakci** dvou těles nebo tělesa s polem; občas ji pro zdůraznění nazýváme skutečná síla, pravá síla apod.

Naproti tomu „síly“ kinematické (neboli setrvačné, fiktivní, zdánlivé atp.), např. odstředivá, Coriolisova, unášivá, jsou jen pomocné členy doplněné do pohybové rovnice (tj. do 2. Newtonova zákona, $m\vec{a} = \vec{F}_\Sigma$), aby zákon „platil“ (= souhlasil s měřením v „nevhodné“ vztažné soustavě, kde naměříme jiné zrychlení $\vec{a}$). Viz dále kap. 6.

Síla je aditivní vektorová veličina a je absolutní, tj. nezávislá na volbě vztažné soustavy (na té ovšem závisí *rozklad* síly na složky).

Součet všech sil působících na těleso nazýváme **výslednici** $\{\text{net force}\}$; zde ji značíme stručně $\vec{F}_\Sigma$. O síle a příbuzných veličinách jsme se již zmínili v kap. 2.3.3.

4.2.1 Síla: různé typy klasifikace

Toto se neučte. Nebudu zkoušet vaši mechanickou či optickou paměť tím, že bych po vás chtěl vyjmenovat následující nesystematický a neúplný výčet. Je ale nutné si uvědomit, že existují různá kritéria a není pak rozumné je míchat stylem „Klobouky dělíme na slaměné, dámské a žluté.“.

- podle původu (typ interakce):
 - síla gravitační
 - síla tíhová
 - síla elektromagnetická
 - síla třecí
 - ...
- podle vztažné soustavy, v níž systém popisujeme:
 - síly skutečné (interakce mezi tělesy nebo tělesem a polem)
 - síly kinematické = setrvačné, zdánlivé, fiktivní, ... (výrazy kompenzující použití neinerciální vztažné soustavy)
- podle geometrie dráhy (volná částice):
 - síla tečná (k dráze částice) – způsobí změnu velikosti rychlosti (a tím změnu energie)
 - síla normálová (k dráze částice) – způsobí změnu směru pohybu (zakřivuje trajektorii)
- podle geometrie zadání úlohy (částice vázaná na plochu):
 - síla tečná (k vazebné ploše): např. tření
 - síla normálová (k vazebné ploše): např. přitlačná síla
- podle způsobu přenosu dovnitř tělesa:
 - síly objemové (těleso v silovém poli): gravitace, elektromagnetická síla, ...
 - síly plošné (přes povrch tělesa): síly kontaktní, vztlak v tekutině, ...
- silové pole (rozložení v prostoru v rámci zkoumaného objektu):
 - *konstantní*: konstantní pole (silové, rychlostní) se zpravidla nazývá polem *homogenním*
 - *proměnné* = *nehomogenní*: je-li v rámci zkoumaného tělesa vnější silové pole dostatečně nehomogenní, pak rozdíl skutečných místních hodnot od vhodné střední hodnoty nazýváme **slapové síly** $\{\text{tidal force}\}$, případně jen **slapy** $\{\text{tides}\}$.

Např. gravitační pole Měsíce či Slunce takto působí na rozlehlou Zemi s vodami a atmosférou na povrchu. U pole přitažlivé síly tedy slapy „natahují“ těleso v radiálním směru.

4.3 Silový diagram

V praktických úlohách budeme často sledovat síly působící mezi soustavou tuhých těles: třeba míč ležící na stole stojícím na Zemi. Namalujeme si vždy náčrtek – obrázek, abychom rozuměli dobře, o co jde, a vedle vytvoříme **silový diagram** zobrazující všechny síly působící na zkoumané těleso. Takto zanesené síly můžeme pak snadno graficky sečíst, abychom dostali výslednici $\vec{F}_\Sigma$ sil na dané těleso působících a mohli lépe formulovat pohybové rovnice.

4.4 Newtonovy pohybové zákony

4.4.1 Rámec: Newtonův absolutní prostor a čas (původní pojetí)

Newton postuluje existenci **absolutního prostoru** – poloha je v něm určena polohovým vektorem $\vec{r} \equiv \{x, y, z\}$, a **absolutního času** t). Zavádí je takto:

Newton – Philosophiae Naturalis Principia Mathematica (1687): „Absolutní, skutečný a matematický čas plyne sám od sebe a díky své povaze rovnoměrně a bez ohledu na vnější objekty. Absolutní prostor je vzhledem ke své podstatě a bez ohledu na vnější objekty stále týž a nepohyblivý.“

Toto zavedení je názorné, ale fyzikálně sporné: vůči čemu je absolutní čas rovnoměrný a absolutní prostor nepohyblivý? V novějším pojetí klasické fyziky se absolutní prostor a absolutní čas neužívá. Všude nám místo něj stačí kterákoli inerciální soustava (IS, viz dále). Občas (při popularizaci) se místo IS užívá formulace typu „těleso je v klidu vůči **stálícím**“; míní se tím, že nerotuje. Jeho posuvný pohyb tím ovšem popsán není, zejména uvažíme-li, že se „stálíce“ pohybují vůči sobě, a to slušnými rychlostmi.

4.4.2 Newtonovy pohybové zákony

Tyto zákony jsou základními pohybovými zákony klasické mechaniky.

- Přívlastek „pohybový“ se používá k jejich odlišení od Newtonova gravitačního zákona; zpravidla se však vynechává, užijeme-li řadové číslovky;
- Historicky se mluví o tělese, ale v současném (newtonovském) pojetí uvažujeme jen hmotný bod (částici, tedy těleso mající zanedbatelné vlastní rozměry a tvar). Formulace pro těleso konečných rozměrů by musela popisovat i jeho možné otáčení, což je ze současného pohledu zbytečná komplikace (třebaže Newton i o tomto uvažoval a do svých úvah zahrnoval). Nyní pokládáme za jednodušší nejprve formulovat mechaniku (jednoho) hmotného bodu, poté mechaniku soustavy hmotných bodů a až pak mechaniku tuhého tělesa coby speciální soustavy hmotných bodů spojených vazbami zaručujícími stále vzdálenosti.

4.4.3 Nultý Newtonův zákon – (přísně tajný) zákon výslednice

Pozor!!! Nikde neříkejte, že jsem vám toto prozradil!!! Neví o něm nic ba ani sama sv. Wikipedie!!! Jeho číslování odpovídá obvyklému číslování u zákonů termodynamiky. Newton sám však ctil zákony natolik, že toto tvrzení uvedl jen coby korolár.

*0NZ: Síly působící na tutéž částici se chovají jako vektory, zejména je lze sčítat.
Výslednou sílu zpravidla nazýváme výslednicí (těchto sil).*

Není to vůbec „samozřejmost“. Mimochodem, otočení v prostoru o konečný úhel (kap. 3.4) je také popsáno směrem v prostoru a velikostí, a **není** to vektor (dvě otočení nejsou komutativní)! Sčítání vektorů sil se na SŠ nazývá „skládání sil“.

4.4.4 První Newtonův zákon – zákon setrvačnosti (1NZ)

V historickém *Newtonově* pojetí je zákon formulován takto:

1NZ (klasicky): Každé těleso setrvává ve stavu klidu nebo rovnoměrného přímočarého pohybu, dokud není donuceno působením vnějších sil svůj stav změnit.

- Těleso konečných rozměrů může i bez působení vnějších sil též rotovat; proto je lépe hovořit o částici neboli hmotném bodu.

Tato formulace předpokládá existenci význačné vztažné soustavy („absolutní prostor a čas“), vůči níž mluvíme o klidu či pohybu; tuto soustavu však nelze konstruktivně zavést. Proto se v současném pojetí 1NZ často formuluje jinak, totiž jako *existenční výrok* na základě definice **inerciální soustavy** $\{\text{inertial frame}\}$, IS (lat. inertia, -æ, f. = setrvačnost).

Inerciální soustava je vztažná soustava, v níž se volné hmotné body pohybují bez zrychlení.

V současném *newtonovském* pojetí potom formulujeme 1NZ takto:

1NZ (nověji): **Existuje** inerciální vztažná soustava (IS).

- Jde tedy o *existenční teorem* zaručující existenci jisté významné vztažné soustavy; v ní budeme formulovat všechny další zákony.
- Tím mj. padá námitka E. Macha, že 1NZ je důsledkem 2NZ pro $\vec{F}_\Sigma = \sum \vec{F} = \vec{0}$.

Z definice je zřejmé, že IS není jediná: IS je i každá jiná IS', která se vůči IS pohybuje bez zrychlení (a bez otáčení). Neinerciální je však každá vztažná soustava, která se vůči některé IS pohybuje se zrychlením (nebo se vůči ní otáčí, což implikuje zrychlení bodů mimo osu otáčení).

4.4.5 Druhý Newtonův zákon – zákon síly (2NZ)

2NZ: Časová změna hybnosti částice je rovna výslednici $\vec{F}_\Sigma$ sil na ni působících.

Jako obvykle, „časovou změnu“ vystihneme matematicky derivací podle času, tedy

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}_\Sigma \quad . \quad (4.2)$$

- Protože hmotnost m částice je v nerelativistické mechanice stálá, platí též

$$m\vec{a} = m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}_\Sigma \quad . \quad (4.3)$$

- Ani hmotnost, ani síla nezávisí na volbě vztažné soustavy, ale zrychlení (odvozené od polohy) na ní obecně závisí; v tom smyslu lze prohlásit, že 2NZ je platný jen v inerciální vztažné soustavě. Aby formálně platil i při měření v neinerciálních soustavách, lze doplnit k působícím silám ještě tzv. „setrvačné síly“ kompenzující rozdíly vzniklé měřením v neinerciální soustavě. Ty budou vyloženy později v samostatné kap. 6.
- Jak zjistíme později (rov. (7.12)), 2NZ platí i pro těleso konečných rozměrů: časová změna úhrnné hybnosti tělesa je rovna úhrnné síle, což je zostřeno 1. větou o hybnosti (1. impulzová věta) na úhrnnou *vnější* sílu (protože součet všech vnitřních sil je díky 3NZ nulový).

4.4.6 Třetí Newtonův zákon – zákon akce a reakce (3NZ)

3NZ: Působí-li těleso $\mathcal{T}_1$ na těleso $\mathcal{T}_2$ silou $\vec{F}_{12}$, pak i těleso $\mathcal{T}_2$ působí na těleso $\mathcal{T}_1$ silou; označíme-li ji $\vec{F}_{21}$, pak platí $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$.

- Síla se v rovnosti chápe jako volný vektor, tj. bez ohledu na umístění (na „působíště síly“).
- Zákon má smysl i platnost nejen pro hmotné body, ale i pro tělesa konečných rozměrů, uvažujeme-li síly jako volné vektory, bez umístění.
- Zákon platí jen pro skutečné síly. Není použitelný na „setrvačné síly“ (ty nepopisují vzájemné působení těles).
- Akce a reakce vystupují plně symetricky: současně vznikají, trvají a zanikají. Je jedno, kterou ze sil $\vec{F}_{12}$, $\vec{F}_{21}$ pojmenujeme akcí; ta druhá bude reakce. Proto *nesouvisejí* s filozofickými kategoriemi příčiny (akce) a důsledku (reakce).
- $\leftrightarrow$ Zákon platí i pro *necentrální síly* (např. mezi dipóly).

- $\leftrightarrow$ Zákony akce a reakce vypovídá jen o silách, nikoli o silových dvojicích; působí-li těleso $\mathcal{T}_i$ na těleso $\mathcal{T}_k$ také silovou dvojicí $\vec{M}_{ik}$, je obecně $\vec{M}_{ik} \neq \vec{M}_{ki}$.
- Zdůrazněme, že obě síly působí vždy na *různé* objekty: akce $\vec{F}_{12}$ na těleso $\mathcal{T}_2$, reakce $\vec{F}_{21}$ na těleso $\mathcal{T}_1$. Jsou-li tělesa v dotyku, pak obě síly působí v tomtéž bodě (v bodě dotyku), ovšem opět na různá tělesa. Proto je většinou nemá smysl sčítat.
(Má to smysl jen tehdy, uvažujeme-li obě interagující tělesa za součást jednoho objektu, v němž pak jde o vnitřní síly.)
- Při působení na dálku je nutno předpokládat okamžité působení na dálku (např. klasická, nerelativistická gravitace). Použijeme-li však jako prostředníka síly *pole* (např. elektromagnetické), v němž se šíří signály konečnou rychlostí, pak je nutno připsat tomuto poli i hybnost, energii a moment hybnosti.

4.5 Princip relativity; Galileo, Einstein

Mechanický princip relativity (též: **Galileův princip relativity**) znal a formuloval Galileo ještě před Newtonem. Řečeno naší terminologií, zní takto:

Mechanické jevy probíhají stejně ve všech inerciálních soustavách. (Galileo)

Galileo popisuje, jak na lodi v kajutě za staženými záclonami nerozeznáme mechanickými pokusy – lití čaje, let komárů –, zda loď stojí (vůči břehu), nebo zda se pohybuje rovnoměrně přímočaře. Urychlený pohyb však poznáme.

Na základě mechanických dějů tedy není důvod dávat nějaké IS přednost před jinou, a proto na základě mechanických dějů nelze ani rozlišit, která z IS je absolutní prostor a čas. Zdálo by se, že nemechanickými ději (elektromagnetismus, světlo) by to mohlo jít, ale v praxi se to také nepodařilo, viz speciální teorie relativity (STR), kap. 8.

Princip relativity je ekvivalentní s výrokem, že pohybové rovnice (2NZ) jsou invariantní vůči příslušné transformaci (Galileově či Lorentzově) mezi inerciálními soustavami $\mathcal{S}, \mathcal{S}'$.

(Einsteinův) princip relativity, speciální princip relativity {special principle of relativity} zobecňuje tento zákon na *všechny* fyzikální jevy:

Všechny fyzikální jevy probíhají stejně ve všech inerciálních soustavách.

Aby však byl splněn i pro elektromagnetické jevy (světlo, Maxwellovy rovnice), nemůže platit transformace Galileova rov. (3.16), ale je nutno přijmout transformaci Lorentzovu, viz kap. 8. Einsteinova interpretace (nyní běžně přijímaná) jde ještě dále tím, že opouští samostatné pojmy prostor a čas a zavádí místo nich prostoročas.

4.6 Další příbuzné mechanické veličiny

Silovým polem $\vec{F}(\vec{r})$ {force field} nazýváme prostor, kde v nějaké oblasti Ω působí síla $\vec{F}(\vec{r})$; přitom $\vec{r} \in \Omega$ (viz kap. 2.3.3).

Hustota síly $\vec{f}(\vec{r})$ {force density} je definována tak, aby úhrnná síla $d\vec{F}$ působící na prostorový element $d\Omega$ o objemu dV byla rovna $d\vec{F} = \vec{f}dV$ (viz obecněji kap. 2.3.2).

Intenzita pole $\vec{I}$ je síla působící na „jednotkovou testovací částici“ (podrobněji viz kap. 4.7).

Moment síly $\vec{M}$ (vůči bodu) {moment}, {moment of force} nazývaný též **točivost** {torque}

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} \quad (4.4)$$

je aditivní (pseudo)vektorová veličina užívaná v dynamice tuhého tělesa (i ve statice). Referenčním bodem pro polohový vektor $\vec{r}$ je zpravidla počátek souřadnic.

Moment hybnosti $\vec{b}$ (vůči bodu) {moment of momentum} {angular momentum} je definován jako

$$\vec{b} = \vec{r} \times \vec{p} \quad (4.5)$$

Je to (pseudo)vektorová, aditivní veličina. Obecně zavádíme moment pro vektorovou veličinu takto:

Moment vektorové veličiny je rameno vektorově vynásobeno touto veličinou.

Rameno se měří od počátku souřadnic k bodu umístění veličiny (u síly k jejímu působišti). Platí věta analogická 2NZ, ale s momentem hybnosti a momenty sil:

Časová změna momentu hybnosti je rovna součtu momentů sil (= momentu výslednice sil).

Dokážeme ji snadno:

$$\frac{d}{dt} \vec{b} = \frac{d}{dt} (\vec{r} \times \vec{p}) = \underbrace{\vec{v} \times \vec{p}}_{=0} + \vec{r} \times \dot{\vec{p}} = \vec{r} \times \sum \vec{F} = \sum (\vec{r} \times \vec{F}) \quad (4.6)$$

protože $\vec{v} \times \vec{p} = m\vec{v} \times \vec{v} = \vec{0}$.

Věta platí po vhodném zobecnění i pro tělesa konečných rozměrů a patří mezi základní pohybové rovnice tuhého tělesa (kap. 7.5).

Impulz síly $\vec{J}$ *{impulse}* je aditivní vektorová veličina definovaná jako

$$\vec{J} = \int_{t_0}^{t_1} \vec{F} dt \quad . \quad (4.7)$$

Způsobí přírůstek hybnosti: $\vec{J} = \vec{p}_f - \vec{p}_i$. Je výhodný např. při studiu srážek, kap. C. Popisuje časový účinek síly (na rozdíl od práce, která popisuje dráhový účinek síly a způsobí přírůstek energie).

4.7 Práce, energie

Motivace: V dobách vlády absolutního prostoru a času byla vznesena otázka, čím vyjádřit „míru pohybu“; zda hybností $\vec{p} = m\vec{v}$, či „živou silou“ mv^2 (lat. *{vis viva}*), dvojnásobek kinetické energie). Šlo o nedorozumění, jde totiž o dvojí pohled na účinek síly – dráhový či časový.

Potenciálová síla; potenciální energie Sílu $\vec{F}$ nazýváme **potenciálovou** *{potential}*, pokud existuje skalární funkce $U(\vec{r})$ (zvaná **potenciální energie**, též **polohová energie**) taková, že

$$\vec{F} = -\text{grad } U \quad \text{neboli} \quad (4.8)$$

$$F_i = -\partial_i U \quad \text{neboli} \quad (4.9)$$

$$\vec{F}(x, y, z) = -\left\{ \frac{\partial U}{\partial x}; \frac{\partial U}{\partial y}; \frac{\partial U}{\partial z} \right\} \quad (4.10)$$

Ne každá síla je potenciálová (taky ne každou trojici funkcí – kartézských složek síly – lze vyjádřit jedinou funkcí skalární). Určitě to nejde u sil závislých nejen na poloze, ale i na rychlosti částice (např. síla tření nebo magnetická Lorentzova síla $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$). Jsou ale i jiné jednoduché příklady, např. síla

$$\vec{F}(x, y, z) = \{1; 0; y\} \quad (4.11)$$

není potenciálová (protože forma $\vec{F} \cdot d\vec{r} = 1 \cdot dx + 0 \cdot dy + y \cdot dz = dx + ydz$ není integrabilní).

Intenzita $\vec{I}$ zavádíme, je-li testovaná síla $\vec{F}$ působící na zkusmé tělísko lineárně úměrná jeho vhodné charakteristice q . Pak

$$\vec{I} = \vec{F}/q \quad . \quad (4.12)$$

Ta už charakterizuje silové pole bez ohledu na „velikost“ (tj. charakteristiku) zkusmého tělíska.

- Pro gravitační sílu $\vec{F}_g$ působící na částici o hmotnosti m je intenzita $\vec{I} = \vec{F}_g/m$.
- Pro tíhovou sílu $\vec{G}$ působící na částici o hmotnosti m je intenzita rovněž $\vec{I} = \vec{G}/m$.
- Pro elektrickou Coulombovu sílu $\vec{F}_e$ působící na náboj q je elektrická intenzita $\vec{E} = \vec{F}_e/q$.
- Pro oscilátor tvořený částicí na pružině $\vec{F} = -k\vec{r}$ nezávisí síla pružiny na žádné charakteristice částice a intenzita je totožná se silou, $\vec{I} = \vec{F}$.

Potenciál φ $\{potential\}$ zavedeme k intenzitě $\vec{I}$ podobně jako potenciální energii k síle:

$$\vec{I} = -\mathbf{grad} \varphi \quad \text{neboli} \quad (4.13)$$

$$I_i = -\partial_i \varphi \quad \text{neboli} \quad (4.14)$$

$$\vec{I}(x, y, z) = -\left\{ \frac{\partial \varphi}{\partial x}; \frac{\partial \varphi}{\partial y}; \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right\} \quad (4.15)$$

Ten pak stejně jako intenzita popisuje „samotné pole“, bez ohledu na charakteristiku zkoumání částice.

Práce W $\{work\}$. Předpokládejme, že zkoumaná síla $\vec{F}$ působí na pohybující se částici po dobu dt . Za tu dobu se posune částice o $d\vec{r} = \vec{v} dt$ a urazí dráhu $ds = |d\vec{r}|$. Zavedme **elementární práci** coby *dráhový* účinek $\vec{F} \cdot d\vec{r}$ síly působící na částici pohybující se po trajektorii při posunutí o $d\vec{r}$:

$$\vec{F} \cdot d\vec{r} = F ds \cos \alpha, \quad (4.16)$$

kde α je úhel mezi směrem síly a tečnou k trajektorii částice.

$\leftrightarrow$ Značka $\vec{F}$, přeškrtnuté „d“, znamená, že jde o lineární kombinaci diferenciálů, ale výsledek nemusí být sám diferenciál, tj. nemusí existovat nějaká funkce W , jejímž diferenciálem by pak tento výraz byl.

Pro potenciálovou sílu lze elementární práci $\vec{F} \cdot d\vec{r}$ upravit takto:

$$\vec{F} \cdot d\vec{r} = \vec{F} \cdot \vec{v} dt = -\mathbf{grad} U \cdot \vec{v} dt \quad (4.17)$$

$$= -\left(\frac{\partial U}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial U}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial U}{\partial z} \frac{dz}{dt} \right) dt \quad (4.18)$$

$$= -dU \quad (4.19)$$

neboli elementární práce vykonaná *potenciálovou* silou je totálním diferenciálem a je rovna úbytku potenciální energie částice. Obvyklé čtení je „Práce se konala na účet potenciální energie částice v silovém poli“.

Konečná (nikoli elementární) práce W však obecně závisí na trajektorii Γ (nejenom na krajních polohách), je to tedy *dějová veličina* (nikoli *stavová veličina*).

$$W = \int_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{\Gamma} \vec{F} \cdot \vec{v} dt = \int_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad (4.20)$$

Práce je veličina téhož druhu (a samozřejmě i rozměru) jako energie.

Výkon P $\{power\}$ jsme poznali už v rov. (4.17), kde znamenal rychlost konání práce, resp. rychlost předávání energie:

$$P = \vec{F} \cdot \vec{v} = -\frac{dU}{dt} \quad (4.21)$$

Nazývá se **výkon**, resp. **příkon** $\{consumption\}$, podle orientace toku energie vůči uvažovanému objektu).

4.7.1 Zákon zachování mechanické energie; konzervativní síla

Upravujeme pohybovou rovnici (2NZ) takto:

$$\vec{F} = m\vec{a} = m\dot{\vec{v}} \quad | \cdot \vec{v} \quad (4.22)$$

$$\vec{F} \cdot \vec{v} = m\dot{\vec{v}} \cdot \vec{v} = m\frac{1}{2}(\dot{\vec{v}} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \dot{\vec{v}}) \quad (4.23)$$

$$-\sum_i \frac{\partial U}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt} = -\frac{dU}{dt} = \frac{1}{2}m \frac{d}{dt}(\vec{v} \cdot \vec{v}) = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2}mv^2 \right) \quad (4.24)$$

Zavedeme-li vedle potenciální energie $E_p = U$ částice v silovém pole ještě **kinetickou energii** $E_k = \frac{1}{2}mv^2$ pohybující se částice (též **pohybová energie**) a **celkovou mechanickou energii** $E = E_k + E_p$ částice, zjistíme, že platí

$$-\left(\frac{dE_p}{dt} \right) = \frac{dE_k}{dt} \quad (4.25)$$

$$\frac{d}{dt}(E_p + E_k) = \frac{dE}{dt} = 0 \quad (4.26)$$

$$E = E_p + E_k = \text{konst} \quad (4.27)$$

tedy celková mechanická energie se při pohybu částice v potenciálovém silovém poli zachovává (**zákon zachování mechanické energie** {*law of conservation of energy*} v potenciálovém poli).

4.7.2 Konzervativní síly

Viděli jsme, že pro potenciálovou sílu $\vec{F}$ platí $dW = -dU$, a tedy práce W vykonaná při pohybu z bodu (1) do (2) (tzn. z bodu o polohovém vektoru $\vec{r}_1$ do bodu o polohovém vektoru $\vec{r}_2$) je rovna $U_1 - U_2 = U(\vec{r}_1) - U(\vec{r}_2)$ a nezávisí tedy na tvaru trajektorie Γ spojující oba body. To nám také dává jednoduchou možnost konstruktivního nalezení potenciálu v jednom bodě vůči jinému, totiž spočítat práci při přechodu mezi těmito body po vhodné křivce.

Dále, práce konzervativní síly po uzavřené trajektorii je rovna nule:

$$W = \oint_{\Gamma} dW = 0 \quad (4.28)$$

pro libovolnou uzavřenou smyčku Γ . Pro konzervativní síly platí rovněž zákon zachování mechanické energie.

Každá síla, pro kterou platí zákon zachování mechanické energie ve smyslu rov. (4.28), se nazývá **konzervativní**. Tento pojem je širší než síla potenciálová: např. výše zmíněná Lorentzova magnetická síla $\vec{F}_m = q\vec{v} \times \vec{B}$ potenciál nemá (závisí na rychlosti náboje), ale je konzervativní, protože má směr vždy kolmý k rychlosti nosiče náboje a může sice změnit směr letu nabitě částice, ale nikoli velikost její rychlosti. Nemůže tedy ani změnit její kinetickou energii.

4.8 Tření

4.8.1 Klasifikace

Tření je v praxi velmi významný jev doprovázený nekonzervativní **třecí silou** {*friction*} (často rovněž stručně nazývanou **tření**) působící ve styčné ploše mezi dvěma tělesy proti směru pohybu (při kinematickém tření), resp. proti změně klidového stavu (při klidovém tření). Tření je makroskopickým projevem jednak deformací, jednak vyrovnávání vzájemných rychlostí v mikroskopických oblastech materiálu. Můžeme rozlišit několik podstatně rozdílných jevů:

smýkové tření {*dry friction*}, též **suché tření**, ale obvykle jen **tření** {*friction*}, mezi dvěma pevnými tělesy klouzajícími po sobě;

valivý odpor {*rolling resistance*} pokud se jedno pevné těleso kutálí po druhém (tj. neklouže, takže místě styku jsou tělesa navzájem v klidu);

odpor prostředí mezi pevným tělesem a okolní tekutinou;

vnitřní tření {*internal friction*}, {*fluid friction*} uvnitř tekutiny.

4.8.2 Smykové tření

Uvažujme tuhé těleso T , které leží na tuhé podložce P ; stýkají se podél třecí plochy. Na T působí jednak vnější výsledná síla $\vec{F}$ (zahrnující svislou tíži $\vec{G}$ a zpravidla další šikmé či vodorovné vtištěné síly), jednak odezva $\vec{R}$ podložky. Obě síly rozložíme na složky podle orientace vůči podložce: normálovou $\vec{F}_n$ a tečnou $\vec{F}_t$, resp. normálovou $\vec{R}_n$ a tečnou $\vec{R}_t$.

Předpokládáme, že těleso T zůstává na podložce a makroskopicky se neproboří¹. Pak platí $\vec{F}_n = -\vec{R}_n$. Velikost $\vec{R}_n$ je jistě omezená pevností podložky, předpokládáme však, že je dostatečná.

Pokud také $\vec{F}_t = -\vec{R}_t$, pak buď zůstává těleso T v klidu (jde o klidové tření, vzájemná rychlost $\vec{v} = \vec{0}$), nebo se pohybuje po podložce rovnoměrně přímočaře rychlostí o velikosti $v > 0$ (jde o tření za pohybu).

Pro $F_t > R_t$ těleso T klouže po podložce se zrychlením úměrným $\vec{F}_t - \vec{R}_t$.

Analogicky řešíme úlohy, kdy „podložka“ neleží pod tělesem, ale tře se o bok tělesa apod.

Rozlišujeme vždy dva různé případy:

¹Mikroskopicky ovšem nejde o roviny, ale drsné plochy, jejichž „hory“ a „doly“ do sebe zapadají, obrušují se ap.

- **tření za pohybu, kinematické**, dříve též **dynamické** *{kinetic friction}*, když pevné těleso již klouže rychlostí $v > 0$ po podložce. Třecí síla $\vec{R}_t$ je málo závislá na vzájemné rychlosti, ale je zhruba úměrná normálové (přítlačné) síle $\vec{F}_n$:

$$R_t = \mu F_n \quad (4.29)$$

Nejde o rovnici vektorovou, protože obě síly mají různé směry!

Činitel smykového tření μ bývá obvykle cca 0,1 až 0,7 podle kvality a materiálu povrchů.

- **klidové (statické) tření** *{static friction}*, pokud ještě nedošlo ke vzájemnému pohybu, $v = 0$:

$$R_t \leq \mu_0 F_n \quad (4.30)$$

Činitel klidového tření μ_0 bývá o 20 % až 25 % větší než kinematický činitel μ .

Přes podobnost rov. (4.29) a (4.30) i blízkost hodnot μ, μ_0 se úlohy řeší úplně jinak, viz kap. 4.9.1 a kap. 4.9.2.

4.8.3 Valivý odpor

Valivý odpor *{rolling resistance}* (výstižnější termín než dřívější **valivé tření**) – objekt a okolí jsou vůči sobě v klidu. Typickým příkladem je válec o poloměru R valící se beze smyku po podložce.

$$F_t = \xi \frac{F_n}{R} = c_R F_n \quad (4.31)$$

Ani zde nejde o rovnici vektorovou. **Součinitel valivého odporu** ξ má rozměr *délky* (proto se nazývá **součinitel** *{coefficient}*); bezrozměrová veličina $c_R = \xi/R$ je **činitel valivého odporu** *{factor}*.

Fyzikálně mu porozumíme představou, že se v místě styku zdeformují válec i podložka do mělké jamky; v ní během valení už není odezva $\vec{R}$ podložky symetrická vůči svislé rovině procházející osou válce, ale posunutá dopředu o ξ a vytváří tak s tíží v ose valení silovou dvojici s momentem o velikosti $M = F_n \xi$. Ten pak musí vyvážit tečná „tažná síla“ $\vec{F}_t$ s ramenem o velikosti R a s momentem o velikosti $M = F_t R$.

Valivý odpor je mnohem menší než vlečné tření, zejména jde-li o tvrdé materiály. Činitel c_R mívá hodnoty $c_R = 0,001$ (kulička v ložisku) až $c_R = 0,3$ (pneumatika na písku).

4.8.4 Vnitřní tření; odpor prostředí

Vnitřní tření v tekutině je dáno její viskozitou (vazkostí). Zabývá se jím (z hlediska tekutiny) mechanika kontinua. Z hlediska tělesa pohybujícího se v tekutině nás zajímá **odpor prostředí** kladený pohybujícímu se tělesu. Při pohybu tělesa v tekutině malou rychlostí obtéká tekutina těleso a proudí přitom laminárně. Odpor je dán vnitřním třením mezi jednotlivými vrstvami obtékající tekutiny, je úměrný viskozitě (vazkosti) tekutiny a je pro kouli o poloměru r mající rychlost v vůči tekutině s dynamickou viskozitou η dán Stokesovým vztahem

$$F = 6\pi\eta r v \quad ; \quad (4.32)$$

obecněji

$$F = k\eta l v \quad , \quad (4.33)$$

kde l je **charakteristický rozměr** tělesa a činitel k charakterizuje jeho tvar, druh povrchu apod.

Při vyšších rychlostech kapalina proudí turbulentně, s víry, a odpor je úměrný energii podle **Newtonova vzorce** pro rovinnou desku o obsahu S pohybující se kapalinou kolmo ke své ploše:

$$F = \frac{1}{2} S \rho v^2 \quad . \quad (4.34)$$

Pro obecné těleso se zavádí navíc **činitel odporu** C charakterizující tvar, povahu povrchu atd..

4.9 Výpočty se započítáním tření

4.9.1 Tření za pohybu (kinetické)

Tato situace je jednodušší na zpracování. Uplatní se, pokud se již předmět pohybuje vůči podložce a my počítáme všechny síly, které ovlivňují jeho pohyb. Je-li přítláčná síla (což je normálová síla, složka výslednice sil do směru normály k povrchu) známa, je dynamickým činitelem tření jednoznačně určena velikost třecí síly; její směr je proti směru pohybu. Spočteme a přičteme k ostatním působícím silám.

4.9.2 Tření klidové

Tato situace je složitější. Uplatní se, pokud se předmět ještě nepohybuje vůči podložce a my počítáme, zda vydrží v klidu, nebo zda se „utrhne“. Je-li přítláčná síla známa, pak statický činitel tření udává *nikoli* skutečnou třecí sílu, ale její největší možnou hodnotu $F_{\max}$. Její směr není znám a nebude ani podstatný. Sečteme tedy všechny okolní síly kromě reakce podložky na výslednici $\sum \vec{F}$ a zjistíme její velikost a směr. Rozložíme ji do složky normálové (tu bude anulovat reakce podložky) a tečné; tu by měla – pro zachování stavu klidu – anulovat třecí síla. Na směr nezáleží, ale velikost musí být nanejvýš $F_{\max}$; pak zůstane stav klidu zachován. Je-li však tečná složka výslednice větší, dá se předmět do pohybu a musíme počítat znova – tentokrát ovšem s dynamickým třením.

Kapitola 5

Řešení pohybové rovnice: kmity

2018-07-05

5.1 Matematický aparát

5.1.1 Homogenní rovnice

Pohybová rovnice bývá v nejjednodušších případech *homogenní lineární diferenciální rovnice s konstantními koeficienty*, tedy

$$\sum_{k=0}^N a_k \frac{d^k x(t)}{dt^k} = 0, \quad (5.1)$$

kde a_k jsou konstanty (obecně komplexní), N je řád diferenciální rovnice (v Newtonově zákoně $N = 2$) a $x(t)$ je neznámá funkce času – zpravidla souřadnice popisující pohyb částice.

Řešení rov. (5.1) hledáme ve tvaru

$$x(t) = e^{\lambda t}. \quad (5.2)$$

Dosazením do rov. (5.1) získáme

$$\left(\sum_{k=0}^N a_k \lambda^k \right) e^{\lambda t} = 0, \quad (5.3)$$

a protože $e^{\lambda t} \neq 0$, dostáváme **charakteristickou rovnici**

$$\sum_{k=0}^N a_k \lambda^k = 0, \quad (5.4)$$

která má obecně N kořenů λ_m , vedoucích na N řešení $e^{\lambda_m t}$. Obecné řešení rov. (5.1) je jejich lineární kombinace

$$x(t) = \sum_{m=0}^N C_m e^{\lambda_m t}, \quad (5.5)$$

kde (komplexní) konstanty C_m zvolíme tak, aby vyhovovaly *počátečním podmínkám* (obvykle podmínkám na x a všechny vyšší derivace v čase $t = 0$).

Pokud však některé kořeny splývají, např. je-li $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_K$, neboli K -násobný (také K -krát degenerovaný) kořen λ , bylo by $K > 1$ funkcí $e^{\lambda_k t}$ lineárně závislých. Místo nich jsou však řešením funkce $t^k e^{\lambda t}$ pro $k = 0, 1, \dots, K-1$. Řešením je tedy

$$x(t) = P^{K-1}(t) e^{\lambda t}, \quad (5.6)$$

kde $P^{K-1}(t)$ je polynom v proměnné t , jehož stupeň je roven $K-1$.

5.1.2 Nehomogenní rovnice

Pokud lineární diferenciální rovnice není homogenní, tj. pokud má tvar

$$\sum_{k=0}^N a_k \frac{d^k x(t)}{dt^k} = F(t), \quad (5.7)$$

pak

- vyřešíme nejprve v celé obecnosti rovnici homogenní;
- uhodneme libovolným způsobem jedno řešení rov. (5.7) (tzv. partikulární řešení);
- obecným řešením nehomogenní rovnice je pak součet tohoto partikulárního řešení a obecného řešení nehomogenní rovnice.

5.1.3 Pohybová rovnice – 2. Newtonův zákon

Budeme řešit pohybovou rovnici pro jednu částici o hmotnosti $m > 0$, nepodrobenou vazbám, na kterou působí výsledná vnější síla $\vec{F}_\Sigma = \vec{F}$. Pohybová rovnice má tvar

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}. \quad (5.8)$$

V jednorozměrných případech, kterými se budeme dále zabývat, má pohybová rovnice tvar

$$m\ddot{x} = F. \quad (5.9)$$

Tuto rovnici budeme v dalším řešit pro různé konkrétní tvary síly $F(x, t)$. Řešení uvažujeme pro $t \geq 0$, přičemž pro $t = 0$ máme zadány (reálné) počáteční podmínky:

$$\text{počáteční poloha} \quad x_0 = x|_{t=0} \quad (5.10)$$

$$\text{počáteční rychlost} \quad v_0 = v|_{t=0}. \quad (5.11)$$

5.2 Konkrétní tvary síly

5.2.1 Nulová síla: $F = 0$

Pokud na HB nepůsobí žádná výsledná síla (tedy pokud je výslednice $\vec{F}_\Sigma$ všech vnějších sil v příslušném směru nulová), má pohybové rovnice tvar

$$m\ddot{x} = 0. \quad (5.12)$$

Tuto rovnici dvakrát integrujeme, čímž dostaneme řešení

$$\ddot{x} = 0 \quad (5.13)$$

$$\dot{x} = v_0 \quad (5.14)$$

$$x(t) = x_0 + v_0 t \quad (5.15)$$

odpovídající rovnoměrnému přímočarému pohybu (samozřejmě podél zvolené osy x) s rychlostí v_0 a počáteční polohou $x_{(t=0)} = x_0$.

5.2.2 Konstantní síla: $F = F_0$

Konstantní síla F_0 působící na HB mu uděluje konstantní zrychlení $a = F/m$. Pohybová rovnice

$$m\ddot{x} = F_0 \quad (5.16)$$

má rovněž zřejmé řešení (s toutéž interpretací x_0 a v_0)

$$\ddot{x} = \frac{F_0}{m} \quad (5.17)$$

$$\dot{x} = v_0 + \frac{F_0}{m}t \quad (5.18)$$

$$x(t) = x_0 + v_0t + \frac{1}{2} \frac{F_0}{m}t^2. \quad (5.19)$$

Znáмым příkladem je **volný pád** z výšky $z = h$. Počáteční rychlost je nulová ($v_0 = 0$), působící síla je $F_0 = -mg$ při obvyklé orientaci osy z vzhůru, takže řešení je

$$z(t) = h - \frac{1}{2}gt^2. \quad (5.20)$$

Podobně **svislý vrh** z výšky $z = h_0$ vzhůru rychlostí $v_0 > 0$ má řešení

$$z(t) = h_0 + v_0t - \frac{1}{2}gt^2. \quad (5.21)$$

5.2.3 Netlumený harmonický oscilátor: $F = -kx$

Ve fyzice nazýváme harmonickým oscilátorem hmotný bod mající jistou rovnovážnou polohu x_r a podrobený síle, která ho při vychýlení vrací do této polohy, přičemž velikost síly je úměrná výchylce od rovnovážné polohy; koeficientem úměrnosti je **pružnost** $k > 0$. Zvolíme-li pro jednoduchost počátek osy x právě v bodě x_r , má síla tvar

$$F(x) = -kx, \quad (5.22)$$

a pohybová rovnice zní

$$m\ddot{x} = -kx. \quad (5.23)$$

Zapišeme ji v obvyklém anulovaném tvaru

$$m\ddot{x} + kx = 0, \quad (5.24)$$

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0. \quad (5.25)$$

Protože platí $m > 0$ i $k > 0$, můžeme zavést

$$\omega_0 := \sqrt{\frac{k}{m}} > 0. \quad (5.26)$$

Obvyklým postupem hledáme řešení ve tvaru $e^{\lambda t}$, čímž dostaneme charakteristickou rovnici

$$\lambda^2 + \omega_0^2 = 0 \quad (5.27)$$

s řešením

$$\lambda = \pm i\omega_0 \quad (5.28)$$

Fyzikálně relevantní řešení je ovšem jen reálná funkce; můžeme ji zapsat kterýmkoli z dále uvedených tvarů, vždy se dvěma konstantami volitelnými podle počátečních podmínek (označení indexů 1, 2 u φ , t , C je libovolné). Okamžitá poloha je

$$x = x_m \sin(\omega_0 t + \varphi_1) \quad (x_m, \varphi_1) \quad (5.29)$$

$$= x_m \cos(\omega_0 t + \varphi_2) \quad (x_m, \varphi_2) \quad (5.30)$$

$$= x_m \sin(\omega_0(t - t_1)) \quad (x_m, t_1) \quad (5.31)$$

$$= x_m \cos(\omega_0(t - t_2)) \quad (x_m, t_2) \quad (5.32)$$

$$= A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t \quad (A, B) \quad (5.33)$$

$$= \dots$$

$$= \Re C_{\pm} e^{\pm i\omega_0 t} \quad (\text{komplexní } C_{\pm} = C_{1\pm} + i C_{2\pm}) \quad (5.34)$$

V posledním případě se velmi často nepíše značka reálné části $\Re$ a rozumí se jaks automaticky, případně se připsuje „+ c.c.“, čímž se rozumí součet s komplexně sdruženým výrazem (slušelo by se doplnit $\frac{1}{2}$). Toto není problém při lineárních operacích; pozor je však potřeba dát tehdy, kdy potřebujeme např. druhou mocninu polohy či rychlosti, třeba pro výpočet energie.

Z časové závislosti polohy určíme snadno všechny ostatní fyzikální veličiny, např. podle rov. (5.30)

$$\text{rychlost } v = -x_m \omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_2) \quad (5.35)$$

$$\text{zrychlení } a = -x_m \omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \varphi_2) = -\omega_0^2 x \quad (5.36)$$

Pro harmonické kmity se užívají následující termíny (formulované např. pro rov. (5.30)):

$$\text{amplituda} \quad x_m \quad (5.37)$$

$$\text{fáze} \quad \omega_0 t + \varphi_2 \quad (5.38)$$

$$\text{počáteční fáze} \quad \varphi_2 \quad (5.39)$$

$$\text{úhlová frekvence} \quad \omega_0 \quad (5.40)$$

$$\text{frekvence} \quad f = \omega_0 / 2\pi \quad (5.41)$$

$$\text{perioda} \quad T = 1/f \quad (5.42)$$

Synonyma: kruhová = úhlová; kmitočet = frekvence; doba kmitu = perioda. Někdy se místo „počáteční fáze“ užívá označení „fázová konstanta“. Není to moc vhodné, protože nejde o konstantu ve fyzikálním smyslu.

Připomeňme, že síla $F = -kx$ má **potenciál**

$$U(x) = \frac{1}{2} k x^2 + U_0 = \frac{1}{2} m \omega_0^2 x^2 + U_0 \quad (5.43)$$

s libovolně zvolenou konstantou U_0 , protože platí $\vec{F} = -\mathbf{grad} U$ (zde tedy $F = -dU/dx$). Odtud plyne, že se při pohybu harmonického oscilátoru zachovává celková mechanická energie.

Potenciál u síly pružnosti splývá s potenciální energií, protože síla pružnosti pružiny nezávisí na hmotnosti (náboji apod.) kmitajícího objektu.

Harmonický oscilátor se ve fyzice vyskytuje velice často, mj. jako první přiblížení pro chování soustavy (reprezentované HB) v blízkém okolí stabilní rovnováhy. Je to zřejmé z matematického hlediska: potenciál v místě x_r stabilní rovnováhy (zvolíme $x_r = 0$) musí nabývat minima. Je-li však potenciál v okolí nuly analytický, lze ho rozvinout v Taylorovu mocninou řadu:

$$U(x) = U_0 + U_1 x + U_2 x^2 + \mathcal{O}(x^3) \quad (5.44)$$

Z podmínky extrému plyne $U_1 = 0$ (pro minimum navíc $U_2 > 0$), takže při zanedbání členů x^3 a vyšších dostáváme právě potenciál harmonického oscilátoru (rov. (5.43)). Nelze-li členy $\mathcal{O}(x^3)$ zanedbat (např. vyjde-li $U_2 = 0$), jde o *anharmonický oscilátor*.

Obvyklá realizace je např. závaží hmotnosti m upevněné na pružině s tuhostí k . Zde je však nutno zajistit nesnadnou podmínku, aby vlastní hmotnost m_P pružiny byla zanedbatelná vůči hmotnosti m zkoumané částice. V opačném případě nelze zanedbat setrvačnost pružiny (resp. jejích částí) oproti setrvačnosti částice a museli bychom zkoumat limitní případ $N \rightarrow \infty$ složitě soustavy tvořené řetízem N částic hmotnosti $\mu = m_P/N$ spojených pružinami, každá o tuhosti k , zakončeným jednou částicí hmotnosti m .

Počáteční podmínky mohou být nejrůznější. Často se ale vyskytují dva typické případy:

- $x_0 \neq 0, v_0 = 0$: částici drženou mimo rovnovážnou polohu v okamžiku $t = 0$ volně vypustíme;
- $x_0 = 0, v_0 \neq 0$: částici vychýlíme z rovnovážné polohy úderem v okamžiku $t = 0$. Má-li narážející předmět rychlost w a je-li jeho hmotnost $M \gg m$ podstatně větší než hmotnost m částice, udělí ji rychlost $v_0 = 2w$.

5.2.4 Harmonický oscilátor s předpětím: $F = -kx + F_0$

Uvažujme sílu poněkud obecnější (např. na nehmotné pružině visí závaží a působí na něj i zemská tíže). Síla má pak tvar

$$F(x) = -kx + F_0, \quad (5.45)$$

a pohybová rovnice (nehomogenní, ale stále lineární) zní

$$m\ddot{x} + kx = F_0. \quad (5.46)$$

Její řešení je opět triviální. Jde o typ rov. (5.7) a její partikulární řešení je zřejmě např.

$$kx_r = F_0, \text{ tedy } x_r = \frac{F_0}{k}. \quad (5.47)$$

V případě pružiny se tedy závaží posune dolů o délku $d = \frac{mg}{k}$ a HB kolem nové polohy x_r harmonicky kmitá s toutéž frekvencí, rychlostí atd. jako dříve, bez předpětí.

Obecné řešení je (např. – viz rov. (5.30))

$$x - x_r = x_m \cos(\omega_0 t + \varphi_2), \quad (5.48)$$

kde nová rovnovážná poloha je $x_r = \frac{F_0}{k}$.

V řešení tedy nepřibyl žádný zajímavější jev. V dalším proto opět uvažujeme pro jednoduchost jen harmonický oscilátor bez předpětí.

5.2.5 Tlumený harmonický oscilátor: $F = -kx - h\dot{x}$

Chceme uvažovat realističtější situaci, kdy je pohyb harmonického oscilátoru nějak tlumen. Seznámili jsme se s třemi jednoduchými modely tlumení:

1. Suché tření (mezi pevnými tělesy; závislé na normálovém tlaku, málo závislé na rychlosti);
2. Odpor tekutého prostředí (kapalina či plyn) při malých rychlostech, kdy se uplatní hlavně vazkost prostředí; odpor prostředí je úměrný rychlosti pohybu HB;
3. Odpor tekutého prostředí při větších rychlostech, kdy se uplatní hlavně „rozhrnování“ prostředí; odpor je úměrný energii rozhrnované tekutiny, tedy čtverci rychlosti pohybu HB.

Označíme-li $1/M$ (jednotka: mach) velikost rychlosti vln v tekutině, pak cca od $\frac{1}{10}M$ se začne zřetelněji projevovat stlačitelnost tekutiny a s ní zcela nové jevy, jako rázová vlna u zvuku. Lze je hezky pozorovat na rozhraní voda-vzduch, kde je rychlost povrchových vln velmi nízká, centimetry za sekundu. Rychlost zvuku ve vzduchu je řádově 330 m/s, ve vodě asi 1 km/s.

Budeme se zabývat případem 2, který je velmi častý v praxi (např. kmitání tlumené vzduchem, ale i kmitání, kdy se po sobě pohybují pevná tělesa, jejichž styčná plocha je pro snížení odporu namazána olejem). Pro nás má nyní praktickou výhodu, že vede na lineární rovnici, kterou umíme vyřešit do všech podrobností.

Síla tření F_{tr} směřuje proti rychlosti pohybu. Výsledná síla má proto tvar

$$F(x) = F_{\text{pruž}} + F_{\text{tr}} = -kx - h\dot{x} \quad , \quad (5.49)$$

a pohybová rovnice zní

$$m\ddot{x} + h\dot{x} + kx = 0 \quad . \quad (5.50)$$

Stejně jako dříve zavedeme

$$\omega_0 := \sqrt{k/m} \quad (5.51)$$

a dále součinitel tlumení vztahem

$$\delta := h/2m ; \quad \delta > 0 \quad . \quad (5.52)$$

Jeho převrácená hodnota se často nazývá časová konstanta: $\tau = 1/\delta$. (Opět: termín „časový parametr“ by byl správnější.) Pohybová rovnice dostane tvar

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad . \quad (5.53)$$

Řešíme ji opět stejně: hledáme řešení ve tvaru $x = e^{\lambda t}$. Charakteristická rovnice zní

$$\lambda^2 + 2\delta\lambda + \omega_0^2 = 0 \quad . \quad (5.54)$$

Je to kvadratická rovnice s diskriminantem $D = 4(\delta^2 - \omega_0^2)$ a řešení zřejmě závisí na tom, která z veličin δ a ω_0 je větší. Podle toho můžeme rozlišit tři případy:

1) **tlumené harmonické kmity:** $\delta < \omega_0$;

2) **aperiodický pohyb:** $\delta > \omega_0$;

3) **mezní aperiodický pohyb:** $\delta = \omega_0$.

Probereme je postupně.

1) **Tlumené harmonické kmity:** $\delta < \omega_0$

Zavedeme-li

$$\omega := \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} > 0 \quad , \quad (5.55)$$

dostaneme ihned obecné řešení, např.

$$x(t) = C_+ e^{(-\delta + i\omega)t} + C_- e^{(-\delta - i\omega)t} \quad (5.56)$$

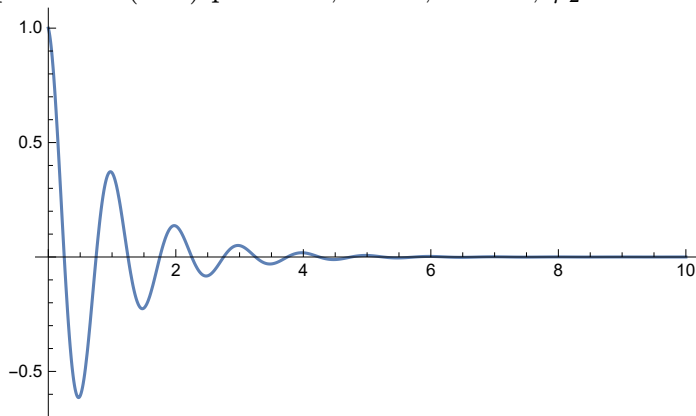
$$= (A \cos \omega t + B \sin \omega t) e^{-\delta t} \quad (5.57)$$

$$= C e^{-\delta t} \cos(\omega t + \varphi_2) \quad , \quad (5.58)$$

z něhož je zřejmý tvar pohybu. HB kmitá (teoreticky nekonečněkrát) kolem rovnovážné polohy, přičemž každý další kmit je oproti předchozímu zeslaben ve stálém poměru

$$1 : \beta = 1 : e^{-\delta T} = 1 : e^{-\frac{2\pi\delta}{\omega}} \quad . \quad (5.59)$$

Je zřejmé, že nulové body funkce $x(t)$ jsou od sebe vzdáleny o $\frac{1}{2}T$, kde $T = \frac{2\pi}{\omega}$ je perioda tlumených kmitů. Výpočtem však ověříme, že i maxima a minima této funkce (zjistíme je obvyklým způsobem, tj. anulováním derivace) mají tutéž periodu, třebaže *neleží* uprostřed mezi nulovými body. Obrázek je podle rov. (5.58) pro $\delta = 1$; $C = 1$; $\omega = 2\pi$; $\varphi_2 = 0$.



2) **Aperiodický pohyb:** $\delta > \omega_0$

Tentokrát zavedeme naopak

$$\Delta := \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} > 0 \quad (0 < \Delta < \delta) \quad (5.60)$$

a dostaneme ihned jako obecné řešení např.

$$x(t) = x_1 e^{-(\delta + \Delta)t} + x_2 e^{-(\delta - \Delta)t} \quad , \quad (5.61)$$

Protože je zřejmě $\delta > \Delta$, jsou oba exponenty v rov. (5.58) pro $t > 0$ záporné a s rostoucím časem výchylka x klesá exponenciálně k nule.

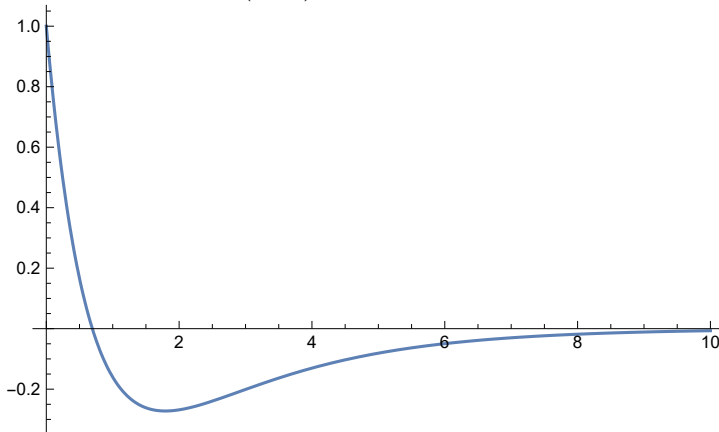
Snadno ověříme, že počáteční výchylka x_0 je rovna $x_0 = x_1 + x_2$, počáteční rychlost v_0 je rovna $v_0 = -\delta x_0 + \Delta(x_2 - x_1)$.

Okamžitá výchylka má (v závislosti na hodnotách a znaménkách x_1, x_2) nejvýše jeden extrém na intervalu $]0, +\infty[$.

Snadný rozbor ukáže, že jsou právě tři možnosti: HB se z počáteční polohy své rovnovážné poloze

1. monotonně přibližuje;
2. vzdaluje až do nejvzdálenějšího bodu trajektorie, odkud se už monotonně vrací do rovnovážné polohy.
3. přibližuje, přeběhne ji a pokračuje do nejvzdálenějšího bodu trajektorie, odkud se už monotonně vrací do rovnovážné polohy;

Obrázek je podle rov. (5.61) pro $\delta = 1$; $x_1 = 2$; $x_2 = -1$; $\delta = 1$; $\Delta = 0,5$.



3) Mezní aperiodický pohyb: $\delta = \omega_0$

V tomto případě má charakteristická rovnice dvojnásobný kořen 0. Řešení má proto poněkud jiný tvar (viz rov. (5.6)):

$$x(t) = C_1 e^{-\delta t} + C_2 t e^{-\delta t} = (C_1 + C_2 t) e^{-\delta t} \quad (5.62)$$

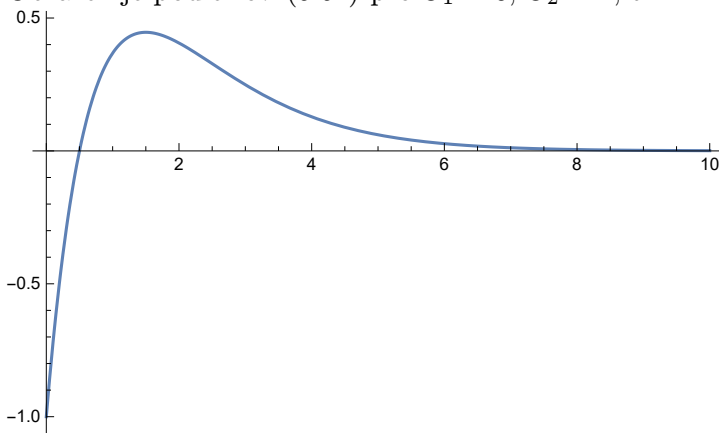
Charakter řešení i jeho vlastnosti jsou však podobné předchozímu, tedy aperiodickému pohybu; speciálně i zde je nejvýše jeden extrém a tři typy přibližování k rovnovážné poloze.

Z praktického hlediska je zvláště významné, že za stejných okolností (m , k) a při různém tlumení h (resp. δ) vede mezní tlumení k nejrychlejšímu přiblížení rovnovážné poloze.

Přesněji řečeno: Při zadané odchylce ε je to právě mezní tlumení $\delta = \omega_0$, při kterém je minimální ten čas $T(\varepsilon, \delta)$, pro který v každém pozdějším čase $t > T(\varepsilon, \delta)$ platí

$$|x(t)| < \varepsilon. \quad (5.63)$$

Obrázek je podle rov. (5.62) pro $C_1 = 0$; $C_2 = 1$; $\delta = 1$.



Společná terminologie pro oscilátor s tlumením

Ve všech třech případech se pro $t \rightarrow \infty$ poloha HB exponenciálně blíží rovnovážné poloze $x_r = 0$.

Pro puntikáře: „blíží se exponenciálně“ neznamená, že jde o exponenciálu (i součet dvou exponenciál s různými exponenty již není exponenciála), ale že průběh pohybu lze majorizovat exponenciální funkcí.

Popisujeme-li časový průběh popsaný funkcí

$$x = x_m e^{-\delta t} \cos(\omega(t - t_0) + \varphi_0), \quad (5.64)$$

pak veličinu δ nazýváme **součinitel tlumení**, součin tohoto součinitele s periodou nazýváme **logaritmický dekrement** Λ . Pro čistě exponenciální útlum

$$x = x_m e^{-\delta t} \quad (5.65)$$

zavádíme **časovou konstantu** (během které poklesne rozkmit na $1/e$ -násobek) τ . Platí tedy

$$\text{počáteční amplituda: } x_m \quad (5.66)$$

$$\text{počáteční fáze: } \varphi_0 \quad (5.67)$$

$$\text{úhlová frekvence: } \omega \quad (5.68)$$

$$\text{frekvence: } f = \omega/2\pi \quad (5.69)$$

$$\text{perioda: } T := 1/f = 2\pi/\omega \quad (5.70)$$

$$\text{součinitel tlumení: } \delta \quad (5.71)$$

$$\text{logaritmický dekrement: } \Lambda := -\ln \beta = \delta T = 2\pi\delta/\omega \quad (5.72)$$

$$\text{časová konstanta (časový parametr): } \tau := 1/\delta. \quad (5.73)$$

$$(\text{útlum}): \beta := e^{-\delta T} \quad (5.74)$$

Veličina β (značení ani název není předepsán normou) se často prostě nazývá útlum a udává, kolikrát poklesne amplituda za jednu periodu.

5.2.6 Vynucené kmity: $F = -kx - h\dot{x} + F(t)$

Obecné řešení

Předpokládejme, že na kmitající oscilátor působí vtíštěná vnější síla F_{vt} . Budeme se zabývat silou konkrétního tvaru

$$F_{vt}(t) = F_0 \cos \Omega t, \quad (5.75)$$

a to z několika důvodů, zejména

- jde o případ velmi častý a významný v praxi;
- protože pohybové rovnice jsou lineární, je každá lineární kombinace jejich řešení rovněž řešením původních rovnic. Z funkcí typu $\cos$ na pravé straně pak lineární kombinací (Fourierova transformace) můžeme ze získaných výsledků odvodit řešení pro prakticky všechny časově závislé vtíštěné síly $F_{vt}(t)$ na pravé straně, se kterými se v praxi můžeme setkat.

Pohybová rovnice má tedy tvar

$$m\ddot{x} + h\dot{x} + kx = F_0 \cos \Omega t, \text{ resp.} \quad (5.76)$$

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = a_0 \cos \Omega t, \quad (5.77)$$

kde jsme zavedli označení

$$a_0 := F_0/m. \quad (5.78)$$

Řešení budeme hledat způsobem uvedeným v kap. 5.1.2. Řešení příslušné homogenní rovnice, tedy rov. (5.53), známe – jde o jeden ze tří dříve rozebraných případů rov. (5.58), (5.61), (5.62), přičemž všechny alternativy ubývají s rostoucím časem exponenciálně k nule. Nyní tedy potřebujeme najít jedno řešení (partikulární integrál) rov. (5.76).

Pomůže nám fyzikální představa. Pod vlivem stále působící periodické síly tvaru $F(t) = F_0 \cos \Omega t$ bude zřejmě nakonec HB oscilovat s toutéž (vynucenou) úhlovou frekvencí Ω , jen s neznámou amplitudou x_m a fází φ_0 :

$$x(t) = x_m \cos(\Omega t + \varphi_0) \quad (\text{pro } t \rightarrow \infty). \quad (5.79)$$

Tato funkce se obvykle nazývá **řešením v ustáleném stavu**. (Úplné řešení vycházející z počátečních podmínek a zahrnující proto i řešení příslušné homogenní rovnice se nazývá **řešením v přechodovém stavu**, zejména pro malé hodnoty t , kdy členy s časem exponenciálně ubývající ještě nejsou zanedbatelné.)

Dosadíme proto funkci z rov. (5.79) do rov. (5.77), provedeme všechny derivace a upravíme na tvar

$$F \sin \Omega t + G \cos \Omega t = 0, \quad (5.80)$$

z něhož plynou (díky lineární nezávislosti funkcí $\sin \Omega t$ a $\cos \Omega t$) rovnosti

$$F = 0, \quad (5.81)$$

$$G = 0. \quad (5.82)$$

Dosazování je zcela mechanické, ale zabere dosti místa a času. Zjednodušíme si proto zápis zkratkami

$$\sin \Omega t \equiv S \quad (5.83)$$

$$\cos \Omega t \equiv C \quad (5.84)$$

$$\sin \varphi_0 \equiv s \quad (5.85)$$

$$\cos \varphi_0 \equiv c, \quad (5.86)$$

takže do rov. (5.77)

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = a_0 C \quad (5.87)$$

dosazujeme rov. (5.79) ve tvaru

$$\begin{aligned} x &= x_m \cos(\Omega t + \varphi_0) = x_m c C - x_m s S \\ \dot{x} &= -\Omega x_m \sin(\Omega t + \varphi_0) = -\Omega x_m c S - \Omega x_m s C \\ \ddot{x} &= -\Omega^2 x_m \cos(\Omega t + \varphi_0) = -\Omega^2 x_m c C + \Omega^2 x_m s S \end{aligned}$$

s výsledkem (po vytknutí x_m):

$$-\Omega^2 c C + \Omega^2 s S - 2\delta\Omega c S - 2\delta\Omega s C + \omega_0^2 c C - \omega_0^2 s S = \frac{a_0}{x_m} C \quad (5.88)$$

To je již naše požadovaná rov. (5.80), takže podle následujících rov. (5.81) a rov. (5.82) dostáváme dvě rovnice pro dvě neznámé a_0 a φ_0 (prostřednictvím $s = \sin \varphi_0$ a $c = \cos \varphi_0$):

$$-(\Omega^2 - \omega_0^2)c - 2\delta\Omega s = \frac{a_0}{x_m} \quad (\text{podle } C) \quad (5.89)$$

$$(\Omega^2 - \omega_0^2)s - 2\delta\Omega c = 0 \quad (\text{podle } S) \quad (5.90)$$

Umocněním každé z těchto rovnic na druhou a následným sečtením dostaneme

$$(\Omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\delta^2\Omega^2 = \left(\frac{a_0}{x_m}\right)^2, \quad (5.91)$$

takže po konečném dosazení $a_0 = F_0/m$ dostáváme řešení pro amplitudu výchylky

$$x_m = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\Omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\delta^2\Omega^2}} \quad (\text{amplituda}), \quad (5.92)$$

zatímco z rov. (5.90) vydělením c dostaneme pro fázový posuv vztah

$$\tan \varphi_0 = s/c = \frac{2\delta\Omega}{\Omega^2 - \omega_0^2} \quad (\text{fáze}). \quad (5.93)$$

Tím je partikulární řešení, totožné s ustáleným stavem, nalezeno; přičtením řešení homogenní rovnice, tedy podle okolností rov. (5.58), rov. (5.61), nebo rov. (5.62) získáme obecné řešení (zvané též „přechodové řešení“, zejména v čase t krátce po počátku:

$$\begin{array}{lcl} & \text{řešení homogenní rovnice} & \text{ustálený stav} \\ x(t) & = & x_{00} e^{-\delta t} \cos(\omega + \varphi_1) + x_m \cos(\Omega t + \varphi_0), \quad \text{resp.} \\ x(t) & = & x_{10} e^{-\delta t} + x_{11} t e^{-\delta t} + x_m \cos(\Omega t + \varphi_0), \quad \text{resp.} \\ x(t) & = & x_{01} e^{-(\delta+\Delta)t} + x_{02} e^{-(\delta-\Delta)t} + x_m \cos(\Omega t + \varphi_0). \end{array}$$

Dva parametry (x_{00}, φ_1 , resp. x_{10}, x_{11} , resp. x_{01}, x_{02}) v přechodovém řešení volíme tak, abychom splnili počáteční podmínky pro výchylku x_0 a rychlost $\dot{x}_0$ kmitající částice. Ostatní parametry byly definovány dříve.

Rozbor; rezonance výchylky při malém tlumení

Při malém tlumení δ oscilátoru se může stát, že při proměnné úhlové frekvenci Ω vnější síly bude mít výchylka x (nebo energie E , ...) výrazné maximum při jisté hodnotě $\Omega = \Omega_0$; říkáme, že dochází k *rezonanci* výchylky (energie, ...). Rozebereme tuto situaci analyticky.

Jde o případ tlumených harmonických kmitů (nikoli o aperiodický pohyb) a řešení je tedy dáno vzorcem

$$x(t) = Ce^{-\delta t} \cos(\omega t + \varphi_1) + x_m \cos(\Omega t + \varphi_0) \quad , \quad (5.94)$$

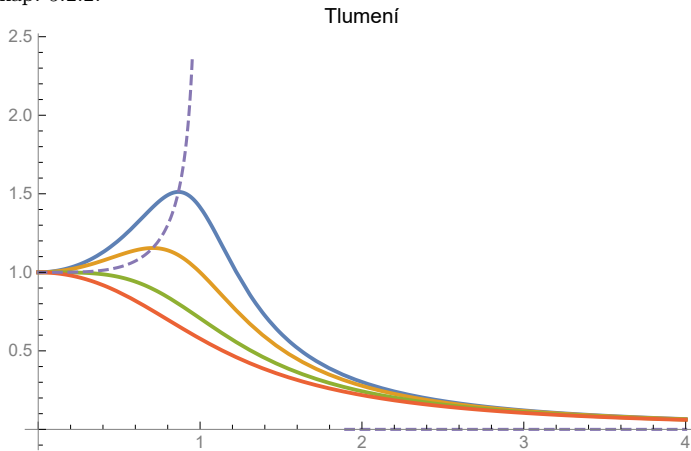
v němž zvolíme C, φ_1 tak, abychom splnili počáteční podmínky pro $x_{(t=0)}$ a $v_{(t=0)}$, zatímco amplituda x_m a fázový posuv φ_0 v ustáleném stavu jsou určeny rov. (5.92) a rov. (5.93):

$$x_m = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\Omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\delta^2 \Omega^2}} \quad , \quad (5.95)$$

$$\varphi_0 = \arctan \frac{2\delta \Omega}{\Omega^2 - \omega_0^2} \quad . \quad (5.96)$$

Kdy mají výrazy smysl? Jmenovatel výrazu v rov. (5.96) není nebezpečný, protože i pro $\Omega \rightarrow \omega_0$, kdy se jmenovatel blíží nule, se prostě φ_0 blíží $\frac{\pi}{2}$. V rov. (5.95) je ale jmenovatel odmocninou ze součtu dvou čtverců. Výraz má tedy smysl vždy, kromě jediného případu, když platí $\Omega = \omega_0$ (rezonance energie, jak uvidíme) a současně $\delta = 0$ (nulové tlumení); v takovém případě roste amplituda kmitů neomezeně.

Obvykle předpokládáme i $\Omega > 0$. Cvičně uvažte i případ $\Omega = 0$ (tj. stálá, „stejnoseměrná“ síla), kdy výraz v rov. (5.92) diverguje. Rozeberte si podrobně, co a proč znamená divergence výrazu fyzikálně; příslušná úloha je vám známa už z dřívějšíka – z kap. 5.2.2.



Vyšetříme, jak závisí amplituda x_m ustálených kmitů na úhlové frekvenci Ω vynucených kmitů. Na grafu je vynesena též funkce $x_m(\Omega)$ spojující maxima pro různé δ . V krajních hodnotách platí

$$\text{Pro } \Omega \rightarrow 0: \quad x_m \rightarrow \frac{F_0/m}{\sqrt{\omega_0^4}} = \frac{F_0/m}{k/m} = \frac{F_0}{k} \quad , \quad (5.97)$$

a to je, jak se dalo čekat, právě statická výchylka částice pod konstantní silou F_0 .

$$\text{Pro } \Omega \rightarrow \infty: \quad x_m \rightarrow \frac{F_0/m}{\sqrt{\Omega_0^4}} \rightarrow 0 \quad ; \quad (5.98)$$

čím rychlejší vynucené kmity, tím hůř je oscilátor stačí sledovat.

Maximum funkce $x_m(\Omega)$ nalezneme obvyklou cestou – anulováním derivace:

$$0 = \frac{dx_m}{d\Omega} = \left(\frac{F_0}{m} ((\Omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\delta^2 \Omega^2)^{-1/2} \right)' \quad (5.99)$$

$$= \frac{F_0}{m} \frac{-1}{2} \left(((\Omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\delta^2 \Omega^2) \right)^{-3/2} (2(\Omega^2 - \omega_0^2) \cdot 2\Omega + 4\delta^2 \cdot 2\Omega) \quad (5.100)$$

$$= \text{konst } 4\Omega(\Omega^2 - \omega_0^2 + 2\delta^2) \quad (5.101)$$

Vedle krajních bodů $(0; \infty)$ je tedy derivace nulová nanejvýš v jediném bodě Ω_r :

$$\Omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2} \quad (5.102)$$

pokud ovšem platí

$$\omega_0 > \sqrt{2}\delta \quad (5.103)$$

Tato podmínka je ostřejší než podmínka $\omega_0 > \delta$ nutná pro existenci tlumených kmitů (a nikoli aperiodického pohybu). Je-li splněna, pak při úhlové frekvenci Ω_r dojde k rezonanci amplitudy.

Limitní případ: nulové tlumení

Pokud by bylo opravdu $\delta = 0$ a vnucená frekvence by se přesně rovnala vlastní $\Omega = \omega_0$, pak by pohybová rovnice rov. (5.76) přešla na tvar

$$m\ddot{x} + kx = F_0 \cos \omega_0 t, \text{ resp.} \quad (5.104)$$

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = a_0 \cos \omega_0 t, \quad (5.105)$$

opět s označením

$$a_0 := F_0/m. \quad (5.106)$$

Partikulární řešení rovnice by však bylo nyní jiné. Podle toho, že by amplituda měla být s časem stále rostoucí sinusoida s frekvencí ω_0 , zkusíme funkci

$$x(t) = x_0 t \cos(\omega_0 t + \varphi_0) \quad (5.107)$$

a postupem stejným jako výše dostaneme konkrétní hodnoty x_0, φ_0 jako

$$x(t) = \frac{a_0}{2\omega_0} t \sin(\omega_0 t) \quad (5.108)$$

Jak je vidět, amplituda, rychlost i zrychlení by kolísavě rostly do nekonečna, což by jistě rychle narazilo na limity (působící síla pružnosti přestala být lineární a řídit se tedy vztahem $F = -kx$, s rostoucí rychlostí by přestalo být zanedbatelné tření apod.).

Energie

Zabývejme se nyní energií buzených tlumených kmitů.

Celková mechanická energie E_Σ se u netlumeného oscilátoru s časem nemění. Uvažujme-li např. rov. (5.30): $x(t) = x_m \cos(\omega_0 t + \varphi_2)$, $\dot{x}(t) = -\omega_0 x_m \sin(\omega_0 t + \varphi_2)$, pak platí

$$E_\Sigma = E_k + E_p = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} k x^2 = \frac{1}{2} m \omega_0^2 x_m^2. \quad (5.109)$$

U tlumeného oscilátoru klesá E_Σ s časem exponenciálně k nule díky činiteli $e^{-\delta t}$:

$$P = \frac{dE}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} k x^2 \right) = \dot{x}(m\ddot{x} + kx) = \dot{x}(-h\dot{x}) = -h\dot{x}^2. \quad (5.110)$$

U vynucených kmitů se zabýváme jen ustáleným stavem. Ten má průběh stejného tvaru jako volný harmonický oscilátor a udržuje si proto i stejnou energii. Je to však vyváženo tím, že vtisťená síla koná práci a dodává energii, která se díky tlumení ztrácí. Výkon síly je roven skalárnímu součinu síly a rychlosti (rov. (4.21)).

Rezonance energie

Energie E_z dodaná vtištěnou silou za dobu $T = 2\pi/\Omega$ jedné periody v ustáleném stavu je rovna

$$E_z = \int_0^T (-h\dot{x}^2)dt = -2\pi\delta\Omega m x_m^2 \quad (5.111)$$

a průměrný ztrátový výkon je

$$P = -\frac{E}{T} = \delta\Omega^2 m x_m^2 = \frac{\delta\Omega^2 F_0^2/m}{(\Omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\delta^2\Omega^2} \quad (5.112)$$

Tato funkce má sice podobný průběh jako amplituda kap. 5.95 vyšetřovaná dříve, obvyklým způsobem můžeme najít extrémy anulováním derivace podle Ω , ale tentokrát je podmínkou rezonance (energie)

$$2\Omega\omega_0^2(\Omega^2 - \omega_0^2) = 0 \quad \Rightarrow \quad \Omega = \omega_0 \quad (5.113)$$

nezávisle na tlumení δ , resp. h .

Činitel jakosti

Činitelem Q jakosti kmitající soustavy (např. rezonančního obvodu) nazýváme poměr průměrné energie kmitající soustavy ku průměrné energii E_z , kterou vtištěná síla dodá během jednoho cyklu, aby udržela ustálené kmitání:

$$Q = \frac{E_\Sigma}{E_z} = \frac{2\pi\frac{1}{2}m\omega_0^2 x_m^2}{2\pi\delta\Omega m x_m^2} \quad (5.114)$$

$$\text{v rezonanci:} \quad Q = \frac{\omega_0}{2\delta} \quad (5.115)$$

5.2.7 Skládání kmitů

Princip superpozice

Pokud součet příčin dává prostý součet důsledků, říkáme že platí princip superpozice. Lze snadno nahlédnout, že tento princip je splněn právě tehdy, jsou-li pohybové rovnice lineární (v proměnných, které popisují konfiguraci soustavy). Protože až dosud probírané pohybové rovnice lineární byly, byl tím splněn předpoklad principu superpozice.

Princip superpozice umožňuje používat plně redukcionismus a řešit namísto složité rovnice několik jednodušších dílčích rovnic — konkrétně zde namísto složité pravé strany (vtištěné síly) vyřešit pohybovou rovnici s pravou stranou sinusoidální; pro libovolný jiný průběh pravé strany použijeme její Fourierovy řady a převedeme tím novou úlohu na součet úloh známých, tj. řešením složité úlohy bude prostý součet řešení úloh jednodušších.

Kmity ve stejném směru

Úlohy s netlumenými kmity a s ustálenými stavy vynucených kmitů vedly na sinusoidální řešení typu např.

$$x_1 = x_{m1} \cos(\omega_1 t + \varphi_1) \quad (5.116)$$

$$x_2 = x_{m2} \cos(\omega_2 t + \varphi_2) \quad (5.117)$$

Často se vyskytují dva speciální případy: úhlové frekvence ω_1, ω_2 jsou

stejné , tj. $\omega_1 = \omega_2$, amplitudy různé

blízké , tj. $\omega_1 \approx \omega_2$, přesněji $\omega_1 - \omega_2 \ll \omega_1 + \omega_2$, amplitudy stejné.

Pro **stejně** úhlové frekvence lze snadno dokázat, že součtem dvou sinusoidálních funkcí s týmiž frekvencemi je opět sinusoidální funkce téže frekvence, jen s jinou amplitudou i fází:

$$x_1 + x_2 = x_{m1} \cos(\omega t + \varphi_1) + x_{m2} \cos(\omega t + \varphi_2) \quad (5.118)$$

$$= x_{m12} \cos(\omega t + \varphi_{12}) \quad (5.119)$$

kde

$$x_{m12} = \sqrt{x_{m1}^2 + x_{m2}^2 + 2x_{m1}x_{m2} \cos(\varphi_1 - \varphi_2)} \quad (5.120)$$

$$\varphi_{12} = \arctan \frac{x_{m1} \sin \varphi_1 + x_{m2} \sin \varphi_2}{x_{m1} \cos \varphi_1 + x_{m2} \cos \varphi_2} \quad (5.121)$$

Odvození (nemáme-li právě po ruce Wolfram Mathematica):

Označme pro stručnost $s := \sin \omega t$, $c := \cos \omega t$, $S_k := \sin \varphi_k$, $C_k := \cos \varphi_k$, $X_k := x_{mk}$. Potom máme dokázat, že pravé strany rov. (5.118), (5.119) jsou si rovny. Upravíme funkce součtu úhlů:

$$X_1 c C_1 - X_1 s S_1 + X_2 c C_2 - X_2 s S_2 = X_{12} c C_{12} - X_{12} s S_{12} \quad (5.122)$$

Protože s , c jsou lineárně nezávislé, musí platit

$$X_1 C_1 + X_2 C_2 = X_{12} C_{12} \quad (5.123)$$

$$X_1 S_1 + X_2 S_2 = X_{12} S_{12} \quad (5.124)$$

Umocněním rovnic na druhou a sečtením dostáváme rov. (5.120), z podílů obou rovnic pak rov. (5.121).

Amplituda je zřejmě největší, jsou-li oba kmity „ve fázi“, tj. $\varphi_1 = \varphi_2$ a nejmenší, jsou-li oba kmity „v protifázi“, tj. $\varphi_1 - \varphi_2 = \pi$; ve druhém případě pro $x_{m1} = x_{m2}$ kmity vymizí, amplituda výsledku je nulová.

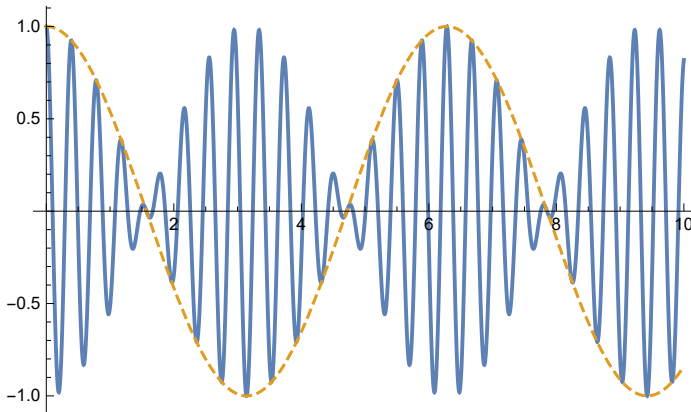
Pro **blízké** úhlové frekvence se stejnou amplitudou x_m upravíme součet s využitím rovnosti $\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$:

$$x_1 + x_2 = x_m \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + x_m \cos(\omega_2 t + \varphi_2) \quad (5.125)$$

$$= 2x_m \cos \left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t + \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2} \right) \cos \left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t + \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} \right) \quad (5.126)$$

Rázy Výsledek rov. (5.126) interpretovat jako *modulované kmity*, tj. kmity s úhlovou frekvencí $(\omega_1 + \omega_2)/2$ a s (poměrně pomalu) proměnnou amplitudou, avšak nikoli $\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}$ (jak by se zdálo z rov. (5.126)), ale dvakrát vyšší, totiž $|\omega_1 - \omega_2|$. „Záporná amplituda“ není totiž odlišitelná od kladné a *obalová křivka* — funkce typu $|\cos \alpha|$ — má periodu dvakrát větší než funkce $\cos \alpha$.

Jsou-li si v akustice úhlové frekvence ω_1 , ω_2 blízké natolik, že odpovídající rozdíl frekvencí $|f_1 - f_2| = |\omega_1 - \omega_2|/2\pi$ je menší než cca 10 Hz, dokážeme maxima sluchem vnímat a odlišit. Tento akustický jev se pak nazývá *rázy* (dříve též *zázněje*). Obrázek je podle rov. (5.125) pro $x_m = 0,5$; $\omega_1 = 17$; $\omega_2 = 15$; $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$ spolu s čárkovanou funkcí $\cos t$ (frekvence $\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}$).



Kmity ve směrech navzájem kolmých. Lissajousovy obrazce

Kmitá-li částice dvěma harmonickými kmity ve směrech navzájem kolmých, např.

$$\begin{aligned} x(t) &= x_m \cos(\omega_1 t + \varphi_1) \\ y(t) &= y_m \cos(\omega_2 t + \varphi_2) \end{aligned} \quad (5.127)$$

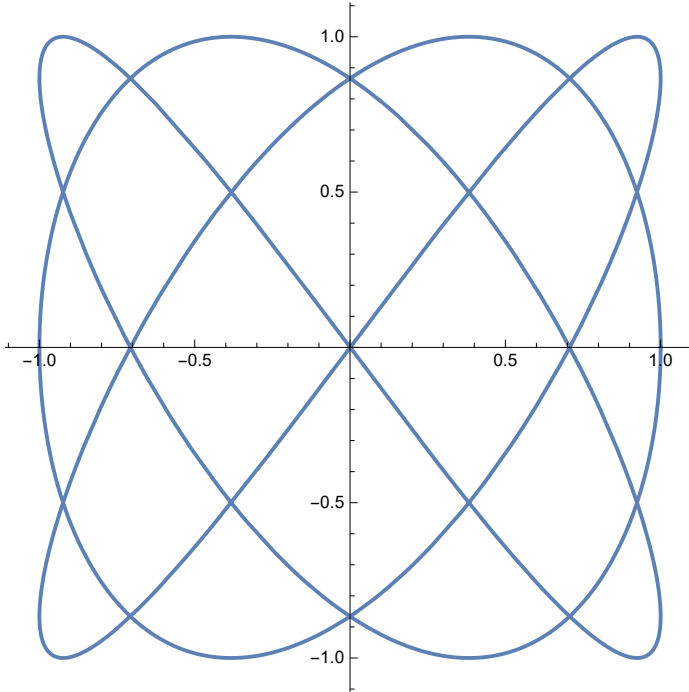
je zajímavé sledovat její trajektorii $F(x, y) = 0$, tedy vyloučit čas t z právě uvedených závislostí. Amplitudy x_m, y_m jen určují měřítko výsledné křivky a nejsou zajímavé; zvolíme je $x_m = y_m = 1$.

Jsou-li úhlové frekvence ω_1, ω_2 v *racionálním* poměru $\omega_1 : \omega_2 = l : m$ s celými nesoudělnými l, m , pak je trajektorií uzavřená křivka dotýkající se opsaného čtverce právě v l bodech ve směru x a v m bodech ve směru y . Označíme-li totiž $\omega_{12} = \omega_1/l = \omega_2/m$, pak doba $T_{12} = 2\pi/\omega_{12}$ je nejmenší společnou periodou funkcí $x(t), y(t)$, tj. platí $x(t) = x(t + T_{12}), y(t) = y(t + T_{12})$ a částice (poprvé) znovu pokračuje po své předchozí trase. Protože mezitím nabyla l -krát funkce $x(t) = \cos(l\omega_{12}t + \varphi_1)$ svého minima i maxima, má trajektorie se svou (čtvercovou) hranicí l společných bodů ve směru osy x a podobně m společných bodů ve směru osy y .

Je-li poměr úhlových frekvencí $\omega_1 : \omega_2$ iracionální, pak trajektorie vyplňuje hustě čtverec, tj. ke každému bodu B uvnitř čtverce a ke každému $\varepsilon > 0$ existuje čas t takový, že v okamžiku t je bod trajektorie bodu B blíže než ε .

Generujeme-li na počítači trajektorii tak, že se s plynoucím časem t zobrazuje vždy úsek trajektorie $[t - t_0; t]$ s pevným t_0 , dostaneme esteticky hezké časově proměnné obrazce — „hada“ elegantně se vinoucího uvnitř obdélníka. Viz Wikipedie, Lissajousovy obrazce.

Obrázek je podle rov. (5.127) pro $x_m = y_m = 1; \omega_1 = 3; \omega_2 = 4; \varphi_1 = 0; \varphi_2 = \pi/2$.



Lissajousových obrazců generovaných dvěma signály na osciloskopu se dříve, kdy nebyla digitální technika rozvinutá jako nyní, často užívalo pro měření frekvence neznámého signálu porovnáním se signálem známé frekvence.

5.2.8 Vázané kmity. Kvazičástice

Uvažujme dva stejné oscilátory kmitající samostatně s touž úhlovou frekvencí $\omega_A = \sqrt{\frac{k}{m}}$. Zavedeme-li mezi nimi vazbu

$$F_P := -k_P(x_2 - x_1) \quad (5.128)$$

(např. pružinou s tuhostí k_P), pak vedle ω_A se objeví i nová úhlová frekvence $\omega_B = \sqrt{\frac{k+2k_P}{m}}$. Pro slabou vazbu ($k_P \ll k$) zde může dojít k rázům uvedeným výše; původní oscilátory si navzájem jakoby přelévají energii. Vše snadno zjistíme řešením soustavy pohybových rovnic:

$$m\ddot{x}_1 = -kx_1 + k_P(x_2 - x_1) = -(k + k_P)x_1 + k_Px_2 \quad (5.129)$$

$$m\ddot{x}_2 = -kx_2 + k_P(x_1 - x_2) = k_Px_1 - (k + k_P)x_2 \quad (5.130)$$

odkud sečtením a odečtením rovnic dostaneme ihned

$$m\ddot{x}_1 + m\ddot{x}_2 = -k(x_1 + x_2) \quad (5.131)$$

$$m\ddot{x}_2 - m\ddot{x}_1 = -(k + 2k_P)(x_2 - x_1) \quad (5.132)$$

a dosazením $\xi_A = x_1 + x_2$, $\xi_B = x_2 - x_1$

$$m\ddot{\xi}_A = -k \xi_A \quad (5.133)$$

$$m\ddot{\xi}_B = -(k + 2k_P)\xi_B \quad (5.134)$$

$$(5.135)$$

Soustavu dvou spřažených oscilátorů jsme převedli na dvě nezávislé rovnice popisující nové dva oscilátory – nezávislé *kvazičástice* s polohami ξ_A , ξ_B , s efektivními hmotnostmi m a s úhlovými frekvencemi

$$\omega_A = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (5.136)$$

$$\omega_B = \sqrt{\frac{k + 2k_P}{m}} \quad (5.137)$$

$$(5.138)$$

Takto se vyšetřují např. kmity v pevné látce a kvantují se na *fony*, viz dále.

Je poučné rozmyslet si zde, jak se to má s „existencí“ a „neexistencí“ částic a kvazičástic. Soustava interagujících částic se pod vlivem vnějších vln opravdu chová (rezonuje či nerezonuje) jako soustava dvou neinteragujících kvazičástic, jejichž přítomnost v soustavě tedy opravdu můžeme zjistit přímým měřením. Polohu kvazičástic však přímým měřením nezjistíme. Tu můžeme vypočítat z poloh skutečných částic se započtením jejich interakcí — a naopak, ze známých hodnot veličin kvazičástic bychom mohli vypočítat i polohu a ostatní veličiny skutečných částic. A především – obojí, částice i kvazičástice, jsou modely reality. Každý z nich je někde názornější než druhý.

5.2.9 ←Řetízek oscilátorů (podélné kmity)

Uvažujme řetízek N stejných částic pohyblivých jen po ose x ; číslujeme je 1 až n . Každá nechť je spojena pružinou s tuhostí k se svým nejbližším sousedem. Předpokládejme, že v rovnováze mají částice tutéž vzájemnou vzdálenost a (u krystalů „mřížkový parametr“) a tedy n -tá částice má

$$\text{rovnovážnou polohu} \quad x_{n0} = na, \quad (5.139)$$

$$\text{okamžitou polohu (odchýlenou o } u_n(t)) \quad x_n(t) = na + u_n(t) \quad (5.140)$$

a pohybové rovnice jsou tedy

$$m\ddot{x}_n = k(x_{n+1} - x_n) - k(x_n - x_{n-1}) \quad (5.141)$$

$$\text{resp.} \quad \ddot{u}_n = -\omega_0^2(u_{n-1} - 2u_n + u_{n+1}) \quad (5.142)$$

s obvyklým zavedením $\omega_0 := \sqrt{k/m}$. Rovnice platí pro $n = 2$ až $n = N - 1$; krajní body 1 a N však nemají po jedné straně souseda a tedy by chyběla příslušná síla. Zesymetrizujeme rovnice *cyklickými okrajovými podmínkami*¹; rozšíříme řetízek, ale periodicky s periodou N . Ztotožníme tedy N -tou částici s nultou; při větším N si můžeme představit, že řetízek stočíme do kruhu. Pak budou rov. (5.141), (5.142) univerzálně platné pro všechna n (můžeme je brát $\bmod N$). Rovnice jsou spřažené a potřebovali bychom je separovat. Cítíme přitom, že v cyklickém řetízku si jsou všechny částice „rovnoprávné“, nemělo by záležet na tom, která — v kruhu — bude první. Hledejme proto u_n ve tvaru periodické funkce proměnné n se zatím neznámými parametry q , ω

$$u_n = u_m e^{i(2\pi qn/N - \omega t)} \quad (5.143)$$

¹Ve 3D případě se takové cyklické okrajové podmínky nazývají *Bornovy-Kármánovy*.

Pro celočíselná q má u_n periodu N v parametru n (jak požadujeme). Dosazením dostaneme

$$-\omega^2 u_n = \omega_0^2 u_n (-e^{-i2\pi q/N} + 2 - e^{+i2\pi q/N}) \quad (5.144)$$

$$= -\omega_0^2 u_n \left(2 + 2 \cos \frac{2\pi q}{N} \right) \quad (5.145)$$

$$\frac{\omega^2}{\omega_0^2} = 2 \left(1 + \cos \frac{2\pi q}{N} \right) = 4 \left(\sin \frac{2\pi q}{2N} \right)^2 \quad (5.146)$$

$$\omega = 2\omega_0 \left| \sin \frac{\pi q}{N} \right| \quad (5.147)$$

Tím jsme dostali pro různá celá q povolené úhlové frekvence $\omega(q)$.

Fyzikální smysl parametru q :

5.2.10 $\leftrightarrow$ Struna

5.2.11 $\leftrightarrow$ Řetízek s bází

5.3 Speciální pohyby 3D: centrální pole

5.3.1 Definice centrálního pole

Silové pole $\vec{f}(\vec{r})$ nazýváme centrálním, jestliže

- síla $\vec{f}(\vec{r})$ směřuje vždy k jistému bodu² O zvanému *centrum síly*;
- má velikost f závislou jen na vzdálenosti r od tohoto bodu (nikoli na směru $\vec{r}_0$).

V bodě O zpravidla volíme počátek vztažné soustavy; pole $\vec{f}$ v něm není definováno. Pak

$$\vec{f}(\vec{r}) = f(r)\vec{r}_0 \quad (5.148)$$

kde $\vec{r}_0 = \vec{r}/r$ je jednotkový vektor příslušný nenulovému polohovému vektoru $\vec{r}$.

5.3.2 Obecné vlastnosti centrálních polí

Centrální pole je konzervativní

Lze dokázat, že každé centrální pole je *konzervativní*. Nejjednodušší je konstruktivní důkaz:

Označme $F(r)$ primitivní funkci k funkci $f(r)$, tj. platí $F(r) = \int f(r)dr$; $f(r) = \frac{dF(r)}{dr}$.

Pak $U(r) = -F(r) + \text{konst} = -\int f dr + \text{konst}$ je potenciální energií silového pole $\vec{f}$, tj.

$$\vec{f}(\vec{r}) = -\text{grad } U(r) \quad (5.149)$$

Důkaz si proveďte přímou derivací.

Centrální pole zachovává moment hybnosti $\vec{b}$

Zákon zachování momentu hybnosti $\vec{b} := \vec{r} \times \vec{p}$ v centrálním poli dostaneme snadno. Moment $\vec{M}$ centrální síly vůči centru je totiž vždy roven nule:

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{f} = \vec{r} \times f\vec{r}_0 = \vec{0} \quad (5.150)$$

a protože časová změna momentu hybnosti je rovna momentu výslednice sil (rov. (4.6)), nemění se moment hybnosti s časem, a to ani co do směru (z toho vyplývá rovinný pohyb), ani co do velikosti (z toho vyplývá zachování plošné rychlosti).

²Pokud je centrální silové pole odpuzivé, směřuje síla pochopitelně *od centra*, nikoli k němu; jinak ovšem platí totéž. S takovým polem se setkáme např. při rozptylu (kladně nabitých) α -částic na (kladně nabitém) jádru atomu.

Pohyb v centrálním poli je rovinný

Zadání úlohy je sice 3D, ale dokážeme, že pohyb v centrálním poli je *rovinný*, tedy jen 2D. Odehrává se v rovině určené centrem a počátečními podmínkami: leží v ní počáteční polohový vektor $\vec{r}_0$ a počáteční rychlost $\vec{r}_0 = \vec{v}_0$. Těmi je totiž určen počáteční moment hybnosti $\vec{b}_0 = \vec{r}_0 \times m\vec{v}_0$, a jak jsme dokázali, moment hybnosti $\vec{b}$ se při pohybu v centrálním poli zachovává.

Centrální pole zachovává plošnou rychlost v_p

V rovině pohybu se zachovává *plošná rychlost* v_p , tedy plocha opsaná průvodičem dělená dobou pohybu. Z definice plošné rychlosti platí totiž $v_p = \frac{1}{2}\vec{r} \times \vec{v} = \frac{1}{2}\vec{b}/m$ a moment hybnosti $\vec{b}$ se při pohybu v centrálním poli zachovává.

Dva speciální případy centrálních sil: síla pružnosti a síla gravitace

Pružnost: $\vec{F}(\vec{r}) = -k\vec{r}$. Jde o (prostorový) harmonický oscilátor, kap. 5.3.3;

Gravitace: $\vec{F}(\vec{r}) = -G\frac{1}{r^2}\vec{r}_0$. Tuto úlohu vyřešíme jako část obecnější úlohy — pohybu dvou těles, které se gravitačně přitahují (Keplerova úloha, kap. A).

5.3.3 Prostorový harmonický oscilátor

Harmonický oscilátor je charakterizován přitažlivou silou přímo úměrnou odchylce z rovnovážné polohy tedy (vektorově)

$$\vec{F}(\vec{r}) = -k \vec{r} \quad (5.151)$$

Z kap. 5.3.2 víme, že půjde o rovinný pohyb. Zvolíme kartézské souřadnice a rozepíšeme pohybové rovnice do složek:

$$m\ddot{x} = -kx \quad (5.152)$$

$$m\ddot{y} = -ky \quad (5.153)$$

s řešením podle kap. 5.2.3, rov. (5.30) a dále u Lissajousových obrazců, kap. 5.2.7, rov. (5.127):

$$x(t) = x_m \cos(\omega t + \varphi_1) \quad (5.154)$$

$$y(t) = y_m \cos(\omega t + \varphi_2) \quad (5.155)$$

tedy se stejnou úhlovou frekvencí $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$. Trajektorií je obecně elipsa, jak dostaneme eliminací času t z těchto rovnic: označíme $\xi := x/x_m$, $\eta := y/y_m$, $c_k := \cos \varphi_k$, $s_k := \sin \varphi_k$ a rozepíšeme:

$$(a) \quad \xi = c_1 \cos \omega t - s_1 \sin \omega t \quad (5.156)$$

$$(b) \quad \eta = c_2 \cos \omega t - s_2 \sin \omega t \quad (5.157)$$

a eliminujeme funkci $\cos \omega t$ kombinací $c_2(a) - c_1(b)$, funkci $\sin \omega t$ kombinací $s_2(a) - s_1(b)$:

$$c_2\xi - c_1\eta = (-s_1c_2 + c_1s_2) \sin \omega t \quad (5.158)$$

$$s_2\xi - s_1\eta = (c_1s_2 - s_1c_2) \cos \omega t \quad (5.159)$$

Obě rovnice umocníme na druhou a sečteme. Do výsledku dosadíme $s_1c_2 - c_1s_2 = \sin(\varphi_1 - \varphi_2)$, $c_1c_2 - s_1s_2 = \cos(\varphi_1 - \varphi_2)$, $\xi = x/x_m$, $\eta = y/y_m$ a dostaneme

$$\left(\frac{x}{x_m}\right)^2 + \left(\frac{y}{y_m}\right)^2 - 2\frac{x}{x_m}\frac{y}{y_m} \cos(\varphi_1 - \varphi_2) = \sin^2(\varphi_1 - \varphi_2) \quad , \quad (5.160)$$

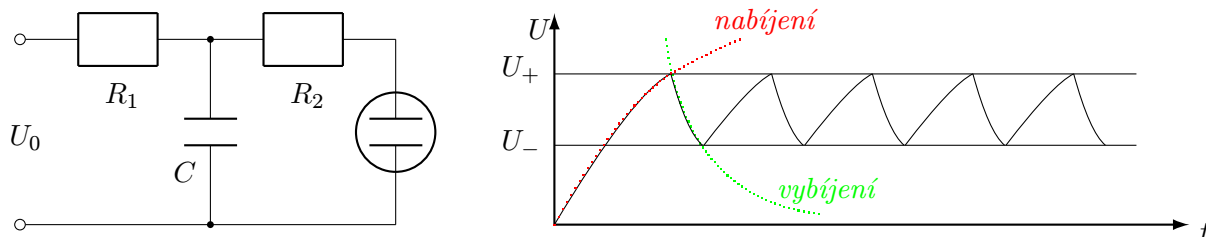
což je rovnice elipsy s poloosami x_m , y_m ve středové poloze s hlavní osou natočenou o úhel $\varphi_1 - \varphi_2$. Po ní se tedy pohybuje částice realizující prostorový harmonický oscilátor. (Zdůrazněme, že centrum pole leží ve *středu* elipsy, zatímco v Keplerově úloze pro gravitační pole řešené v kap. A leží centrum pole v *ohnisku* elipsy).

5.4 Relaxační kmity

Podstatou harmonických kmitů částice kolem rovnovážné polohy je, jak jsme viděli, síla navracející částici zpět s velikostí přímo úměrnou vzdálenosti od této rovnovážné polohy. Nemusí také jít o částici; harmonicky kmitat může i jiná fyzikální veličina (např. elektrické napětí či proud), je-li snadno realizovatelná její druhá derivace podle času.

Kmity tohoto typu mívají v praxi víceméně *pevnou frekvenci*, vnější rušivé vlivy ovlivní spíše amplitudu.

Vedle těchto kmitů se v technice i v živé přírodě často vyskytují **relaxační kmity** vznikající zcela jiným mechanismem, a to střídáním dvou režimů.



Uvažujme např. elektrický obvod podle obrázku. Ze zdroje pevného napětí U_0 se přes rezistor R_1 nabíjí kapacitor s kapacitou C s paralelně zapojenou doutnavkou. Doutnavkou zatím prakticky neprochází proud. Nabíjením roste napětí $U(t)$ na kapacitoru i doutnavce a exponenciálně by se blížilo hodnotě U_0 . Jakmile však dosáhne zápalného napětí U_+ doutnavky, nastane v doutnavce výboj, náboj do té doby kumulovaný na kapacitoru poklesne, až při hodnotě U_- nestačí k udržení výboje a výboj zhasne. Doutnavkou přestane téct proud a kapacitor se opět nabíjí v prvním režimu.

Obě větve děje — nabíjení i vybíjení — mají charakter relaxace, tj. uvolnění, přechod z nerovnováhy do rovnováhy; odtud název *relaxační kmity*. (Nejprve je to neúplně nabitý kapacitor zapojený na nabíjející zdroj napětí, poté nabitý kapacitor z možnosti vybití náboje přes doutnavku.)

Charakteristická proměnná (zde napětí U kapacitoru) probíhá interval od U_- do U_+ prvním režimem (nabíjení kapacitoru); při hodnotě U_+ dojde ke změně režimu a napětí se výbojem v doutnavce mění obráceně, od U_+ do U_- , v režimu vybíjení. (Může, ale nemusí být tedy symetrický k režimu prvnímu; zde zřejmě není, vybíjí se přes jiný odpor R_2 , než přes který se předtím nabíjelo.) Při napětí U_- se opět situace změní. Přejde se na první režim a celý děj se stále opakuje.

Výsledkem je sice periodický průběh proměnné veličiny x (zde U), ale určitě nikoli harmonický (který by měl sinusoidální závislost). Je tvořen dvěma větvemi (nárůst, pokles) obecně různé povahy, a proto obecně různého průběhu. Fáze relaxační bývá dána exponenciálou klesající asymptoticky k jisté limitní hodnotě, pokud platí, že rychlost $\dot{x}$ je úměrná odchylce x (u harmonických kmitů to nebyla rychlost, ale zrychlení odchylky $\ddot{x}$). Rychlost může být např. i konstantní (pak je větev popsána parabolickým obloukem) nebo může kmitající objekt získávat impuls jen v okamžiku změny režimu (pak je větev popsána úsečkou), apod. Podle povahy tohoto průběhu lze např. v biologii uvažovat a odhadovat podstatu a původ působící zobecněné síly.

U kmitů tohoto typu zůstává stálý *rozkmit*, tedy amplituda kmitů. Vnější poruchy ovlivňují zpravidla spíše frekvenci.

Teoretické studium pak spočívá ve zkoumání jednak mechanismů relaxací, jednak mechanismů změn režimů.

Kapitola 6

Setrvačné (zdánlivé) síly

2018-07-05

Tato kapitola vznikla jako samostatný výklad problematiky v rámci školení učitelů SŠ. Připomíná proto občas (nadbytečně) některá základní fakta z mechaniky a užívá i elementární grafické konstrukce. Věřím, že mi to čtenář promine.

Motto:

Setrvačné „síly“ jsou jen přilepek pro to, aby 2. Newtonův zákon platil třeba i na kolotoči.

6.1 Mechanika v nenormálních situacích

K termínům: v hovorovém jazyce se užívá termín *pohyb* předmětu pro změnu jeho polohy (s časem); je fyzikálně vyjádřen jeho (nenulovou) rychlostí $\vec{v}$. *Setrvačnost* je vlastnost tělesa vyjádřená jeho (nenulovou) hmotností $m > 0$; podle prvního Newtonova zákona lze říct, že se volná částice pohybuje setrvačností. Chybná je formulace, že se *pohybuje setrvačnou silou*. To by odpovídalo aristotelovskému pojetí, kdy je k pohybu potřeba síly, zatímco podle Newtona je síla potřeba ke *změně* pohybu. Termín setrvačná síla (nepříliš šťastný) je zaveden pro jiný, dále vysvětlený pojem.

Tato kapitola zavádí „setrvačné síly“ neboli fiktivní, zdánlivé, nověji kinematické; je to např. síla Coriolisova, unášivá, odstředivá, Eulerova. Vysvětluje, že nejde o pravé síly (popisující interakci tělesa s okolím), ale jen o dodatečné členy s rozměrem síly, doplněné proto, aby pohybové rovnice zachovaly svůj tvar, i když souřadnice, rychlosti a zrychlení měříme ve vztažných soustavách *neinerciálních*, třeba vůči rotující Zeměkouli, rozjíždějícímu se rychlíku apod..

6.1.1 Pohyb částice v normální situaci

Zatím budeme provádět veškerá měření v inerciální soustavě a všechny proměnné měřené v inerciální soustavě budeme značit velkými písmeny: $M, \vec{R}, \vec{F}, \vec{A}, \vec{V}$. Omezíme se pro jednoduchost na nejjednodušší těleso — **částici** neboli **hmotný bod**, tedy těleso, jehož vlastní rozměry jsou v dané úloze zcela zanedbatelné a jehož poloha je plně popsána jediným bodem $\mathbf{B}$, resp. jeho polohovým vektorem $\vec{R}_{\mathbf{B}}$.

Říkáme, že částice je **volná**, když na ni nepůsobí žádné vlivy, tj. ani síly = interakce (např. magnetismus), ani vazby = omezení v pohybu (např. koleje), resp. když všechny na ni působící vlivy se navzájem dohromady vyruší. V těchto „normálních“ situacích dodržuje volná částice *první Newtonův zákon* (1NZ) neboli *zákon setrvačnosti*:

1NZ: Volná částice se pohybuje rovnoměrně přímočaře (anebo je v klidu).

Co se týče účinku sil, poradí nám *druhý Newtonův zákon* (2NZ) neboli *zákon síly*, totiž

$$\text{Výsledná síla } \vec{F}_{\Sigma} \text{ udělí volné částici s hmotností } M \text{ zrychlení } \vec{A}, \text{ kde } M\vec{A} = \vec{F}_{\Sigma}. \quad (1)$$

Zde je výsledná síla $\vec{F}_{\Sigma}$ rovna součtu $\vec{F}_{\Sigma \text{skut}}$ všech skutečných sil na částici působících:

$$M\vec{A} = \vec{F}_{\Sigma} \quad (2\text{NZ} - \text{chceme udržet}) \quad (6.1)$$

$$\vec{F}_{\Sigma} = \vec{F}_{\Sigma \text{skut}} \quad (\text{zatím}). \quad (6.2)$$

6.1.2 První nenormální situace

Vedle síly je ještě jiná možnost, jak ovlivnit částici, a to je *vazba*. Vazbou nazýváme každé omezení pohybu, ať už co do polohy nebo co do směru. Příklady z technické praxe jsou třeba čepy, klouby, kladky, kolejnice. Částice podrobená vazbě ovšem už není volná. Pro jednoduchost uvažme časově neproměnné vymezení povolené trati¹ dané např. rovnicí $f(X, Y, Z) = 0$ vymezující plochu, po níž se jedinečně může bod se souřadnicemi X, Y, Z pohybovat a kterou nemůže opustit. Co s tím? Jak upravit 2NZ, aby platil i nadále, když částice není volná?

Pomůžeme si trikem: naši *vazbu* nahradíme vhodnou *vazbovou silou*. Ta bude právě taková, aby sice udržela částici „na cestě pravé“, ale jinak ji nijak neovlivnila, zejména aby jí nedodávala nebo neubírala energii. Pro zachování energie stačí, když tato síla $\vec{F}$ bude zásadně kolmá na dráhu, tj. na posunutí $d\vec{r}$ částice; pak $\vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$. Tím je určen směr: normála k trajektorii. Velikost je pak dána jednoznačně: tak „akorát“, aby částici „dotlačila“ přesně na dráhu, ale nepřetlačila o kus dál.

Příkladem budiž táta s klukem na cestičce v parku; v pozadí bdí hlídač. Jak zaručit, aby kluk dodržel vazbu, tj. nešlapal na trávnik? Stačila by klasická *vazba*, tj. tyč podél křivolaké cestičky, na ní navlečený kroužek, a ten je přikován k nožičce dítěte. Otec coby vnější vliv je pak nadbytečný. V praxi ale taková vodítka podél cest nemáme, a proto nezbyvá, než aby otec fungoval jako *vazbová síla*: při pokusu kluka o vychýlení na něj zapůsobí vhodnou silou $\vec{F}_{\Sigma \text{vazb}}$: má směr kolmo k cestičce, a velikost právě takovou, aby kluka přiměl dojít až na cestičku, ale ne dál.

Vazbovou sílu (nahrazující tedy vazbu), formulujeme snadno:

$$\vec{F}_{\Sigma \text{vazb}} = \lambda \mathbf{grad} f, \quad (6.3)$$

kde f je známá skalární funkce popisující vazbu $f(x, y, z) = 0$ a $\lambda(x, y, z)$ je neznámá skalární funkce; určuje velikost síly a spočte se tak, aby vazba $f(x, y, z) = 0$ byla splněna pro pohyb popsáný řešením, tj. funkcemi $x(t), y(t), z(t)$.

Tím jsme zobecnili dosavadní pojem síly: k silám skutečným jsme přidali ještě *síly vazbové* $\vec{F}_{\Sigma \text{vazb}}$ vypočítané tak, aby nahradily jistou „nenormálnost“, totiž že částice nebyla volná:

$$\vec{F}_{\Sigma} = \vec{F}_{\Sigma \text{skut}} + \vec{F}_{\Sigma} \quad (1. \text{ vylepšení}) \quad (6.4)$$

a i nadále platí 2NZ ve tvaru rov. (4.3), tedy

$$M\vec{A} = \vec{F}_{\Sigma} \quad (2NZ: \text{udrželi jsme i s vázanou částicí!}).$$

6.1.3 Druhá nenormální situace: neinerciální soustava

Někdy však potřebujeme popis pohybu částice ve vztažné soustavě, která není inerciální. (Takovou soustavu budeme za trest značit malou kapitálkou $\mathcal{N}$, a užijeme minuskule – malá písmena – pro vše, co s ní souvisí: $x, a, \dots$) Zajímá-li nás Foucaltovo kyvadlo nebo stáčení pasátů, musíme uvážit, že Země, na níž stojíme a vůči níž provádíme měření, se otáčí kolem své osy. Soustava $\mathcal{N}$ s ní spjatá proto není inerciální, jenže popis „mimo Zemi“ by byl evidentně nepraktický². Uvažme nyní³, co při novém popisu v pohybové rovnici zůstává a co se mění:

- (stejně) Hmotnost částice M je na vztažné soustavě nezávislá: $m = M$. Dále užijeme proto jen minuskuli, značku m .
- (stejně) Časy T i t plynou „stejně rychle“. Mohou sice mít navzájem posuv (host z jiného časového pásma má čas $t = T - T_0$), ale protože všude používáme jen *dobu* $\Delta T = T_2 - T_1$, resp. $\Delta t = t_2 - t_1$, tedy rozdíl dvou časových údajů, toto T_0 se nikde neuplatní: $\Delta t = \Delta T$. Užívejme proto i zde nadále jen minuskuli t .

¹Tj. plným jménem vazba holonomní, skleronomní, oboustranná.

²Např. obvodová rychlost bodu na povrchu Země otáčející se kolem své osy je u nás cca 300 m/s, rychlost daná obíháním Země kolem Slunce je cca 30 000 m/s.

³Samozřejmě klasicky. V relativitě je $M \neq m$ a $\Delta T \neq \Delta t$; i s tím bychom si uměli poradit, ale teď se tím nezdržujeme.

- (stejně) Skutečné síly $\vec{F}$ popisují interakci mezi částicemi, a ta rovněž nezávisí na tom, zda a kdo ji odkud popisuje. Obě dynamické veličiny tedy zůstávají stejné, na volbě vztažné soustavy nezávislé: $\vec{f} = \vec{F}$.

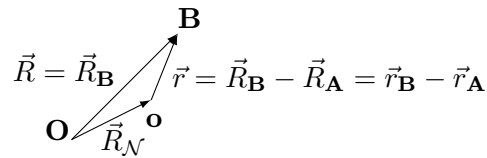
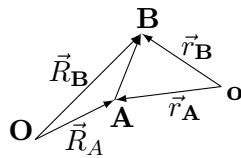
Rozklad vektoru do složek podle os X, Y, Z anebo x, y, z ovšem na volbě vztažné soustavy závisí, protože *vztažné trojhrany* xyz a XYZ mohou být vůči sobě natočené. Proto $\vec{f} = \vec{F}$, ale obecně⁴ $f_x \neq F_X$, $f_y \neq F_Y$ a $f_z \neq F_Z$.

- (změna) Zrychlení $\vec{A}$ je časovou změnou rychlosti $\vec{V}$ a ta je časovou změnou polohy $\vec{R}$. Počítáme ho z časového průběhu polohy částice jako

$$\vec{A} = \frac{\Delta \vec{V}}{\Delta t}; \quad \vec{V} = \frac{\Delta \vec{R}}{\Delta t} \quad \text{a podobně} \quad \vec{a} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}; \quad \vec{v} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}. \quad (6.5)$$

Protože je obecně $\vec{r} \neq \vec{R}$, platí i $\Delta \vec{r} \neq \Delta \vec{R}$, $\vec{v} \neq \vec{V}$, $\vec{a} \neq \vec{A}$.

- (náprava) Vzájemná poloha bodů $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ nezávisí na volbě vztažné soustavy (vlevo): zřejmě $\vec{R}_B - \vec{R}_A = \vec{r}_B - \vec{r}_A$.



Provedeme tedy odvození nikoli pro $\vec{R}$, ale pro $\vec{R}_B - \vec{R}_A$, a za bod $\mathbf{A}$ vezmeme konkrétně počátek $\mathbf{o}$ neinerciální soustavy $\mathcal{N}$ (vpravo). Pak je ovšem $\vec{r}_A = \vec{r}_N = \vec{0}$, $\vec{R}_A = \vec{R}_N$ a platí

$$\vec{R}_B - \vec{R}_N = \vec{r}_B - \vec{0}, \quad \text{čili} \quad (6.6)$$

$$\vec{R} - \vec{R}_N = \vec{r} \quad (6.7)$$

$$\frac{d^2}{dt^2} (\vec{R} - \vec{R}_N) = \frac{d^2}{dt^2} (\vec{r}) \quad (6.8)$$

$$\vec{A} - \vec{A}_N = \vec{a} + \vec{a}^* \quad (6.9)$$

(Jak uvidíme, časová změna v neinerciální soustavě NIS není zcela přímočará, protože sama NIS může s časem měnit svou polohu, např. otáčet se. To vystihuje člen $\vec{a}^*$.)

Poslední rovnici vynásobíme hmotností M , využijeme rovnosti $M = m$ a upravíme:

$$M\vec{A} + (-m\vec{A}_N - m\vec{a}^*) = m\vec{a} \quad (6.10)$$

V inerciální soustavě $\mathcal{S}$ má pohybová rovnice (2NZ) tvar $M\vec{A} = \vec{F}_\Sigma$, kde $\vec{F}_\Sigma$ je součet všech (skutečných i vazbových) sil. My bychom tento tvar rádi zachovali i v neinerciální soustavě $\mathcal{N}$, tedy

$$(\text{rádi bychom:}) \quad m\vec{a} = \vec{f}_\Sigma \quad .$$

Tady ale přebývá výraz $(-m\vec{A}_N - m\vec{a}^*)$ s fyzikálním rozměrem síly; nazveme ho *setrvačnou silou*

$$\text{„setrvačná síla“:} \quad \vec{f}_{\text{setr}} \equiv (-m\vec{A}_N - m\vec{a}^*) \quad (6.11)$$

a při popisu v neinerciální soustavě ho vždy přidáme ke skutečným silám $\vec{F}_\Sigma$. Bude tedy

$$\vec{F}_\Sigma + \vec{f}_{\text{setr}} = \quad (6.12)$$

$$\vec{F}_{\Sigma \text{skut}} + \vec{F}_{\Sigma \text{vazb}} + \vec{f}_{\text{setr}} = \vec{f}_\Sigma \quad (2. \text{ vylepšení}) \quad (6.13)$$

a s přidanou „setrvačnou silou“ platí i v neinerciální soustavě $\mathcal{N}$ pohybová rovnice

$$m\vec{a} = \vec{f}_\Sigma \quad (2NZ: \text{udrželi jsme i v NIS!}). \quad (6.14)$$

⁴Připomeňme, že úsloví „obecně $a \neq b$ “ varuje, že někdy může náhodou být i $a = b$, ale spolehnout se na to nelze. Např. „Různí lidé mají obecně různá jména.“ Viz pozn. na str. 25.

Měřeno z neinerciální soustavy se částice pohybuje podle 2NZ tak, jako by na ni vedle všech skutečných a vazbových sil navíc působila tzv. setrvačná síla $\vec{f}_{\text{setr}}$ z rov. (6.11) .

Výraz pro zrychlení $\vec{A}_N$ sestává z více členů. Tyto členy mají své názvy a podle nich nazýváme i jim odpovídající dílčí setrvačné síly: *unášivá, odstředivá, Coriolisova, Eulerova*, viz kap. 6.2.

↔ Můžeme totiž jít ještě dále, až k obecné teorii relativity. To nejprve odvodíme pohybové rovnice v nejobecnějších křivčarých souřadnicích. Pak do nich zahrneme, že prostor a čas spolu úzce souvisejí (přes konstantní rychlost světla). Nakonec si uvědomíme, že kvůli existenci gravitace⁵ *neexistuje* žádná inerciální soustava (S_0 , tedy ani S). Ale naše nejobecnější pohybové rovnice pro svou platnost již žádnou inerciální soustavu nepotřebují, a proto platí i tak. Tím už pak ovšem nejsme v klasické mechanice, ale zvládli jsme obecnou teorii relativity. Ale o tom jinde.

6.1.4 Čtyři vysvětlující poznámky

1) Právě zavedená setrvačná „síla“ $\vec{f}_{\text{setr}} = (-m\vec{A}_N)$ je zřejmě jen kinematickou, z polohy a času spočítanou berličkou, aby nám zůstal zachován 2. Newtonův zákon coby pohybová rovnice, a nepopisuje tedy žádnou skutečnou *interakci* mezi částicí a „něčím okolo“ – tělesy ani vazbami. Proto k ní *neexistuje* žádná reakce; *nelze na ni použít 3. Newtonův zákon* (zákon akce a reakce). Totéž ovšem platí i pro všechny dílčí síly, na které ji pro názornost rozkládáme. Speciálně setrvačná síla odstředivá *není* reakcí na dostředivou sílu!

Rozmyslete si do důsledků, že „setrvačná síla“ není nikdy síla ve smyslu interakce, ale jen způsob popisu zrychlení v jiné (neinerciální) soustavě. Pokud si narazím nos, když tramvaj prudce zabrzdí, pak z hlediska (neinerciální) tramvaje mnou tlačila setrvačná síla proti stěně, a ta svou pevností (neprohnula se, neprotrhla se) mi způsobila úraz. Z hlediska mého však stěna nebyla klidná, ale pohybovala se mi vstříc, až mne udeřila. Setrvačnou sílu potřebuji „do počtu“ – pro soulad s relativním zrychlením, aby mi vyšel 2NZ při výpočtu vůči tramvaji. Ale úraz mi způsobí vždy nějaká *skutečná* síla – interakce (zde: kontaktní síla mezi mým nosem a zdí!

2) Všimněte si, že důsledně říkáme, že polohu a pohyb částice **popisujeme** v inerciální nebo neinerciální soustavě, a vyhýbáme se výrokům typu *částice je v inerciální (neinerciální) soustavě*. Řečeno lehčím slohem: částice *nepřísluší* žádné vztažné soustavě, anebo přísluší stejným právem všem soustavám – jak si vyberete⁶. Částice **je** (existuje) sama o sobě a je jí naprosto jedno, zda ji někdo popisuje, resp. z jaké vztažné soustavy.

3) Když běžně popisujeme pohyb Slunce (a celé nebeské klenby) vůči Zemi (ve vztažné soustavě spojené se Zemí), tak říkáme, že se Slunce otáčí kolem Země, a máme pravdu stejně jako zelení mužičci na zcela jiné planetě, tvrdící, že (v jejich vztažné soustavě) se naše Slunce s celou oblohou točí kolem nich. Kolem čeho se tedy opravdu naše Slunce točí? To je jen otázka popisu, a popisů je tolik, kolik je pozorovatelů, třebaže naše Slunce je jen jediné. (Rozmyslete si krásný výrok „Sluníčko zašlo za mraky“, i když i prostý pasáček ví, že po obloze spíš plují rychleji mraky než sluníčko.)

V heliocentrické soustavě Koperníkově obíhá Země kolem Slunce, v geocentrické Ptolemaiově obíhá Slunce kolem Země. Běžná hovorová fráze „heliocentrická soustava je správná, geocentrická je nesprávná“ není pravdivá: vůbec žádná vztažná soustava není (a z principu ani nemůže být) nesprávná. Pravda je, že geocentrická soustava *není inerciální*, a proto popis pohybu, tj. kinematika ostatních planet v ní vychází složitější, a tím spíš i popis sil – dynamika. Heliocentrická soustava s počátkem v těžišti sluneční soustavy a s osami neotáčejícími se vůči „stálícím“ má k inerciální soustavě mnohem blíže a kinematika i dynamika jsou v ní podstatně jednodušší. To je vše, co se dá pravdivě říct: ale složitost a tím i „neobratnost“ neznamená nesprávnost. Můžeme s klidem, jak je nám libo, užívat kterékoli z obou soustav, anebo třeba soustav ještě divočejších (třeba soustavu spjatou s kolotočem, rozjíždějícím se na otáčející se Zemi, nebo soustavu spjatou s kývajícím se houpačkou). Jen se nám bude dost složitě počítat. . .

⁵Žádná volná částice totiž neexistuje: na každou působí gravitace, a tu není čím odstínit, když působí na všechny hmoty úplně stejně!

⁶Asi jako muž, který je věrný všem ženám.

4) Konstatujeme-li tedy v rozjízďející se tramvaji $\mathcal{N}$, že na nás působí setrvačná síla a tlačí nás do sedadla, pak stejně oprávněně musíme konstatovat, že na domy, koleje, stromy atd. působí v $\mathcal{N}$ tatáž setrvačná síla jako na nás. Protože však tyto objekty nemají za sebou pro opření tramvajové sedadlo, které by bylo v klidu (vůči $\mathcal{N}$ = tramvaji), neopřou se a musejí se pohybovat vůči $\mathcal{N}$ se zrychlením daným touto setrvačnou silou, a to dozadu (opět vůči $\mathcal{N}$ = tramvaji).

Toto vše si důkladně rozmyslete. Student mívá totiž často zábrany: je ochoten počítat s odstředivou silou působící na broučka sedícího na podlaze kolotoče, ale váhá o působení setrvačných sil při popisu pohybu dravé mouchy sledující tohoto broučka a letící stále těsně nad ním, a vůbec si nepřipouští (byť stále při popisu vůči kolotoči) potřebu použít odstředivé síly pro popis vysoko nad kolotočem kroužícího kosa zaujatého broučkem i mouchou, nebo dokonce pro popis stromu stojícího opodál, z něhož vše sleduje se zájmem kosice. Chceme-li ale zkoumat fyziku z kolotoče (rozumí se: popisovat fyzikální děje z neinerciální vztažné soustavy spojené s otáčejícím se kolotočem), pak nutně zjistíme, že se např. domy na náměstí točí dokola kolem osy kolotoče. Zdůvodníme to tím, že na ně (v soustavě kolotoče) působí setrvačná síla odstředivá a Coriolisova, a to stejným právem jako na broučka, mouchu, kosa, kosici, strom, domy kolem i Slunce nad nimi všemi. Setrvačné síly jsou prostě univerzální daní odvedenou pohybovým rovnicím za to, že zůstanou platné i při popisu polohy, rychlosti a zrychlení vůči neinerciální soustavě, jakou je v tomto případě kolotoč.

6.1.5 Jak popisovat co nejvýhodněji

Pro popis dějů v neinerciální soustavě $\mathcal{N}$ jsou vhodné takové pohybové rovnice, v nichž se budou vyskytovat

- *souřadnice* (a rychlosti i zrychlení) *zkoumaných objektů* vyjádřené výhradně v neinerciální soustavě $\mathcal{N}$ (např. že na Zemi se na severní polokouli stáčí pasáty doprava – vůči Zemi $\mathcal{N}$);
- a jenom *popis pohybu neinerciální soustavy* $\mathcal{N}$ (tj. pohyb jejího počátku a její případná rotace) budou vyjádřeny v soustavě inerciální $\mathcal{S}$, např. že Země $\mathcal{N}$ se kolem své osy točí od západu k východu úhlovou rychlostí $\vec{\Omega}$ (vůči „stálícím“, $\mathcal{S}$).

Všechny proměnné v rovnicích budou tedy mít značky buď malé ($\vec{a}$) a popisovat zkoumaný objekt vůči $\mathcal{N}$, nebo velké s indexem $\mathcal{N}$ ($\vec{A}_{\mathcal{N}}$, příp. $\vec{\Omega} \equiv \vec{\Omega}_{\mathcal{N}}$) a popisovat pohyb celé soustavy $\mathcal{N}$ vůči $\mathcal{S}$.

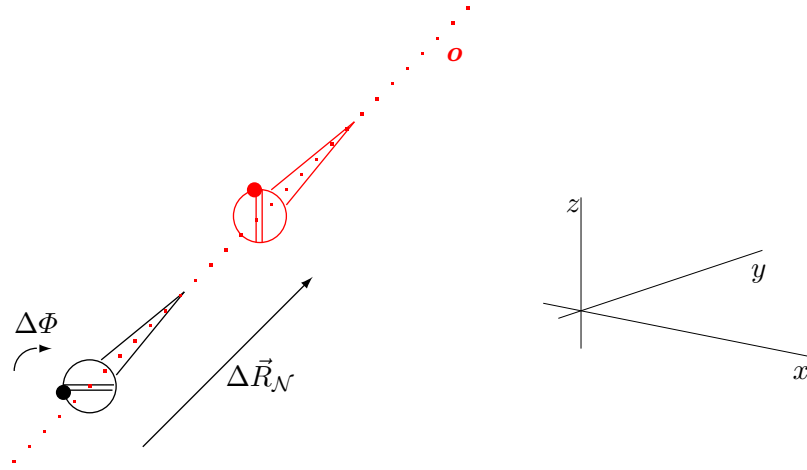
6.2 Neinerciální vztažné soustavy – analytická metoda

Dokážeme, že nejobecnější přemístění $\mathcal{N}$ vůči $\mathcal{S}$ lze popsat pomocí posunutí $\Delta\vec{R}_{\mathcal{N}}$ jejího počátku $O_{\mathcal{N}}$ a otočení $\Delta\Phi$ kolem směru tohoto posunutí (**kinematický šroub**, podrobněji viz kap. 7.3.2).

Jde-li o přemístění infinitezimální („elementární“, $\Delta \rightarrow d$) a trvá-li toto přemístění dobu dt , lze ho popsat vektory rychlosti $\vec{V}_{\mathcal{N}} = \frac{d\vec{R}_{\mathcal{N}}}{dt} \equiv V_{\mathcal{N}}\vec{j}$ a úhlové rychlosti $\vec{\Omega} = \frac{d\Phi}{dt}\vec{j}$, kde $\vec{j}$ je vhodný jednotkový vektor, tj. $|\vec{j}| = 1$. Tato přemístění jsou komutativní. Vliv přechodu popisu z $\mathcal{S}$ na $\mathcal{N}$ lze tedy rozložit a můžeme studovat samostatně posunutí a otočení.

Posuvný pohyb je jednoduchý: každý bod jsoucí v klidu vůči $\mathcal{N}$ má vůči $\mathcal{S}$ totéž zrychlení $\vec{A}_{\mathcal{N}}$ a zrychlení se sčítají, takže – jak už víme z rov. (6.8) –

$$\vec{A} - \vec{A}_{\mathcal{N}} = \vec{a} \quad (6.15)$$



Obrázek 6.1: Kinematický šroub

Otáčivý pohyb je složitější: při otáčení je časová změna $\left. \frac{d\vec{b}}{dt} \right|_{\mathcal{N}}$ každého vektoru $\vec{B}$ (ať už polohy, rychlosti či síly), měřená v neinerciální soustavě, dána jednak jeho časovou změnou $\left. \frac{d\vec{B}}{dt} \right|_{\mathcal{S}}$ měřenou v inerciální soustavě, jednak úhlovou rychlostí $\vec{\Omega}$ neinerciální soustavy $\mathcal{N}$ vůči inerciální $\mathcal{S}$, a to vztahem

$$\left. \frac{d\vec{b}}{dt} \right|_{\mathcal{N}} = \left. \frac{d\vec{B}}{dt} \right|_{\mathcal{S}} - \vec{\Omega} \times \vec{b} \quad \text{neboli} \quad (6.16)$$

$$\left. \frac{d\vec{B}}{dt} \right|_{\mathcal{S}} = \left. \frac{d\vec{b}}{dt} \right|_{\mathcal{N}} + \vec{\Omega} \times \vec{b}. \quad (6.17)$$

Vektorový součin popisuje skutečnost, že i pro vektor časově neproměnný (v $\mathcal{S}$) se mění jeho složky v $\mathcal{N}$ tím, že se otáčí neinerciální vztahný trojhran xyz vůči inerciálnímu XYZ úhlovou rychlostí $\vec{\Omega}$.

Kinematický šroub Obecný polohový vektor $\vec{R}$ v $\mathcal{S}$ a odpovídající polohový vektor $\vec{r}$ v $\mathcal{N}$ souvisí s polohovým vektorem $\vec{R}_{\mathcal{N}}$ počátku $O_{\mathcal{N}}$ soustavy $\mathcal{N}$ vůči $\mathcal{S}$ vztahem

$$\vec{R} - \vec{R}_{\mathcal{N}} = \vec{r} \quad (6.18)$$

Pak aplikace rov. (6.17) na rov. (6.18) vede nejprve na vztah

$$\vec{V} - \vec{V}_{\mathcal{N}} = \dot{\vec{r}} + \vec{\Omega} \times \vec{r} \quad (6.19)$$

$$= \vec{v} + \vec{\Omega} \times \vec{r} \quad (6.20)$$

Zde se často zavádí **unášivá rychlost** $\vec{v}_u$ vztahem

$$\vec{v}_u = \vec{V}_{\mathcal{N}} + \vec{\Omega} \times \vec{r} \quad (6.21)$$

Další aplikací (rov. (6.17) na rov. (6.20)) dostaneme

$$\vec{A} - \vec{A}_{\mathcal{N}} = \frac{d}{dt} \left(\vec{v} + \vec{\Omega} \times \vec{r} \right) + \vec{\Omega} \times \left(\vec{v} + \vec{\Omega} \times \vec{r} \right) \quad (6.22)$$

$$= \vec{a} + (\dot{\vec{\Omega}} \times \vec{r} + \vec{\Omega} \times \dot{\vec{r}}) + (\vec{\Omega} \times \vec{v} + \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r})) \quad (6.23)$$

$$= \vec{a} + \dot{\vec{\Omega}} \times \vec{r} + 2\vec{\Omega} \times \vec{v} + \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}) \quad , \text{ odkud} \quad (6.24)$$

$$\vec{A} = \vec{a} + \vec{a}_C + \vec{a}_u \quad , \text{ kde značíme} \quad (6.25)$$

$$\text{Coriolisovo zrychlení } \vec{a}_C = 2\vec{\Omega} \times \vec{v} \quad (6.26)$$

$$\text{unášivé zrychlení } \vec{a}_u = \vec{A}_{\mathcal{N}} + \vec{a}_E + \vec{a}_{od} \quad \text{zahrnující} \quad (6.27)$$

$$\text{unášivé posuvné zrychlení } \vec{a}_{up} = \vec{A}_{\mathcal{N}} \quad (6.28)$$

$$\text{Eulerovo zrychlení } \vec{a}_E = \frac{d\vec{\Omega}}{dt} \times \vec{r} \equiv \dot{\vec{\Omega}} \times \vec{r} \quad (6.29)$$

$$\text{odstředivé zrychlení } \vec{a}_{od} = \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}) = (\vec{r} \cdot \vec{\Omega}) \vec{\Omega} - \Omega^2 \vec{r} \quad (6.30)$$

$$= -\Omega^2 \vec{r}_{\perp} \quad (6.31)$$

kde vektor $\vec{r}_{\perp}$ směřuje kolmo od osy otáčení $\vec{\Omega}$ (nikoli od počátku $O_{\mathcal{N}}$ jako $\vec{r}$).

Tato zrychlení vynásobíme hmotností a změníme znaménko⁷, čímž dostaneme

$$\text{Coriolisovu sílu } \vec{f}_{Cor} = -2m\vec{\Omega} \times \vec{v} \quad (6.32)$$

$$\text{unášivou sílu } \vec{f}_u = -m\vec{A}_{\mathcal{N}} + \vec{f}_E + \vec{f}_{od} \quad \text{zahrnující} \quad (6.33)$$

$$\text{unášivou posuvnou sílu } \vec{f}_{up} = -m\vec{A}_{\mathcal{N}} \quad (6.34)$$

$$\text{Eulerovu sílu } \vec{f}_E = -m\dot{\vec{\Omega}} \times \vec{r} \quad (6.35)$$

$$\text{odstředivou sílu } \vec{f}_{od} = m\Omega^2 \vec{r}_{\perp} \quad (6.36)$$

Shrnutí I v neinerciálních soustavách platí 2NZ jako pohybová rovnice, pokud k výslednici $\vec{F}_{\Sigma}$ skutečných a vazbových sil přidáme ještě setrvačné síly: Coriolisovu $\vec{f}_{Cor}$ a unášivou $\vec{f}_u$, zahrnující unášivou posuvnou $\vec{f}_{up}$, odstředivou $\vec{f}_{od}$ a Eulerovu $\vec{f}_E$:

$$m\vec{a} = \vec{f} = \vec{F}_{\Sigma} + \vec{f}_{Cor} + \vec{f}_u \quad (6.37)$$

$$= \underbrace{\vec{F}_{\Sigma}}_{\text{skutečná}} + \underbrace{(-2m\vec{\Omega} \times \vec{v})}_{\text{Coriolisova}} + \underbrace{(-m\vec{A}_{\mathcal{N}})}_{\text{unáš. posuvná}} + \underbrace{(m\Omega^2 \vec{r}_{\perp})}_{\text{odstředivá}} + \underbrace{(-m\dot{\vec{\Omega}} \times \vec{r})}_{\text{Eulerova}} \quad (6.38)$$

Konkrétně např. při popisu pohybu na otáčející se Zeměkouli ($\Omega \approx 7,3 \cdot 10^{-5} \text{ s}^{-1}$) zůstanou zpravidla jen dvě síly:

$$m\vec{a} = \underbrace{\vec{F}_{\Sigma}}_{\text{skutečná}} + \underbrace{(-2m\vec{\Omega} \times \vec{v})}_{\text{Coriolisova}} \quad (6.39)$$

6.3 Populárně: Neinerciální vztažné soustavy grafickou metodou

6.3.1 Diskretizace

Dnes jsou běžné digitální fotoaparáty. Většinou umožňují udělat nejenom jediný snímek, ale i movie – několik snímků „těsně za sebou“ (po době dejme tomu $\tau = \frac{1}{10} \text{ s}$), což se nám při pozorování s troškou tolerance jeví jako pohyb⁸: jako bychom sledovali živý děj.

⁷Tím se změní i název: **odstředivé** zrychlení vede na **odstředivou** sílu.

⁸Komu to nestačí, ať vezme $\tau = 1 \mu\text{s}$ (a počítá na víc desetinných míst). A kdo to chce úplně přesně, ať udělá limitní přechod $\tau \rightarrow 0$. Tím pak s pomocí kalkulu dostane s derivacemi přesně úplně všechno.

Ukážeme si, jak ze dvou po sobě jdoucích snímků poznáme *rychlost* fotografované částice a ze tří snímků i jeho *zrychlení*, a tím z 2NZ (známe-li hmotnost částice) i *sílu*, která na ni v tom prostředním okamžiku působila. Tím budeme znát všechno potřebné i pro kinematiku, i pro dynamiku v onom prostředním okamžiku.

6.3.2 Parametrizovaná trajektorie (označovaná cesta)

Jak jsme výše naznačili, při grafické metodě vyjdeme z křivky zaznamenávající pohyb částice (ať už v $\mathcal{S}$ nebo v $\mathcal{N}$), na níž budou vyznačeny i časy, ve kterých částice příslušné místo „navštívila“. Je to *parametrizovaná trajektorie*, a to konkrétně trajektorie parametrizovaná *časem* – našimi elementárními dobami τ .

↔ Trajektorie by mohla být parametrizovaná i jinak, třeba vlastní délkou – asi jako látkový krejčovský metr nebo silnice s patníky; byla by to tzv. přirozená parametrizace.

6.3.3 Rychlost

Rychlost popisuje časovou změnu *polohy*. K jejímu určení nám stačí dva po sobě jdoucí snímky: částice, která má na prvním snímku polohu $\vec{r}_1$ a na druhém $\vec{r}_2$, má rychlost

$$\vec{v} = \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{\tau} . \quad (6.40)$$

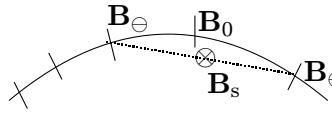
Pokud je na obou snímcích bod na tomtéž místě (tj. $\vec{r}_1 = \vec{r}_2$), vyjde nám rychlost nulová: $\vec{v} = \vec{0}$ a bod je ve sledovaném okamžiku v klidu (alespoň s tou přesností, na jaké jsme se dohodli).

K danému času zřejmě můžeme určit jednak „rychlost před“ z $r_{\ominus}$ a r_0 , jednak „rychlost po“ z $r_{\oplus}$ a r_0 . A nejlépe je z nich pak vzít střed: $v_0 = \frac{1}{2}(r_{\oplus} - r_{\ominus})/\tau$.

6.3.4 Zrychlení

Zrychlení popisuje časovou změnu *rychlosti*. Jestliže potřebujeme dva snímky pro zjištění rychlosti, pak pro určení zrychlení jsou nutné snímky tři: zjistíme, jak se rychlost změnila za danou elementární dobu. Z trajektorie na obrázku, parametrizované časem t v pěti polohách (tři, $\mathbf{B}_{\ominus}$, $\mathbf{B}_0$, $\mathbf{B}_{\oplus}$ jsou pojmenované), je z prodlužování úseků zřejmé, jak se částice při pohybu zleva napravo zrychlovala.

Chceme-li určit zrychlení v čase t_0 , spočteme sousední časy $t_{\ominus} = t_0 - \tau$ a $t_{\oplus} = t_0 + \tau$ a pro všechny tři odpovídající polohy $\mathbf{B}_{\ominus}$, $\mathbf{B}_0$ a $\mathbf{B}_{\oplus}$, resp. polohové vektory $\vec{r}_{\ominus}$, $\vec{r}_0$ a $\vec{r}_{\oplus}$. Z nich určíme rychlosti „před“ a „po“:



$$\begin{aligned} \vec{v}_{\ominus} &= (\vec{r}_0 - \vec{r}_{\ominus})/\tau , \\ \vec{v}_{\oplus} &= (\vec{r}_{\oplus} - \vec{r}_0)/\tau . \end{aligned} \quad (6.41)$$

Zrychlení je rovno rozdílu těchto rychlostí vydělenému dobou τ mezi snímky:

$$\vec{a}_0 = (\vec{v}_{\oplus} - \vec{v}_{\ominus})/\tau = (\vec{r}_{\oplus} - 2\vec{r}_0 + \vec{r}_{\ominus})/\tau^2 . \quad (6.42)$$

Tento výraz můžeme názorněji vyjádřit geometricky. Najdeme „střední polohu“ – bod $\mathbf{B}_s$ ležící přesně uprostřed mezi body $\mathbf{B}_{\ominus}$ a $\mathbf{B}_{\oplus}$. Ten je popsán polovičním součtem polohových vektorů krajních bodů, tedy

$$\vec{r}_s = \frac{1}{2}(\vec{r}_{\ominus} + \vec{r}_{\oplus}) \quad (6.43)$$

a dosazením do rov. (6.42) dostaneme

$$\vec{a} = \frac{2}{\tau^2} (\vec{r}_s - \vec{r}_0) . \quad (6.44)$$

Při pevné volbě doby τ tedy platí:

***Zrychlení** částice je úměrné odchylce její **střední** polohy B_s od **skutečné** polohy B_0 .*

6.3.5 Výsledná síla (výslednice)

Výslednici $\vec{f}_\Sigma$ působící na částici určíme podle 2NZ ze zrychlení $\vec{a}$ a hmotnosti m :

$$\vec{f}_\Sigma = m\vec{a} = \frac{2m}{\tau^2}(\vec{r}_s - \vec{r}_0) \quad . \quad (6.45)$$

Heslovitě řečeno, výslednou sílu působící na částici určíme graficky takto:

*Výslednice je podle 2NZ úměrná odchylce **střední** polohy B_s od **skutečné** polohy B_0 .*

Konstanta úměrnosti je rovna $\frac{2m}{\tau^2}$ a během celého pozorování se nemění (protože m je hmotnost částice a τ je dohodnutá „elementární“ doba mezi snímky = mezi měřeními poloh).

6.4 Cvičení

Na SŠ se řeší úlohy na některé speciální druhy pohybů v $\mathcal{S}$. Graficky se tyto pohyby projeví takto:

- **klid:** body $B_\ominus$, B_0 , $B_\oplus$ splynou v jeden;
- **rovnoměrný přímočarý pohyb:** $B_\ominus$, B_0 , $B_\oplus$ leží na přímce, jsou stejně daleko od sebe: $\overline{B_\ominus B_0} = \overline{B_0 B_\oplus}$;
- **zrychlený přímočarý pohyb:** $B_\ominus$, B_0 , $B_\oplus$ leží na přímce, jsou různě daleko od sebe: $\overline{B_\ominus B_0} \neq \overline{B_0 B_\oplus}$;
- **rovnoměrný kruhový pohyb:** $B_\ominus$, B_0 , $B_\oplus$ neleží na přímce, jsou stejně daleko od sebe: $\overline{B_\ominus B_0} = \overline{B_0 B_\oplus}$;
- **rovnoměrně zrychlený pohyb** (třeba volný pád): $\overline{B_\ominus B_0} \neq \overline{B_0 B_\oplus}$, ale rozdíl $\Delta s = \overline{B_\ominus B_0} - \overline{B_0 B_\oplus}$ se během pohybu nemění;
- **obecný pohyb:** $B_\ominus$, B_0 , $B_\oplus$ neleží na přímce, jsou různě daleko od sebe: $\overline{B_\ominus B_0} \neq \overline{B_0 B_\oplus}$.

Vše, co potřebujeme vědět o pohybu (poloha, rychlost, zrychlení, síla) v jistém okamžiku, poznáme z oněch třech sousedících bodů na papíře při záznamu v konkrétní vztažné soustavě (ať už $\mathcal{S}$ či $\mathcal{N}$).

Kdyby můj stůl byl IS a papír by na něm ležel klidně, dokázal bych z každých tří „sousedních“ bodů určit sílu $\vec{F}$ působící v prostředním bodě. Kdyby mi ale někdo během zanášení poloh sledovaného bodu papírem hýbal, byly by polohy zaneseny jinam, a vyšla mi i jiná síla $\vec{f} \neq \vec{F}$. Se znalostí pohybu papíru vůči stolu bych však dovedl polohy „přepočítat“ a získat pravdivý výsledek o skutečných působících silách. Totéž interpretováno jinak: můj papír by pak byl obecně NIS, zobrazené body by se od předchozích lišily a vedly k síle $\vec{f}$ lišící se od $\vec{F}$ právě o „setrvačné síly“ $\vec{f}_{\text{setr}} = \vec{F} - \vec{f}$.

6.5 Společné vlastnosti setrvačných sil

Setrvačné síly „působí“ na *všechny* objekty popisované z hlediska neinerciální soustavy⁹. Tyto síly tedy např. z hlediska kolotoče „nutí“ budovy kolem, aby se pohybovaly po kruhových drahách kolem osy kolotoče apod. Jinými slovy, zavedeme-li je, můžeme i z hlediska kolotoče úspěšně popisovat svět, a to jak předměty spojené s kolotočem, tak i stojící mimo něj. Odstředivá a Coriolisova síla tedy (z hlediska Země točící se kolem vlastní osy) správně popíší pohyb Foucaultova kyvadla, stáčení pasátů, ale i pohyb stálic na noční obloze. Shrnutí dohromady tedy každá setrvačná síla

- „působí“ – ve smyslu poznámky pod čarou – na (každý) *pozorovaný objekt*;
- nepopisuje žádnou interakci (mezi dvěma tělesy), a proto nemá smysl k ní hledat reakci ve smyslu 3NZ;
- je to fakticky jen umělý přílepek ($-m\vec{A}_N$) vymyšlený proto, aby 1NZ i 2NZ platily i při popisu z neinerciální vztažné soustavy;
- neexistuje (chcete-li, je identicky rovna nule) v inerciální vztažné soustavě.

6.6 Slovní zmatky; dostředivá síla a jiná „odstředivá síla“

Pojem odstředivé síly právě vyložený je sám o sobě dosti obtížný. Ale ještě horší je, že podobný termín – dostředivá síla – je úplně jiné kategorie. A nejhorší je, že stejný termín – odstředivá síla – se také užívá, ale pro něco zcela jiného.

6.6.1 (Vazbová) dostředivá síla

K tomu, aby se částice pohybovala rovnoměrně po kružnici, musí být výsledná síla kolmá k jejímu směru pohybu. Obvykle bývá tato síla vazbová (provázek, koleje apod.), u planet je to gravitační síla centrálního slunce. Při rovnoměrném pohybu částice směřuje tato síla do středu oskulační kružnice, a proto se nazývá *dostředivá síla*. Pokud se velikost rychlosti mění, tak „dostředivá“ síla *nemá* směr do středu oskulační kružnice. Shrnutí: dostředivá síla (zajišťující křivočarý pohyb)

- působí na *pozorovaný objekt* (od vazby či od ostatních okolních objektů);
- popisuje skutečnou interakci (mezi dvěma tělesy), a proto k ní existuje reakce ve smyslu 3NZ;
- existuje i v inerciální vztažné soustavě.

6.6.2 Odstředivá síla (působící na vazbu)

Pokládáme-li vazbovou dostředivou sílu za akci, pak reakcí k ní je síla, kterou obráceně působí částice na vazbu (provázek, kolejnici . . .). Někdy se tato síla nazývá *odstředivou*: „Koleje poškodila odstředivá síla projíždějících vlaků; ložisko vymlela odstředivá síla špatně vyváženého kola“. Není to moc šťastné z více důvodů. Jednak v případě ložiska ho tato síla poškodí směrem do osy, nikoli od osy¹⁰. Dále, její zavedení pro planetu obíhající kolem slunce by bylo rozporuplné; uvažte nikoli lehkou planetu, ale dvojhvězdu. A především je tato síla něco úplně jiného než právě vyložená (setrvačná) odstředivá síla:

- (vazbová) odstředivá síla *působí na vazbu* (závěs, kolej . . .), nikoli na částici;

⁹Méně emotivně řečeno: Setrvačné síly musíme zahrnout do pohybových rovnic pro *libovolný* objekt, který popíšeme v neinerciální soustavě.

¹⁰No vážně: osa ložiska je prý vymletá *odstředivou silou* – ale je snad nafouklá od středu osy, ven? Nikoli, je vmačkaná, a to samozřejmě ke středu osy, dovnitř!

- (vazbová) odstředivá síla je skutečná síla a existuje při popisu v kterékoli vztažené soustavě;
- (vazbová) odstředivá síla je ve vztahu akce – reakce s dostředivou silou, nutící částici k pohybu po kružnici;
- (vazbová) odstředivá síla nemá jednoduchý smysl, je-li zakřivení dráhy zkoumaného tělesa dáno nikoli vazbou, ale obecným silovým působením, např. gravitací jiného tělesa; pak se tímto polem přenáší na jeho zdroj.

Nicméně, říká se to takto, a těžko najít něco jiného, co by se ujalo¹¹. Nezbyvá než uvážit vždy, o co se jedná: výše uvedené rozdíly vám určitě pomohou jednoznačně rozhodnout.

6.7 Příklady

6.7.1 Košíková na kolotoči: zvláště názorný příklad

Oblíbeným pouťovým trikem na kolotoči bývá volejbalový koš na ose: během zastavování kolotoče se vhodí mezi vozíci se zákazníci volejbalový míč s tím, že každý, kdo se trefí do koše, se může vozit znovu zadarmo.

Každý to rád zkusí, přesně zamíří – ale většinou se velice mine: míč namířený na koš se v letu jaksi zahne doprava a proletí dost daleko od koše. Fyzik sedící na kolotoči si řekne: „Inu, odehnula ho Coriolisova síla spolu s odstředivou.“ Fyzik stojící na zemi vedle kolotoče si řekne: „Ten míč letí ve svislé rovině, a ne po nějaké zahnuté ploše. Ale proč s ním ten člověk míří na koš a ne doleva, když ví, že se sám pohybuje doprava?“ On totiž vidí, že házející, který míří na koš, se sám pohybuje kolmo ke směru, kterým hází. Je to stejné, jako kdyby házel z auta, které projíždí okolo rychlostí stejnou, jakou má na kolotoči házející, tedy $U = R\Omega$. Je-li míč vržen rychlostí $\vec{v}$ k ose, má vůči zemi rychlost $\vec{W}$, která je vektorovým součtem těchto rychlostí: $\vec{W} = \vec{v} + \vec{U}$; rychlosti $\vec{v}$, $\vec{U}$ jsou k sobě kolmé. Po době $\tau = R/v$ proletí ve vzdálenosti $D = U\tau = RU/v$ od osy.

6.7.2 Střelba na židliče

K otáčivé židli je našroubována vzduchová pistole mířící radiálně od osy otáčení a o něco dále terč. Roztočíme-li židli, dopadnou střely jinam, než když je židle v klidu.

Pozorovatel na židli měří zakřivený let střely a vysvětlí ho Coriolisovou a odstředivou silou, působící na pohybující se střelu. Pozorovatel na zemi vidí shora přímý let střely. Vidí však, že střela má vedle své rychlosti $\vec{w}$ vůči zbraňi i složku o velikosti $V = R\Omega$ danou tím, že se zbraň ve vzdálenosti R od osy otáčí úhlovou rychlostí Ω , a dále že během doby letu τ se cíl posune po oblouku o středovém úhlu $\Omega\tau$.

K oběma popisům přistupuje ovšem ještě mírný pokles ve výšce daný volným pádem střely během letu.

6.7.3 Odklon pasátů

Předmět, který stojí na rovníku, se vůči inerciální, nerotující soustavě $\mathcal{S}$ spojené s osou Země pohybuje úctyhodnou rychlostí. Rovník má zhruba 40 030 km, Země se otočí zhruba jednou za 24 hodin (přesněji ovšem musíme uvažovat hvězdný den, cca 86 164 s), čili předmět má vůči $\mathcal{S}$ nadzvukovou rychlost: $V_0 \approx 465$ m/s. Posune-li se předmět o 30° na sever, měl by mít rychlost nižší: $V_{30^\circ} = 465 \cdot \cos 30^\circ$ m/s ≈ 400 m/s, aby byl v klidu vůči Zemi.

¹¹Zkuste přemluvit lidi, aby říkali *teplotoměr* namísto *teploměr*, protože měří teplotu, a ne teplo!

Pokud si tedy předmět o hmotnosti m setrvačností ponechal svých 465 m/s, tak přesunem na sever o 30° získal slušnou rychlost $\Delta v = 65 \text{ m/s}$ vůči Zemi, a také tomu odpovídající hybnost $\Delta \vec{p} = m\Delta \vec{v}$ (se směrem na východ). Z hlediska Země se předmět urychlil; toto zrychlení $\vec{a}_{\text{Cor}}$, stejně jako přírůstek $\Delta \vec{p}$ hybnosti, se jeví jako důsledek Coriolisovy síly $\vec{f}_{\text{Cor}}$ „působící“ na točící se Zemi: $\vec{a}_{\text{Cor}} = -\vec{f}_{\text{Cor}}/m$.

A konkrétně k pasátům a vůbec k proudění vzduchu na naší Zemi: když se vzduch přesouvá na severní polokouli směrem od rovníku k pólu (to nastává v horních vrstvách troposféry), tak se právě popsaným mechanismem „předbíhá“ doprava (na východ). Na jižní polokouli při přesunu směrem od rovníku k jižnímu pólu se předbíhá rovněž na východ, tentokrát je to ovšem z jeho hlediska doleva. Naopak, proudí-li vzduch obráceným směrem, tedy směrem od pólů k rovníku (to pozorujeme ve spodních vrstvách atmosféry), pak „nestíhá Zemi“, zpožďuje se oproti zemskému povrchu, a tedy z hlediska svého pohybu se stáčí na západ (opět je to na severní polokouli doprava, na jižní doleva).

Obecně vzato je toto „Coriolisovo stáčení“ při pohybu předmětu na (otáčející se) Zemi tím výraznější, čím blíže jsme pólu. Na rovníku samotném se Coriolisova síla uplatní jen nepatrně – tím, že při pádu z výšky se předmět uchyluje na východ, při pohybu po rovníku směrem východním je předmět nadlehčován. Při pohybu od rovníku směrem k pólu (kterémukoliv) je ovšem přímo na rovníku Coriolisova síla nulová, protože tam je směr pohybu rovnoběžný s osou rotace Země.

6.7.4 Pád z velké výšky

Kámen padající z Eifelovy věže (ve vakuu) by padal asi 7 s a nepadl by přesně podle olovnice, ale zhruba 7 cm na východ. Proč? *Z hlediska Země*: na kámen působila během pádu odstředivá a Coriolisova síla. *Z hlediska inerciální soustavy*: vršek věže je od osy otáčení Země dál, a proto má větší posuvnou rychlost než spodek, takže fakticky nejde přesně o volný pád, ale o vodorovný vrh na východ, po hlavní kružnici ve směru otáčení Země.

Občas se můžete setkat s „aristotelovským“ výkladem: během pádu se Země pod kamenem stáčí trochu pootočit (jako by se kámen ve svém rotačním pohybu se Zemí v okamžiku upuštění měl náhle zastavit!). Za dobu pádu kamene se však spodek i vršek věže posunou o několik kilometrů na východ. Kdyby tedy „aristotelovsky“ kámen zapomněl obíhat kolem zemské osy, jakmile ho nedržíte, dopadl by na *obrácenou* stranu, a to s pěkně velkou odchylkou – o několik kilometrů.

6.7.5 A nakonec Cimrmanovo „Tudy cesta nevede, přátelé!“

Při zájezdu do rovníkové Afriky či Equadoru se na rovníku můžete setkat s ochotnými obchodníky, kteří vám (za mírný bakšiš) ukážou, jak na severní polokouli se při vytékání vody z nádoby malým otvorem ve dně tvoří vír doprava, zatímco o metr dále – už na jižní polokouli – v téže nádobě vytvoří táž voda při vytékání vír levotočivý. Je to velice efektní. (Vy se o to ani nepokoušejte. Nejspíš se vám ten jejich pokus nějak nepovede zopakovat.)

Když si ale uvědomíte:

- že Coriolisovo zrychlení $2v\Omega \sin \theta$ je řádu 10^{-11} m/s^2 (odhad: při zemském poloměru 6 378 km a odchylce v poloze 1 m je $\sin \theta \approx 0,16 \cdot 10^{-6}$; úhlová rychlost Ω otáčející se Země je $\Omega \approx 7,3 \cdot 10^{-5} \text{ s}^{-1}$ a rychlost v proudící vody je malá);
- že je značně těžké ustálit čerstvě nalitou vodu v nádobě tak, aby se ani trošinku netočila;
- že s klesající hladinou a poloměrem otáčení se původní úhlová rychlost víru v kapalině výrazně zvyšuje;
- co dokážou nepatrné mimovolné (ba i nemimovolné) pohyby lidského těla, dané už prostě jen tepem našeho srdce, chvěním svalstva a podobně,

jmou se vás jistě pochybnosti a věrohodnosti tohoto „důkazu“ Coriolisovy síly. Docela právem.

Kapitola 7

Soustava HB a tuhé těleso

2018-07-05

7.1 Soustava hmotných bodů

7.1.1 Zavedení, základní pojmy

Uvažujme soustavu $N > 1$ hmotných bodů; budeme jim pro stručnost říkat částice a budeme je číslovat indexem, např. $n = 1 \dots N$. Jsou situace, kdy má rozumný smysl pokládat soustavu za celek a jako celek ji vyšetřovat. Příklady:

$N = 2$ Slunce + Země anebo Země + Měsíc; Keplerův problém, kap. A; sprzęžené oscilátory, vázané kmity, kap. 5.2.8; molekuly O_2 , N_2 , HCl ;

$N = 3$ Slunce + Země + Měsíc; molekuly H_2O , CO_2 , HCN ;

$N = 9$ zjednodušená sluneční soustava – Slunce a planety; molekula ethanolu C_2H_5OH ;

$N \gg 10^{20}$ kapka vody, krystal soli, kus křídly, dětská hračka „setrvačnick“, vzduch v míči.

Pracujeme-li s takovou soustavu jako s celkem, má smysl hledat, zda lze zavést jen několik málo veličin k jejímu popisu. Některé veličiny budou pouhým součtem dílčích veličin pro každou částici, jiné budou mít vlastnost „průměrné hodnoty“, další z nich mohou být odvozeny. Pro stručnost a přehlednost nevypisujeme meze při sčítání přes částice: $\sum_n := \sum_{n=1}^N$.

Při součtu přes index číslující částice *neužíváme* Einsteinovu konvenci.

Základní aditivní veličiny:

Celková hmotnost M soustavy je součet hmotností všech částic:

$$M := \sum_n m_n \quad . \quad (7.1)$$

Celková hmotnost nezávisí na volbě vztažné soustavy, v níž soustavu popisujeme.

Celková hybnost $\vec{P}$ soustavy je součet hybností všech částic,

$$\vec{P} := \sum_n \vec{p}_n = \sum_n m_n \vec{v}_n \quad . \quad (7.2)$$

Celková hybnost závisí na volbě vztažné soustavy, v níž soustavu popisujeme.

Celkový moment hybnosti $\vec{B}$ soustavy je součet momentů hybností každé částice,

$$\vec{B} := \sum_n \vec{b}_n = \sum_n m_n \vec{r}_n \times \vec{v}_n \quad . \quad (7.3)$$

Celkový moment hybnosti závisí na volbě vztažné soustavy, v níž soustavu popisujeme.

Spin $\vec{S}$ V kvantové částice přisuzujeme částicím aditivní atribut **spin** $\vec{s}$; ten má povahu vlastního („vrozeného“) momentu hybnosti. Pro něj lze zavést celkový spin $\vec{S} := \sum_n \vec{s}_n$ jako součet spinů všech částic soustavy.

Celková kinetická energie E_k soustavy je součet kinetických energií všech částic,

$$E_k := \sum_n E_{kn} = \frac{1}{2} \sum_n m_n v_n^2 . \quad (7.4)$$

Celková kinetická energie závisí na volbě vztažné soustavy, v níž soustavu popisujeme.

Celková síla $\vec{F}$ působící na soustavu je součet všech sil na soustavu působících. Stačí však sčítat jen síly vnější:

$$\vec{F} := \sum_n \vec{F}_n = \sum_n \vec{F}_n^{\text{ext}} . \quad (7.5)$$

Součet všech vnitřních sil je totiž roven nule, protože díky 3NZ ke každé vnitřní síle existuje síla opačná: $\vec{F}_{nk} = -\vec{F}_{kn}$. Celková síla nezávisí na volbě vztažné soustavy, v níž soustavu popisujeme.

Celkový moment sil $\vec{M}$ působící na soustavu je součet všech momentů sil na soustavu působících. Jeho velikost zapíšeme zde vždy $|\vec{M}|$ pro odlišení od celkové hmotnosti M .

Pokud jsou vnitřní síly centrální, stačí sčítat síly vnější:

$$\vec{M} := \sum_n \vec{M}_n = \sum_n \vec{M}_n^{\text{ext}} , \quad (7.6)$$

protože momenty vnitřních sil jsou v tom případě rovny nule. Posunutím počátku vztažné soustavy o $\vec{r}$ se celkový moment sil zmenší o $\vec{r} \times \sum_n \vec{F}$; je-li tedy $\sum_n \vec{F} = \vec{0}$, nezávisí celkový moment sil na volbě vztažné soustavy.

7.1.2 Střed hmotnosti, hmotný střed; těžiště, metacentrum ap.

Střed hmotnosti, hmotný střed Pro každou soustavu lze definovat **střed hmotnosti** neboli **hmotný střed** neboli **hmotnostní střed** $\{\text{center of mass}\}$ se souřadnicí

$$X := \frac{\sum_k m_k x_k}{\sum_k m_k} \quad \text{a analog. pro } y, z. \quad (7.7)$$

Platí tedy

$$MX = \sum_k m_k x_k \quad \text{a analog. pro } y, z. \quad (7.8)$$

V angl. textech se často označuje indexem cm: $\vec{r}_{\text{cm}}$ poloha, $\vec{v}_{\text{cm}}$ rychlost středu hmotnosti apod.

Z matematického hlediska jde o střední hodnotu polohy s váhou m . Pro kontinuum nacházející se v oblasti $\mathcal{V}$ lze proto tento pojem zavést typickou limitou – Stieltjesovým integrálem s mírou m :

$$\sum_n \dots m_n \rightarrow \int_{\mathcal{V}} \dots dm(\vec{r}) \quad (7.9)$$

Zpravidla lze zavést hustotu $\rho(\vec{r})$ pro $\vec{r} \in \mathcal{V}$ a $\rho(\vec{r}) = 0$ pro $\vec{r} \notin \mathcal{V}$, takže $dm = \rho dx dy dz$ a lze integrovat přes celý prostor. Integrál se proto píše zpravidla stručně bez oblasti a proměnných:

$$\sum_n \dots m_n \rightarrow \int \dots dm = \int \dots \rho dx dy dz = \int \dots \rho dV \quad (7.10)$$

takže

$$\vec{R} := \frac{\int \rho \vec{r} dV}{\int \rho dV} . \quad (7.11)$$

Ačkoliv píšeme ρdV , je ρ funkcí polohového vektoru $\vec{r}$, tj. $\rho(\vec{r})$, nikoli snad objemu $\rho(V)$. Zápis $\rho(\vec{r})d\vec{r}$ by ovšem byl zavádějící; příslušný diferenciál není vektor, ale (pseudo)skalár s rozměrem L^3 , nikoli L .

Těžiště; metacentrum Pojmu „střed hmotnosti“ je příbuzný pojem **těžiště**. Zavádí se pro tuhé těleso v tíhovém poli jako bod, do něhož můžeme umístit výslednou tíhovou sílu $\vec{G}$ a nahradit tak spojitě rozložené tíhové působení s tíhovým zrychlením $\vec{g}$ na celé těleso v oblasti $\mathcal{V}$. V homogenním poli těžiště existuje a splývá se středem hmotnosti, má tedy souřadnice podle rov. (7.7), resp. (7.11).

Jednoslovný termín *těžiště* a jeho odvozeniny (např. těžišťová vztažná soustava) se proto často užívají namísto dvojslovného *středu hmotnosti*, kdykoli nehrozí nedorozumění.

V nehomogenním poli obecně těžiště neexistuje. Pro bod analogických vlastností se pak užívají jiné termíny, např. **metacentrum** pro působíště vztaku na loď. Podrobněji viz 7.4.5.

V elektrostati se zavádí **střed náboje** neboli **nábojový střed** $\vec{R}$ analogickým způsobem pro soustavu, jejíž úhrnný elektrický náboj $E = \sum_k e_k \neq 0$ je nenulový, tak, aby platilo $E\vec{R} = \sum_k e_k \vec{r}_k$.

7.1.3 Věta o hybnosti

Protože síly jsou veličiny aditivní, lze snadno zobecnit 2. Newtonův zákon i na soustavu hmotných bodů, a opět stačí uvažovat jen vnější síly

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F} \quad (7.12)$$

Časová změna hybnosti soustavy je rovna výslednici vnějších sil.

Dříve se též nazývala první impulzovou větou.

7.1.4 Věta o momentu hybnosti

I momenty sil jsou veličiny aditivní, takže lze snadno zobecnit zákon zachování momentu hybnosti na soustavu hmotných bodů. Jsou-li navíc vnitřní síly centrální¹, opět stačí uvažovat jen vnější síly

$$\frac{d\vec{B}}{dt} = \vec{M} \quad (7.13)$$

Časová změna momentu hybnosti soustavy je rovna momentu výslednice vnějších sil.

Dříve se též nazývala druhou impulzovou větou.

7.1.5 Kinetická energie; Königova věta

Celková kinetická energie je součtem dílčích kinetických energií všech částic:

$$E_k := \sum_n E_{kn} = \frac{1}{2} \sum_n m_n v_n^2 \quad (7.14)$$

Značíme-li $\vec{u}_n$ rychlost n -té částice v těžišťové soustavě a $\vec{V}$ rychlost hmotného středu, pak platí $\vec{v}_n = \vec{V} + \vec{u}_n$. Z derivace rov. (7.8) podle t plyne $\sum_n m_n \vec{u}_n = \vec{0}$ a lze tedy zjednodušit

$$E_k = \frac{1}{2} \sum_n m_n (\vec{V} + \vec{u}_n) \cdot (\vec{V} + \vec{u}_n) \quad (7.15)$$

$$= \frac{1}{2} V^2 \sum_n m_n + \frac{1}{2} \vec{V} \cdot \sum_n m_n \vec{u}_n + \sum_n \frac{1}{2} m_n u_n^2 \quad (7.16)$$

$$= \frac{1}{2} M V^2 + \sum_n \frac{1}{2} m_n u_n^2 \quad (7.17)$$

Königova věta:

Celková kinetická energie soustavy částic je rovna součtu (kinetická energie myšleného bodu s hmotností M a s rychlostí těžiště) + (součet kinetických energií částic vůči těžišti soustavy).

¹Při necentrálních silách typu náboj-dipól, resp. obecně multipól-multipól, mají částice vlastní moment hybnosti typu spinu a zákony zachování rovněž platí.

7.1.6 Zákony zachování

Zákon zachování celkové hybnosti Z věty o hybnosti plyne, že celková hybnost soustavy se zachovává, jestliže výslednice *vnějších* sil působících na soustavu je rovna nule. (Jakékoli vnitřní síly nemohou změnit celkovou hybnost soustavy).

Zákon zachování celkového momentu hybnosti Z věty o momentu hybnosti plyne, že celkový moment hybnosti soustavy se zachovává, jestliže výsledný moment *vnějších* sil působících na soustavu je roven nule a vnitřní síly jsou centrální. Zachovává se i tehdy, jsou-li vnitřní síly necentrální, ale lze-li je popsat zavedením vnitřních momentů hybnosti částic (spinů).

Zákon zachování celkové mechanické energie Celková mechanická energie soustavy (kinetická + potenciální) se zachovává, jsou-li vnější síly konzervativní. Vazební síly nekonají práci a energii tedy nemění.

7.1.7 Srážka (ráz)

Problematika srážek je rozebrána v samostatné příl. C.

7.2 Pojem tuhého tělesa

7.2.1 Základní představy

Tuhé těleso během řešení úlohy nemění svůj tvar, tj. nedeformuje se.

¶ Rozlišujte tuhé těleso {*rigid body*}, opak: deformovatelné těleso, kontinuum) a pevná látka {*solid state*}, opak: kapalina, plyn. Tuhé těleso se studuje v klasické mechanice, pevná látka coby skupenství v termodynamice a v kvantové teorii.

Jednotlivé body **A**, **B** tuhého tělesa tedy mohou měnit s časem svou polohu: $\vec{r}^{\mathbf{A}}(t)$, $\vec{r}^{\mathbf{B}}(t)$, ale jejich vzdálenost $s = s_{\mathbf{AB}} = |\vec{r}^{\mathbf{A}}(t) - \vec{r}^{\mathbf{B}}(t)|$ se s časem nemění: $ds/dt = 0$.

Každou část tuhého tělesa můžeme zřejmě rovněž pokládat za tuhé těleso.

V definici tedy nejde jen o vnější tvar, ale i o vnitřní strukturu objektu. Kulové akvárium zcela naplněné vodou nebude tuhým tělesem, pokud bude uvnitř voda proudit (např. když budeme akvárium roztáčet). Pokud voda zmrzne (a akvárium to přežije...), bude se celek chovat jako tuhé těleso. Vajíčko natvrdo se vůči roztáčení na špičce chová jako tuhé těleso a roztočíte ho proto na špičce bez problémů; syrové vejce nikoli. Zkuste si to!

Z „mikroskopického“ přístupu dojdeme tedy k tuhému tělesu tak, že ho rozložíme na hmotné body. Tuhé těleso pak bude soustava N hmotných bodů doplněná vazbami, které zaručí, že se vzdálenosti jednotlivých bodů během úlohy nezmění. Obvykle bude N značně velké číslo, potenciálně třeba i nekonečné. I proto budeme hledat jiný, „globální“ popis takový, aby stačil co nejmenší počet vhodných parametrů pro jednoznačné určení stavu tuhého tělesa.

Nakonec obligátní problém: *existuje* tuhé těleso? Odpověď – tuhé těleso existuje nebo neexistuje přesně stejně jako existuje nebo neexistuje hmotný bod. Neexistuje sice reálný objekt, který by při libovolné situaci zachovával svůj tvar a nedeformoval se (ostatně, z teorie relativity přímo plyne, že žádné těleso nemůže být dokonale tuhé, protože by přenášelo – uvnitř sebe – informaci nekonečně rychle). Setkáváme se však s řadou úloh, v nichž některý objekt svůj tvar a vnitřní rozložení hmotnosti zachovává natolik, že ho lze proto pokládat za tuhé těleso. Můžeme tedy odpovědět tak, že ve smyslu naší definice v rámečku nahoře tuhá tělesa existují.

A ještě obecněji: tuhé těleso i hmotný existují či neexistují právě tak jako úsečka nebo číslo 7. Jsou to prostě prvky jednoho z mnoha možných modelů, kterými popisujeme přírodu.

7.2.2 Popis tuhého tělesa. Stupně volnosti

Ukážeme si několik přístupů k problému a jejich vzájemné souvislosti.

Soustava hmotných bodů Jak je zřejmé, je reálné tuhé těleso speciální soustavou prakticky nekonečného množství bodů. (Pokud se zastavíme na atomární úrovni, pak 1 kg železa obsahuje cca $N = 10^{25}$ atomů; stáří Vesmíru je pouhých cca $0,4 \cdot 10^{18}$ sekund.) Doufáme proto, že pro rozumný popis polohy tuhého tělesa bude stačit podstatně méně parametrů. Ukážeme, že stačí 6 parametrů, a to nezávisle na N .

Tuhé těleso můžeme „sestrojit“ z pevně spojených hmotných bodů:

- Jeden jediný hmotný bod má $f_1 = 3$ stupně volnosti. Můžeme ho co do polohy popsat třemi spojitě proměnnými parametry (např. 3 kartézské souřadnice x, y, z , nebo ve sférických souřadnicích analogií nadmořské výšky r , zeměpisné šířky θ a zeměpisné délky φ).

Rovněž geometricky vzato je bod **A** v 3D určen třemi souřadnicemi (např. kartézskými).

- Dvojice spojených hmotných bodů **A**, **B** (model „činka“) má $f_2 = 5$ stupňů volnosti. Každý z bodů má 3 stupně volnosti, ale musíme odečíst 1 stupeň na vazbu zaručující, že jejich vzdálenost $d_{\mathbf{A},\mathbf{B}}$ je pevná.

Geometricky vzato je první bod **A** určen 3 souřadnicemi, druhý bod **B** při pevné vzdálenosti d od **A** musí ležet na povrchu koule se středem v **A** a poloměrem $d = d_{\mathbf{A},\mathbf{B}}$; na ní je **B** určen dalšími 2 parametry (např. úhly v polárních souřadnicích).

- Trojice spojených nekolineárních² bodů má $f_3 = 6$ stupňů volnosti. Bod **C** přidaný k „čince“ mimo její osu dodá další 3 stupně volnosti, ale také další 2 nezávislé vazby (vzdálenosti od bodů **A**, **B** tvořících činku); soustava tří HB s pevnými vzdálenostmi má tedy $f_3 = 6$ stupňů volnosti. Toto platí jen, pokud přidaný bod neleží na podélné ose činky; leží-li na ní, má soustava i nadále jen 2 stupně volnosti.

Geometricky vzato další bod **C**, neleží-li ovšem na spojnici bodů **AB** (na podélné ose činky), má při daných vzdálenostech $d_{\mathbf{AC}}, d_{\mathbf{BC}}$ k dispozici kružnici se středem na přímce **AB** a ležící v rovině kolmé k přímce **AB** a jeho poloha je tedy určena jediným dalším parametrem, např. úhlem φ v rovině této kružnice.

- Každý další přidaný bod přidává sice 3 stupně volnosti, ale také přidává 3 vazby určující jeho vzdálenosti od tří bodů neležících na přímce. Počet $f_N = 6$ stupňů volnosti tuhé soustavy $N \geq 3$ hmotných bodů se tedy již nezvětšuje s přibývajících dalšími body.

Geometricky vzato, vzdálenosti $d_{\mathbf{AD}}, d_{\mathbf{BD}}, d_{\mathbf{CD}}$ určují každý další bod **D** dvojznačně (body **D**, **D'**, které se navzájem zrcadlí podle roviny **ABC**). Při zrcadlení však nejde o spojitě proměnný parametr, takže počet stupňů volnosti již neroste.

Tuhé těleso má 6 stupňů volnosti.

Při různých úvahách bývá někdy vhodné využít toho, že poloha tuhého tělesa je určena (až na zrcadlení), znám-li polohu třech jeho bodů neležících na přímce.

Vztažná soustava S tuhým tělesem můžeme spojit vztažnou soustavu $\mathcal{S}$ s libovolně zvoleným počátkem **O** a libovolně směřovaným pravotočivým trojhranem os x, y, z . Tato vztažná soustava $\mathcal{S}$ se bude pohybovat spolu s tělesem, přičemž jednotlivé body tuhého tělesa budou mít v $\mathcal{S}$ stále stejné, na čas nezávislé souřadnice.

Soustava $\mathcal{S}$ není jediná. Stejně dobře nám poslouží libovolná jiná vztažná soustava $\mathcal{S}'$ obecně s jiným počátkem **O'** a s jinak směřovaným trojhranem os x', y', z' , hlavně že je v klidu vůči $\mathcal{S}$.

Reprezentace tuhého tělesa Někdy bude nejnázornější představa

- tuhé těleso ve svém skutečném tvaru;
- trojice bodů neležících na přímce nehybných vůči tělesu;
- vztažná kartézská soustava pevně spojená s tělesem.

Za šest parametrů určujících polohu tělesa lze s výhodou použít

3 souřadnice vhodného bodu **O** (zpravidla hmotného středu tělesa či počátku souřadnic),

2 úhly určující v prostoru směr vhodné osy **o** procházející bodem **O** (např. osy z vztažné soustavy),

1 úhel určující natočení tělesa kolem této osy **o**.

²tj. neležících na jedné přímce

7.3 Kinematika tuhého tělesa

7.3.1 Přemístění tuhého tělesa

U hmotného bodu bylo nejobecnějším přemístěním posunutí (a to o vektor posunutí $\vec{l} = \vec{r}' - \vec{r}$ z počáteční polohy $\vec{r}$ do koncové polohy $\vec{r}'$). Pro tuhé těleso je možných typů přemístění z polohy S do S' více:

1 Posunutí o $\vec{l}$; při něm se každý hmotný bod $\mathbf{A}$ tuhého tělesa posune o $\vec{l}$ do polohy $\mathbf{A}'$, tedy

$$\vec{r}^{\mathbf{A}'} = \vec{r}^{\mathbf{A}} + \vec{l} \quad (7.18)$$

2a Otočení kolem bodu $\mathbf{O}$; při něm je bod $\mathbf{O}$ samodružný, tj. $\mathbf{O}' = \mathbf{O}$;

2b Otočení kolem osy $\mathbf{o}$ o úhel φ ; při něm každý bod $\mathbf{A}$ tělesa ležící na ose $\mathbf{o}$ je samodružný: $\mathbf{A}' = \mathbf{A}$ a body tělesa ležící mimo osu $\mathbf{o}$ se otočí kolem této osy o týž úhel φ .

Poznámky:

- Bod $\mathbf{O}$ nemusí ležet v tělese (např. pneumatika).
- Osa $\mathbf{o}$ nemusí procházet tělesem.
- Při otočení se lze omezit na úhly $0 \leq \varphi < 2\pi$.
- Body na ose $\mathbf{o}$ při otočení nemění svou polohu a lze tedy připustit, že i tyto body se rovněž kolem osy $\mathbf{o}$ otočily o úhel φ . Pak lze říct, že otočení o úhel φ je společné pro všechny body tělesa.
- Ověřte si, že posunutím ani otočením kolem osy se tuhé těleso „nepoškodí“, tj. že i nadále zůstanou splněny podmínky definující tuhé těleso (nemění se vzájemné velikosti jeho částí).

V kap. 7.3.3 dokážeme **větu d'Alembertovu**: každé otočení kolem bodu $\mathbf{O}$ (2a) je ekvivalentní nějakému otočení kolem vhodné osy $\mathbf{o}$ (procházející bodem $\mathbf{O}$) o vhodný úhel φ (2b).

Infinitezimálním pootočením $d\varphi$ kolem osy $\mathbf{o}$ procházející počátkem souřadnic a určené jednotkovým vektorem $\vec{o}_0$ se bod s polohovým vektorem $\vec{r}$ posune o vektor posunutí $d\vec{r} = \vec{o}_0 d\varphi \times \vec{r}$. Lze dokázat, že diferenciální pootočení se skládají jako vektory³: $\vec{d\varphi} := \vec{o}_0 d\varphi$, a lze tedy definovat vektor úhlové rychlosti $\vec{\omega} := \vec{d\varphi}/dt$. Posuvná rychlost bodu při otáčení pak je:

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} \quad (7.19)$$

Derivací rov. (7.18) podle času t dostáváme rovnici pro rychlost posuvného pohybu

$$\vec{v}^{\mathbf{A}'} = \vec{v}^{\mathbf{A}} + \vec{V} \quad (7.20)$$

což spolu s předchozími rovnicemi dává **základní rovnici kinematiky TT**:

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_{\mathbf{A}}(t) + \vec{\omega}(t) \times \vec{r} \quad (7.21)$$

Bohužel, rovnice nám určuje rychlost $\vec{v}$ a nikoli polohu $\vec{r}$ bodu, což komplikuje její použití a řešení.

7.3.2 Kinematický šroub

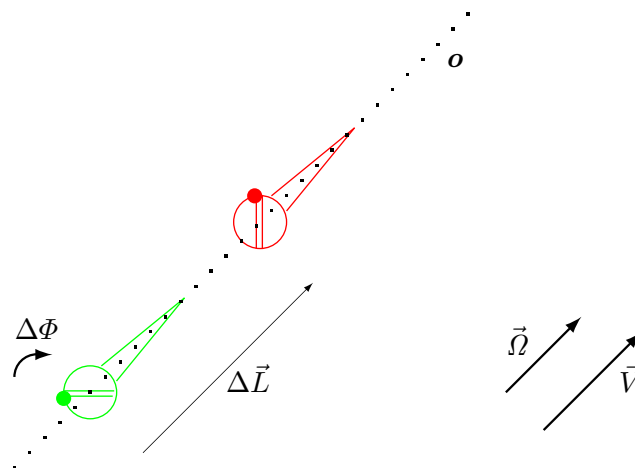
Posunutí a otočení kolem osy lze spolu kombinovat, čímž vznikne **kinematický šroub**.

Kinematický šroub je přemístění dané osou $\mathbf{o}$, posunutím ΔL a úhlem $\Delta\Phi$, kdy každý bod TT

- posuneme o ΔL rovnoběžně s osou $\mathbf{o}$, a poté
- otočíme o úhel $\Delta\Phi$ kolem osy $\mathbf{o}$.

Poznámky:

³Přesněji: axiální vektory neboli pseudovektory.

Obrázek 7.1: Kinematický šroub, rychlost posuvná $\vec{V}$ a úhlová $\vec{\Omega}$

- Posunutí lze tedy popsat vektorem $\Delta\vec{L}$. Protože v celé konstrukci zůstává osa $\mathbf{o}$ pevná, lze i otočení kolem ní popsat vektorem $\Delta\vec{\Phi}$. Z těchto veličin odvodíme dále rychlost posuvnou $\vec{V}$ a úhlovou $\vec{\Omega}$.
- V tomto speciálním případě je posunutí a otočení komutativní, tj. nezáleží na pořadí, v jakém je vykonáme. Jinak obecně posun a otočení nejsou komutativní.
- Samozřejmě připouštíme i speciální případy, kdy $\Delta L = 0$ (samotné otočení) nebo $\Delta\Phi = 0$ (samotný posun) nebo obojí (těleso se nepohnulo z místa; směr $\vec{o}_0$ osy $\mathbf{o}$ je pak libovolný).

Jde o nejobecnější přemístění vztažné soustavy, resp. tuhého tělesa, jak dále dokážeme (Chaslesova [šálsova] věta).

¶ Michael Chasles [mišel šál], 1793-1880, fr. matematik.

Při době přemístění ΔT a limitě $\Delta T \rightarrow 0$ lze zavést:

- vektor posuvné rychlosti $\vec{V} = \Delta\vec{L}/\Delta T$
- vektor úhlové rychlosti $\vec{\Omega} = \Delta\vec{\Phi}/\Delta T$ kolem osy $\mathbf{O}$.

Nejobecnější *pohyb* vytvoříme posloupností takových přemístění postupně po sobě probíhajících v čase – asi jako kinofilm z jednotlivých snímků. S časem T se pak mohou obecně měnit⁴ obě rychlosti $\vec{V}(T)$, $\vec{\Omega}(T)$ co do velikosti i co do směru (osa $\mathbf{O}(T)$).

V duchu naší úmluvy značíme okamžitou osu kinematického šroubu písmenem $\mathbf{O}$ v soustavě $\mathcal{S}$, ale $\mathbf{o}$ v soustavě $\mathcal{N}$. Z hlediska $\mathcal{S}$ se soustava $\mathcal{N}$ otáčí kolem osy $\mathbf{O}$ úhlovou rychlostí $\vec{\Omega}(t)$.

Z hlediska $\mathcal{N}$ se naopak otáčí $\mathcal{S}$, a to úhlovou rychlostí $\vec{\omega}(T) = -\vec{\Omega}(T)$. Toho však nebudeme používat – v duchu kap. 6.1.5.

Dokažme, že nejobecnější přemístění tuhého tělesa lze popsat kinematickým šroubem.

Vyjděme z představy 3 bodů $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ neležících na přímce a určujících polohu tuhého tělesa (vztažné soustavy $\mathcal{S}$); po přemístění budou mít polohy $\mathbf{A}'$, $\mathbf{B}'$, $\mathbf{C}'$ (vztažná soustava $\mathcal{S}'$). Je zřejmé pět možností vzájemných poloh odpovídajících si bodů (po event. přejmenování):

- Všechny body $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ zůstaly na svém místě, tj. $\mathbf{A}=\mathbf{A}'$ atd. Pak se zřejmě těleso nepohnulo, kinematický šroub je nulový ($l = 0$, $\varphi = 0$).
- Body $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, zůstaly na svém místě, bod $\mathbf{C}$ nikoli. Pak byl posuv nulový ($l = 0$) a došlo k otočení kolem osy $\mathbf{o}=\mathbf{AB}$; úhel φ je dán otočením bodu $\mathbf{C}$.
- Body $\mathbf{A}$ zůstal na svém místě, body $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ nikoli. Pak byl posuv nulový ($l = 0$) a došlo k otočení kolem bodu $\mathbf{A}$; v kap. 7.3.3 dokážeme, že ho lze převést na otočení kolem jisté osy $\mathbf{o}$ procházející bodem $\mathbf{A}$.

⁴Mohou se měnit nespojitě i při spojitém pohybu; polohu totiž získáváme integrací rychlostí. Zejména skoková změna směru $\vec{o}_0$ na $\vec{o}_0'$ nemění spojitost polohy s časem.

- Žádný z bodů nezůstal na svém místě a všechny tři se posunuly o týž vektor $\vec{l}$; v tom případě jde o posuv celého tělesa o $\vec{l}$ bez otočení ($\varphi = 0$).
- Žádný z bodů nezůstal na svém místě a bod **A** posunul o jiný vektor než **B**; pokračujeme dalším textem.

Přejdeme nyní od tří bodů k celé soustavě $\mathcal{S}$. Který bod **D** z ní se posunul nejméně ($l^D = \min$), a o jaký vektor $\vec{l}^D$? Jsou zřejmě dvě možnosti:

- Existuje bod **D**, který zůstal na svém místě, tj. $l^D = 0$. Pak jde o otočení kolem bodu **D** a pokračujeme odstavcem kap. 7.3.3.
- Existuje bod **D**, který se posunul o vektor $\vec{l}^D \neq \vec{0}$ do bodu **D'** a žádný jiný bod se neposunul o menší vzdálenost l . Pokračujeme dalším textem.

Tvrdíme, že nejen bod **D**, ale všechny body přímky $\mathbf{o} = \mathbf{DD}'$ (osy šroubu) se posunuly o tentýž vektor $\vec{l}^D$. Tím odpadne možnost, že by minimální posun l nastal pro dva různé směry.

Uvažme libovolný bod **E** uvnitř úsečky $\mathbf{DD}'$. Musí si zachovat svou vzdálenost od **D** (tedy $|D'E'| = |DE|$), takže bod **E'** leží na povrchu koule s poloměrem $|DE|$ a se středem v **D'**. Přitom však bod **E'** nemůže být bodu **E** blíže než $|\vec{l}^D|$, což byl minimální posun. Leží tedy na povrchu nebo vně koule s poloměrem $|\vec{l}^D|$ a se středem v **E**. Obě koule se však dotýkají v jediném bodě, a to na přímkě $\mathbf{DD}'$. To je tedy také jediná možnost, kam se bod **E** mohl přemístit: o stejný vektor posunutí $|\vec{l}^D|$ jako **D**.

Uvažme konečně obecný bod **F** mimo osu $\mathbf{o} = \mathbf{DD}'$. Bod **F** si po přemístění musí zachovat svou vzdálenost od bodů **D**, **E** na ose $\mathbf{o}$, tj. bod **F'** leží na kružnici se středem na ose $\mathbf{o}$, která je průnikem dvou koulí s poloměry $|DF|$, resp. $|EF|$ a se středy **D'**, resp. **E'**. Na ní zjistíme úhel otočení φ .

Tři body **D**, **E**, **F** určují jednoznačně polohu celého tuhého tělesa; vyšetřili jsem tím tedy nejobecnější přemístění tuhého tělesa.

7.3.3 Ekvivalence rotace kolem bodu a kolem osy

Věta d'Alembertova tvrdí, že nejobecnější otočení tuhého tělesa kolem pevného bodu $\mathbf{O} = \mathbf{O}'$ je ekvivalentní jistému otočení kolem jisté osy $\mathbf{o}$ (procházející bodem **O**). Tuto větu nyní dokážeme.

Konstruktivní důkaz Zvolme v $\mathcal{S}$ bod **A** v jednotkové vzdálenosti od **O** a provedme otočení $\mathcal{S} \Rightarrow \mathcal{S}'$. Jsou zřejmě dvě možnosti:

- $\mathbf{A} = \mathbf{A}'$. V tom případě jde o otáčení kolem osy $\mathbf{OA}$.
- $\mathbf{A} \neq \mathbf{A}'$. V tom případě lze přemístění **A** do **A'** provést otočením kolem libovolné osy procházející bodem **O** a ležící v rovině symetrie $\rho_{AA'}$ úsečky $\mathbf{AA}'$. Pokračujeme dalším textem.

Zvolme v $\mathcal{S}$ bod **B** na rovině $\rho_{AA'}$ v jednotkové vzdálenosti od **O**. Jsou zřejmě opět dvě možnosti:

- $\mathbf{B} = \mathbf{B}'$. V tom případě jde o otáčení kolem osy $\mathbf{OB}$.
- $\mathbf{B} \neq \mathbf{B}'$. V tom případě lze přemístění **B** do **B'** provést otočením kolem libovolné osy procházející bodem **O** a ležící v rovině symetrie $\rho_{BB'}$ úsečky $\mathbf{BB}'$. Průsečnice rovin $\rho_{AA'}$ a $\rho_{BB'}$ pak určuje osu $\mathbf{o}$ takovou, že otočením kolem ní přejdou body **O**, **A**, **B** v body $\mathbf{O}' = \mathbf{O}$, **A'**, **B'**.

Existenční důkaz Každé otočení z původní polohy X do polohy X' kolem počátku je v kartézských souřadnicích popsáno transformací $X' = \mathbf{A}X$, kde $\mathbf{A}$ je ortogonální matice, tj. $\mathbf{A}^T = \mathbf{A}^{-1}$. Stačí ukázat, že existuje invariantní směr, tedy taková poloha X , která se transformací zachovává: $X' = \mathbf{A}X = X$.

Z algebry je známo, že homogenní rovnice $\mathbf{A}X = X$ má netriviální řešení tehdy, když je nulový determinant $\|\mathbf{A} - \mathbf{E}\|$, kde $\mathbf{E}$ je jednotková matice. Matice $\mathbf{A}$ je ortogonální, takže

$$\begin{aligned}\|\mathbf{A} - \mathbf{E}\| &= \|\mathbf{A} - \mathbf{A}\mathbf{A}^T\| = \|\mathbf{A}(\mathbf{E} - \mathbf{A}^T)\| = \|\mathbf{A}\|\|\mathbf{E} - \mathbf{A}^T\| = \\ &= 1 \cdot \|(\mathbf{E} - \mathbf{A})^T\| = -\|(\mathbf{A} - \mathbf{E})^T\| = -\|\mathbf{A} - \mathbf{E}\|,\end{aligned}$$

takže nutně $\|\mathbf{A} - \mathbf{E}\| = 0$.

Determinant je tedy nulový, a proto homogenní rovnice $\mathbf{A}X = X$ má netriviální řešení X udávající osu rotace $\mathbf{o}$ ekvivalentní uvažovanému otočení z původní polohy X do polohy X' kolem počátku.

7.4 Dynamika TT: skládání sil; silová dvojice; dynamický šroub

7.4.1 Pojmy a názvy: vektor volný, vázaný, klouzavý

Volný vektor V mechanice hmotného bodu jsme zavedli pojem vektoru jakožto veličiny určené směrem a velikostí (geometrické pojetí) anebo jakožto trojice kartézských složek vektorů, které se při změně vztažné soustavy transformují jistým způsobem (složkové pojetí). Tento vektor budeme pro určitost nazývat **volným vektorem**, např. $\vec{w}$. Pracujeme s nimi podle pravidel vektorového počtu z matematiky (skládání vektorů, lineární kombinace, součiny skalární a vektorový atd.).

Vázaný vektor Při studiu hmotného bodu nacházejícího se v jistém místě $\mathbf{A}$ (s polohovým vektorem $\vec{r}^{\mathbf{A}}$) se všechny vektory týkaly tohoto bodu: poloha bodu $\vec{r}$, jeho rychlost $\vec{v}$, zrychlení $\vec{a}$, síla $\vec{F}$ působící na tento bod apod., a nebylo tedy potřeba žádné dodatečné upřesnění. Bod $\mathbf{A}$ jsme jakožto samozřejmost ani nezmiňovali a pracovali jsme tak, jako se pracuje s volnými vektory.

Při studiu soustavy hmotných bodů však potřebujeme vektorům přiřadit určité *umístění* v prostoru. Potřebujeme rozlišit sílu působící v bodě $\mathbf{A}$ od síly působící v bodě $\mathbf{B}$, rychlost HB nacházejícího se v místě $\mathbf{A}$ od rychlosti jiného HB v místě $\mathbf{B}$ apod.. Zavedeme proto několik pojmů:

Vázaný vektor je dvojice [volný vektor; bod]. Značme ji $[\vec{w}; \mathbf{A}]$, případně stručněji $\vec{w}^{\mathbf{A}}$ či $\vec{w}_{\mathbf{A}}$.

Umístění vázaného vektoru $\vec{w}_{\mathbf{A}}$ je bod $\mathbf{A}$. (U síly $\vec{F}^{\mathbf{A}}$ se zpravidla nazývá **působíště**).

Vektorová přímka nenulového vázaného vektoru $\vec{w}^{\mathbf{A}}$ je přímka procházející bodem $\mathbf{A}$ a mající směr $\vec{w}_0$ vektoru $\vec{w}$.

Vektorová přímka je množina bodů s polohovými vektory $\vec{r}^{\mathbf{A}} + \lambda \vec{w}_0$ pro $-\infty < \lambda < \infty$.

Vázané vektory můžeme skládat jen tehdy, mají-li totéž umístění.

Klouzavý vektor Při studiu tuhého tělesa se setkáme se situací, kdy je rozumné mezi vázanými vektory zavést ekvivalenci: vázané vektory $\vec{F}_{\mathbf{A}}$ a $\vec{F}_{\mathbf{B}}$ s různými umístěními téhož volného vektoru si budou ekvivalentní, jestliže posunutí $\vec{l} = \vec{r}_{\mathbf{B}} - \vec{r}_{\mathbf{A}}$ je rovnoběžné (i nesouhlasně) s volným vektorem $\vec{F}$. Pak vektory $\vec{F}_{\mathbf{A}}$ a $\vec{F}_{\mathbf{B}}$ budou různými reprezentacemi téhož klouzavého vektoru.

Umístění $\mathbf{A}$ klouzavého vektoru $\vec{F}_{\mathbf{A}}$ lze posouvat podél vektorové přímky jeho volného vektoru $\vec{F}$.

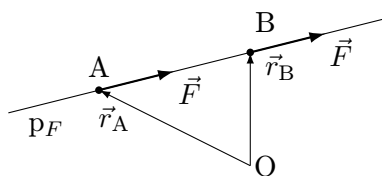
7.4.2 Klouzavý vektor

Zatím jsme brali jako fakt, že dva body $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ tuhého tělesa zachovávají stále stejnou vzdálenost; je to jednoduchý případ *vazby* {constrain}, tedy omezení pohybu kladené na mechanickou soustavu; vazba se probírá podrobně v analytické mechanice. Vektorová mechanika vycházející z Newtonových pohybových rovnic nemá prostředek, jak přímo pracovat s vazbou; zná však pojem síly. Nahradíme proto vazbu mezi body $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ dvěma vnitřními *vazbovými silami* $\vec{F}^{\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}}$ a $\vec{F}^{\mathbf{B} \rightarrow \mathbf{A}}$, které budou působit mezi body $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ a budou vždy právě tak velké, aby kompenzovaly všechny možné vnější síly, které by mohly vzdálenost těchto bodů změnit.

Uvažme tyto okolnosti pro vazbové síly:

- vazbová síla $\vec{F}^{A \rightarrow B}$ (působící od tělesa **A** na **B**) a vazbová síla $\vec{F}^{B \rightarrow A}$ (působící od tělesa **B** na **A**) musejí splňovat zákon akce a reakce, tedy $\vec{F}^{A \rightarrow B} = -\vec{F}^{B \rightarrow A}$;
- mají-li vazbové síly pouze zabránit změně vzdáleností obou bodů **A**, **B**, musejí být centrální, tj. musejí mít směr podél relativního polohového vektoru $\vec{R}^{AB}$ či opačný, aby podle potřeby tiskly body **A**, **B** k sobě či od sebe, a aby jejich výsledný silový moment byl nulový.

Z toho ovšem plyne, že k síle $\vec{F}^A$ působící na tuhé těleso v libovolném bodě můžeme kdykoli přičíst dvojici dalších (vnitřních, vazbových) sil podél vektorové přímky tohoto vektoru; první z nich $\vec{F}^{A \rightarrow B}$ se právě vyruší s působící silou $\vec{F}^A$ a druhá $\vec{F}^{B \rightarrow A}$ představuje sílu, která by vznikla přesunutím původní síly $\vec{F}^A$ do jiného bodu **B** ležícího na vektorové přímce $\vec{F}^A$. Touto úvahou docházíme k pojmu *klouzavého vektoru* $\vec{F}^A$, tedy vlastně třídy navzájem ekvivalentních vektorů (v praxi uvažujeme vhodně zvoleného reprezentanta této třídy), odpovídajících témuž volnému vektoru $\vec{F}$ a s působištěm umístěným libovolně (vhodně) na vektorové přímce, tj. na přímce procházející bodem **A** a mající směr vektoru $\vec{F}$. Srv. str. 25.



7.4.3 Skládání dvou klouzavých vektorů. Silová dvojice; dynamický šroub

Základní operace s klouzavými vektory (jejich skládání a vznik silové dvojice) jste poznali na střední škole. Víte, že skládáním klouzavých vektorů můžeme dostat buď opět klouzavý vektor, nebo volný vektor zcela jiného typu, tzv. silovou dvojici. Zopakujeme a doplníme nyní skládání vektorů; v závěru uvedeme jinou, univerzální cestu.

Při skládání dvou klouzavých vektorů $\vec{F}_A$, $\vec{G}_B$ mohou nastat tyto situace:

1. Vektory jsou různoběžné (tj. jejich neorientované směry jsou různé a vektory leží v téže rovině – volné vektory $\vec{F}$, $\vec{G}$, $\vec{r}_B - \vec{r}_A$ jsou komplanární);
2. Vektory jsou rovnoběžné, přičemž pro volné vektory platí $\vec{F} \neq -\vec{G}$;
3. Vektory jsou rovnoběžné, přičemž pro volné vektory platí $\vec{F} = -\vec{G}$; tento případ se nazývá *silová dvojice*;
4. Vektory jsou mimoběžné (tj. neleží v téže rovině; to se na SŠ nejspíš nebralo).

Rozeberme tyto případy podrobněji:

1. Různoběžné vektory $\vec{F}_A$, $\vec{G}_B$

Různoběžné vektory můžeme posunout až do průsečíku jejich vektorových přímek. Tam je sečteme jako vázané vektory s tímž působištěm. Nakonec můžeme výsledek posunout podél jeho vektorové přímky do oblasti, která nás zajímá.

Praktická komplikace nastává při rýsování, protínají-li se vektorové přímky mimo papír. Existují ovšem obratné konstrukce, jak si počít i v tomto případě; protože my pravděpodobně nebudeme tento případ muset řešit, spokojíme se s univerzálním řešením uvedeným později.

2. Rovnoběžné vektory $\vec{F}_A$, $\vec{G}_B$, kde $\vec{F} \neq -\vec{G}$

K vektorům doplníme dvojici stejně velkých a opačných sil $\pm \vec{H}$ podél spojnice bodů **A**, **B**. Přičteme-li tyto síly k původním, dostaneme dvojici sil, které jsou různoběžné, čímž jsme úlohu převedli na předchozí případ.

3. Silová dvojice: nesouhlasně rovnoběžné vektory $\vec{F}_A, \vec{G}_B$, kde $\vec{F} = -\vec{G}$

Tento případ nelze redukovat na jeden klouzavý vektor předchozí metodou, protože i po přičtení pomocné dvojice sil $\pm \vec{H}$ vznikne táž situace s nesouhlasně rovnoběžnými vektory téže velikosti. Této soustavě říkáme silová dvojice a přisoudíme jí volný vektor zvaný moment dvojice $\vec{M} = \vec{r}^{AB} \times \vec{F}_A$, kde $\vec{r}^{AB}$ je relativní polohový vektor od bodu **B** k bodu **A**. Značíme-li ρ rovinu určenou vektory $\vec{F}_A, \vec{G}_B$, pak $\vec{M}$ je k rovině ρ kolmý.

Ověřte si, že silová dvojice má opravdu charakter volného vektoru. Mějme v rovině ρ nenulovou silovou dvojici $\vec{F}_A, -\vec{F}_B$. Pak lze vytvořit ekvivalentní silovou dvojici $\vec{G}^C, -\vec{G}^D$ pro bod **C** zadaný kdekoliv v prostoru a nenulový vektor $\vec{G}$ zadaný libovolně v rovině ρ' rovnoběžné s rovinou ρ . Bod **D** leží v rovině ρ' a je tím již určen jednoznačně až na posunutí ve směru $\vec{F}$ (bez ohledu na orientaci).

¶ Rozlišujeme termín *silová dvojice* (výše definovaná) a sousloví *dvojice sil* (dvě síly libovolně zvolené, stejně jako trojice sil, čtveřice sil, obecně n -tice sil).

4. Mimoběžné vektory $\vec{F}_A, \vec{G}_B$

Tuto kombinaci nemůžeme uvedenou cestou zjednodušit. Můžeme ji však převést na **dynamický šroub** (klouzavý vektor + silová dvojice s momentem v tomtéž směru (neorientovaném), jaký má klouzavý vektor). Konkrétní převedení popíšeme v dalším odstavci, a to zcela obecně, pro libovolný počet klouzavých vektorů i silových dvojic.

7.4.4 Skládání libovolného počtu klouzavých vektorů a silových dvojic

Uvažujme soustavu N_1 klouzavých vektorů a N_2 silových dvojic. Složíme ji na *jediný dynamický šroub* následujícím postupem:

1. Zvolíme libovolný bod **O**.
2. Klouzavý vektor $\vec{F}_A$ přesuneme rovnoběžně do bodu **O** tím, že pro něj doplníme do bodu **O** jednak sílu $\vec{G}^O = \vec{F}^O$, jednak sílu přesně opačnou: $\vec{H}^O = -\vec{F}^O$. Síly $\vec{G}, \vec{H}$ mají totéž působiště, lze je tedy sečíst, a vyjde nulový vektor; jeho doplněním jsme jistě soustavu tvořenou jediným klouzavým vektorem $\vec{F}_A$ nezměnili.
3. Nyní však interpretujeme sílu $\vec{G}^O$ jako „přesunutou“ sílu $\vec{F}^O$, a dvojici $\vec{F}^O, \vec{H}^O$ jako dvojici sil popsanou volným vektorem – jejím momentem $\vec{M}$.
4. Tím je klouzavý vektor v bodě **A** nahrazen klouzavým vektorem v bodě **O** a silovou dvojicí $\vec{F}^O, \vec{H}^O$.
5. Toto učiníme pro všech N_1 klouzavých vektorů v různých bodech prostoru. Tím dostáváme soustavu N_1 klouzavých vektorů umístěných v bodě **O** a $N_1 + N_2$ silových dvojic (ty jsou, jak víme, popsány volným vektorem svého momentu).
6. Sečteme všech N_1 klouzavých vektorů v bodě **O**. Výsledkem je jediný klouzavý vektor v **O**.
7. Sečteme všech $N_1 + N_2$ momentů silových dvojic. Výsledkem je jediná silová dvojice s momentem $\vec{M}$ (volný vektor).
8. Nyní je celá soustava převedena na jediný klouzavý vektor $\vec{G}^O$ a jedinou silovou dvojici s momentem $\vec{M}$.
9. Převedení na dynamický šroub: Moment $\vec{M}$ silové dvojice rozdělíme na složku $\vec{M}_{||}$ rovnoběžnou s $\vec{G}$ a na složku $\vec{M}_{\perp}$ kolmou k $\vec{G}$.
Složku $\vec{M}_{\perp}$ sečteme s klouzavým vektorem $\vec{G}^O$; vektor se tím rovnoběžně posune jinak, pryč z bodu **O**.
Zbývá tedy tento posunutý klouzavý vektor, a k němu dvojice $\vec{G}$ s momentem stejného směru (event. až na orientaci), jaký má onen posunutý klouzavý vektor — vytvořili jsme tedy dynamický šroub.

Závěrem lze shrnout:

Libovolnou soustavu klouzavých sil a silových dvojic lze převést na dynamický šroub.

7.4.5 Těžiště; metacentrum

Nyní se můžeme podrobněji vrátit k problematice zmíněné v kap. 7.1.2.

Těžiště Střed hmotnosti byl definován jako jedna z charakteristik tělesa s pevně rozloženou hmotností, bez použití dynamiky, tedy bez sil jakéhokoli druhu. Analogickým způsobem však lze zavést i pojem výsledné síly spojitě rozložené (silového pole) v nějaké oblasti $\mathcal{V}$. Uvažujme konkrétně *homogenní* tíhové zrychlení $\vec{g}$ vyvolávající na homogenní tuhé těleso rozložené v oblasti dV s hustotou ρ sílu (tíhovou sílu) $d\vec{G} = \rho\vec{g}dV$. Všechny tyto dílčí síly můžeme sečíst jako klouzavé vektory a dostaneme rovněž klouzavý vektor

$$\vec{G} = \int_{\mathcal{V}} d\vec{G} = \int \rho\vec{g}dV \quad (7.22)$$

s vektorovou přímkou zvanou **těžnice**. Při libovolné poloze tělesa vůči *homogennímu* tíhovému poli procházejí všechny těžnice (vztažené vůči tělesu) jediným bodem zvaným **těžiště**; jeho souřadnice jsou totožné se souřadnicemi středu hmotnosti, jak se snadno přesvědčíme výpočtem momentu výsledné síly a součtu (resp. integrálu) momentů sil dílčích; je-li vztažen vůči těžišti, je nulový:

$$M\vec{G}\vec{R} = \int_{\mathcal{V}} \rho\vec{r} \times d\vec{G} = \int \rho\vec{r} \times \vec{g}dV = \vec{0} \quad (7.23)$$

¶ Jednoslovný termín „těžiště“ je běžným hovorovým výrazem, je krátký a umožňuje snadno tvoření odvozenin (těžnice, těžišťová soustava). Proto se často užívá obecně, i v nehomogenním silovém poli, i namísto „střed hmotnosti“.

V *nehomogenním* silovém poli lze sice pro každou polohu tělesa jednoznačně najít (klouzavou) výslednici sil a její těžnici, jenže tyto těžnice se pro různé polohy tělesa obecně neprotínají a neskýtají tedy možnost definovat „univerzální těžiště“.

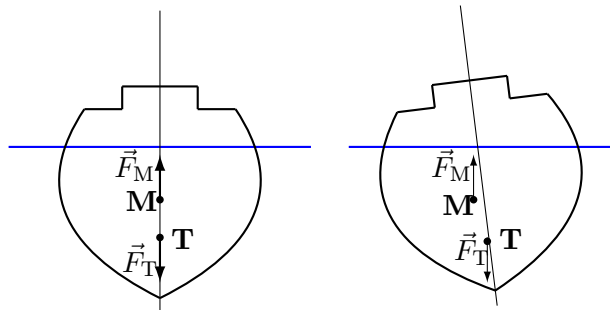
„Zobecněnému těžišti“ v dané poloze tělesa v nehomogenním silovém poli nejlépe vyhovuje bod, v němž se protíná těžnice v této poloze s těžnicí při poloze této polohy blízké. Takový bod však ani nemusí existovat, např. když tyto průsečíky jsou různé pro malá pootočení tělesa podle os k sobě kolmých, podobně jako neexistuje jedno ohnisko pro čočku s astigmatickou vadou.

Reálné gravitační (a ovšem i tíhové) pole Země se při přesném měření, případně při rozsáhlé zkoumané oblasti $\mathcal{V}$, projeví jako nehomogenní: ostatně ani těžnice se v žádném „středu Země“ neprotínají. Střed hmotnosti Země samozřejmě existuje i nadále, ale není dán těžnicemi, nýbrž (obecně nehomogenním) rozložením hustoty ρ .

Zde se nabízí roztomilý didaktický příklad, jak lze užít i neexistujícího pojmu k vysvětlení a správnému pochopení problému. Při vysvětlování rozdílu mezi gravitací a tíhou se připomene, že tíha $\vec{G}_T$, reálně měřená na povrchu otáčející se Země, zahrnuje vedle gravitace $\vec{G}_G$ i (setrvačnou) odstředivou sílu $\vec{F}_O$ směřující *kolmo od osy* rotace Země, zatímco gravitace směřuje *do středu Země*. Rozdíl mezi nimi je zřejmý a bude určitě správně pochopen, i když, jak víme, střed Země v tomto smyslu neexistuje. Naopak bych však pokládal za zavádějící mluvit zde namísto „středu Země“ o jejím těžišti (to má smysl ve vnějším homogenním poli, navíc nemusí existovat) či středu hmotnosti, který sice existuje, ale není zde podstatný; ad absurdum: střed hmotnosti S soustavy Země-Slunce leží uvnitř tělesa Slunce, přesto předmět na povrchu Země je „spojenými silami Slunce a Země“ přitahován směrem k Zemi, nikoli směrem k bodu S .

Připomeňme konečně, že setrvačná odstředivá síla působící na bod o hmotnosti m , která je rovna $\vec{F}_O = m\vec{r}\omega^2 = mv^2/r$, je výrazně nehomogenní. Proto při vyšetřování otáčejícího se tělesa nebo tělesa v otáčející se soustavě hraje střed hmotnosti podstatně menší roli. Zejména celková síla $\vec{F}_O$ působící na rozlehlejší těleso není rovna $M\vec{R}\omega^2$ apod.

Metacentrum {*metacenter*} Speciálním případem takové nehomogenní síly, na niž lze vhodně zobecnit pojem těžiště, je vztlaková síla $\vec{F}_M$ působící na loď ponořenou ve vodě. Pole vztlakové síly je



podle Archimédova zákona prakticky konstantní (homogenní) pro část lodi právě ponořenou ve vodě, nulové pro zbytek lodi a celkovou vztlakovou sílu $\vec{F}_M$ lze umístit do těžiště M myšleného „vodního tělesa“ tvořeného vodou a majícího tvar ponořené části lodi; nazýváme ho **metacentrem** lodi. Jeho poloha je určena jen geometrií spodního pláště lodi, nikoli např. rozložením nákladu; tímto rozložením je ovšem určeno těžiště T , do něhož soustředíme celkovou tíhu lodě $\vec{F}_T$. Vztlaková síla tvoří s tíhou lodi silovou dvojici. Pokud tato dvojice při natočení lodi otáčí loď zpět do původní „svislé“ polohy (jako na ob-

rázku), je dobře; pokud je tomu naopak, loď se otočí ještě více, a nakonec se převrátí. Pro stabilitu lodi je pochopitelně žádoucí, aby těžiště T naložené lodi bylo co nejnižší pod metacentrem M , aby tím silová dvojice navracějící loď do svislé polohy při vychýlení byla co největší.

7.5 Dynamika tuhého tělesa

Nahližejme na tuhé těleso jako na soustavu N částic s vazbami zaručujícími tuhost tělesa; tyto vazby newtonovsky nahradíme vnitřními **vazbovými silami**, kde $\vec{f}^{AB}$ značí sílu působící od bodu B na bod A . Tato síla má působiště v bodu A s polohovým vektorem $\vec{r}_A$ a vektorovou přímkou AB ; bude podle okolností (tlak či tah na těleso) odpudivá či přitažlivá, ale vždy centrální vůči bodům A, B , tedy

$$\vec{f}^{AB} \parallel \vec{r}_B - \vec{r}_A, \text{ neboli } \vec{f}^{AB} \times (\vec{r}_B - \vec{r}_A) = \vec{0}. \quad (7.24)$$

Stejně jako pro soustavu hmotných bodů máme definovány celkovou hmotnost M tělesa, hmotný střed s polohou danou váženým polohovým vektorem s vahou ρ , tj. $\vec{R} = \frac{1}{M} \int \vec{r} \rho dV$, rychlostí $\vec{V}$ a zrychlením $\vec{A}$, a dále hybnost $\vec{P} = \int \rho \vec{v} dV$ tělesa. I zde je výsledná síla $\vec{F}$ působící na celé těleso dána jen silami *vnějšími* a vazbové síly se (jakožto vnitřní síly) neuplatní, protože podle 3NZ (zákon akce a reakce) ke každé vazbové síle – akci $\vec{f}^{jn}$ existuje právě jedna síla – reakce $\vec{f}^{nj}$, a platí pro ni $\vec{f}^{jn} = -\vec{f}^{nj}$.

To je také asi jediný případ, kdy dává smysl počítat spolu síly jsoucí ve vztahu akce a reakce. Působí samozřejmě na různé částice, ale my všechny částice bereme jako součásti jediného objektu.

Při výpočtu výsledné síly působící na tuhé těleso stačí uvažovat jen síly vnější.

Platí opět věta o hybnosti, tj.

$$\text{Časová změna hybnosti tělesa je rovna výslednici vnějších sil: } \frac{d\vec{P}}{dt} = \sum \vec{F}^{ex}$$

i věta o momentu hybnosti, protože vazbové síly jsou centrální:

$$\text{Časová změna momentu hybnosti tělesa je rovna výslednici vnějších momentů sil: } \frac{d\vec{B}}{dt} = \sum \vec{M}^{ex}$$

Jak jsme již ukázali dříve, součet libovolné soustavy vnějších sil a momentů sil je ekvivalentní jednomu dynamickému šroubu.

7.6 Rovnováha tuhého tělesa

Aby se tuhé těleso nacházelo v rovnováze, musí být výsledná síla na něj působící nulová a výsledný moment sil rovněž nulový.

Je-li tuhé těleso v jeden okamžik v inerciální soustavě v klidu (má-li posuvnou rychlost nulovou a nerotuje) a je-li v rovnováze, zůstane v klidu stále.

7.7 Rotace kolem pevné osy

7.7.1 Problematika

Těleso rotující kolem osy o pevné vůči tělesu i vůči laboratoři má jeden stupeň volnosti; jeho polohu lze jednoznačně popsat např. jedním úhlem φ . Tento úhel je týž pro všechny body tělesa (s konvencí pro body na ose, viz str. 82). Po dalším otočení tělesa kolem osy o o úhel otočení $\Delta\varphi$ je tento úhel otočení pro kterýkoli bod tělesa stejný (dráha posunutí je obecně různá, úměrná vzdálenosti od osy). Proto také při otáčení kolem osy má každý bod tělesa tutéž úhlovou rychlost $\vec{\omega}$ o velikosti

$$\omega := \frac{d\varphi}{dt} \quad (7.25)$$

směr $\vec{o}_0 = \vec{\omega}_0 := \vec{\omega}/\omega$ klademe pravotočivě do osy otáčení (prsty pravé ruky jsou ve směru otáčení, palec má směr vektoru úhlové rychlosti).

7.7.2 Charakteristické veličiny

Posuvná rychlost $\vec{v}$ bodu $\mathbf{B}$ při otáčení je rovna

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} = \vec{\omega} \times \vec{r}_\perp, \text{ kde zavedeme} \quad (7.26)$$

$$\vec{r}_\perp := \vec{r} - \vec{\omega}_0(\vec{\omega}_0 \cdot \vec{r}), \quad \vec{r}_\perp \perp \vec{\omega} \quad (7.27)$$

$$v = \omega r_\perp \quad (7.28)$$

kde $\vec{r}$ je polohový vektor bodu $\mathbf{B}$ a $\vec{r}_\perp$ je složka $\vec{r}$ kolmá k ose o rotace.

Moment hybnosti $\vec{B}$ tělesa vůči ose o je součet všech dílčích momentů hybnosti vůči ose o .

$$\vec{B} = \sum_n \vec{b}_n = \sum_n \vec{r}_n \times \vec{p}_n \quad (7.29)$$

Podle rov. (7.26) lze tento výraz dále upravit

$$\vec{B} = \sum_n \vec{r}_n \times m_n \vec{v}_n = \sum_n m_n \vec{r}_n \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_n) \quad (7.30)$$

$$= \vec{\omega} \sum_n m_n r_{\perp n}^2 = I \vec{\omega} \quad (7.31)$$

Moment setrvačnosti I vůči ose o je skalár zavedený vztahem

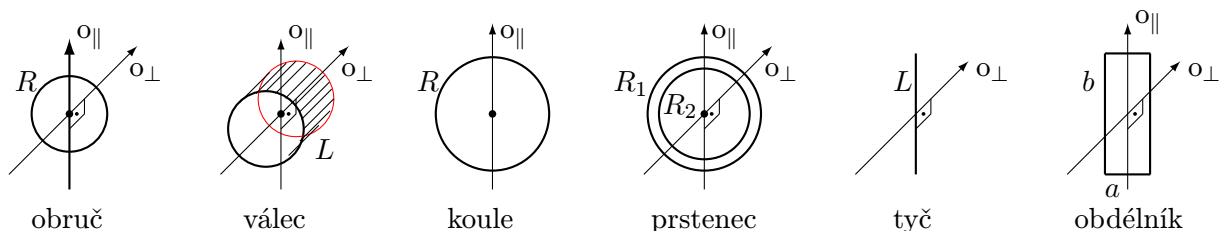
$$I = \sum_n m_n r_{\perp n}^2 = \int_\Gamma r_\perp^2 \rho(\vec{r}) dV, \quad (7.32)$$

kde $r_{\perp n}$ je kolmá vzdálenost n -tého bodu (resp. bodu s polohovým vektorem $\vec{r}$) od osy o rotace. (O něco dále zavedeme i tenzor setrvačnosti.) Moment setrvačnosti I závisí na volbě počátku souřadnic; minimální hodnotu I_T má při volbě počátku souřadnic v hmotném středu (těžišti) tělesa. Připomeňme, že celková hmotnost M tělesa je

$$M = \sum_n m_n = \int_\Gamma \rho(\vec{r}) dV, \quad (7.33)$$

což umožňuje spočítat moment setrvačnosti I_T jednoduchého tělesa z homogenního materiálu vůči ose procházející hmotným středem přímo integrací přes oblast Γ tělesem zaujímanou:

moment I_T	tvar tělesa, osa rotace	moment I_T	tvar tělesa, osa rotace
MR^2	obruč, osa $o_{\perp}$	$\frac{1}{2}MR^2$	obruč, osa $o_{\parallel}$
$\frac{1}{2}MR^2$	válec, osa symetrie $o_{\perp}$	$\frac{1}{4}MR^2 + \frac{1}{2}ML^2$	válec, osa $o_{\parallel}$
$\frac{2}{5}MR^2$	koule plná, osa $o_{\parallel}$	$\frac{2}{3}MR^2$	koule – slupka, osa $o_{\parallel}$
$\frac{1}{2}M(R_1^2 + R_2^2)$	prstenec	$\frac{1}{12}ML^2$	tyč, osa kolmá k tyči $o_{\perp}$
$\frac{1}{12}M(a^2 + b^2)$	plný obdélník, osa kolmá $o_{\perp}$	$\frac{1}{12}Ma^2$	plný obdélník, osa v rovině $o_{\parallel}$



Obrázek 7.2: K tabulce momentů setrvačnosti

Steinerova věta:

$$I' = I_T + Mh^2 \quad (7.34)$$

kde h je vzdálenost osy o' rotace od hmotného středu T tělesa.

Důkaz: Zvolme počátek souřadnic v hmotném středu tělesa a orientujme osu z ve směru osy o rotace, osu x orientujme směrem ke „konkurenční“ ose o' rotace. Pak

$$I_T = \sum_n m_n r_n^2 = \sum_n m_n (x_n^2 + y_n^2) \quad (7.35)$$

$$I' = \sum_n m_n ((x_n - h)^2 + y_n^2) \quad (7.36)$$

$$= \sum_n m_n ((x_n^2 + y_n^2) - 2hx_n + h^2) \quad (7.37)$$

$$= I_T - 2h \sum_n m_n x_n + h^2 \sum_n m_n = I_T + Mh^2 \quad (7.38)$$

záporný člen je roven nule podle definice hmotného středu a naší volby počátku souřadnic v něm.

Kinetická energie E_k tělesa je součet dílčích kinetických energií a zjednoduší se na

$$E_k = \sum_n \frac{1}{2} m_n v_n^2 = \frac{1}{2} \sum_n m_n r_{\perp n}^2 \omega^2 = \frac{1}{2} I \omega^2 \quad (7.39)$$

Věta o momentu hybnosti se rovněž zjednoduší na tvar

$$\frac{d\vec{B}}{dt} = I \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \sum \vec{M}^{\text{ex}} \quad (7.40)$$

7.7.3 Porovnání rotace a posuvu

Pro tuhé těleso je zřejmě jeho rotace kolem pevné osy analogická jeho posuvu podél přímky:

posuv:	posunutí x	rychlost $\vec{V}$	zrychlení $\vec{A}$	hmotnost M	hybnost $\vec{P}$	síla $\vec{F}$	$\frac{1}{2}MV^2$	$M\vec{A} = \vec{F}$
rotace:	úhel φ	úhlová rychlost $\vec{\Omega}$	úhlové zrychlení $\vec{\varepsilon}$	moment setrvačnosti I	moment hybnosti $\vec{B}$	moment síly $\vec{M}$	kinetická energie $\frac{1}{2}I\Omega^2$	pohybová rovnice $I\vec{\varepsilon} = \vec{M}$

7.8 Tenzor setrvačnosti, Eulerovy rovnice

7.8.1 Tenzor setrvačnosti

Momentem setrvačnosti a celkovou hmotností jsme plně popsali těleso rotující kolem osy o , která nemění svou polohu ani vůči tělesu, ani vůči laboratoři. Steinerova věta nám umožňuje omezit se na osy procházející hmotným středem tělesa. Uvítali bychom však charakteristiku tělesa obecnější, vhodnou pro rotaci kolem osy libovolného směru. Vyjdeme proto z obecně platného vztahu

$$\vec{v}_n = \vec{\omega} \times \vec{r}_n \quad (7.41)$$

platné obecně pro n -tý hmotný bod v soustavě tvořící těleso. Víme již z rov. (7.30), že moment hybnosti $\vec{B}$ je lineárně úměrný úhlové rychlosti $\vec{\omega}$ tělesa, jejich vektory však mohou mít různé směry. Závislost obou veličin vyjadřují tenzory setrvačnosti – tenzory druhého řádu I_{jk} (v inerciální laboratorní soustavě) a J_{jk} (v neinerciální soustavě spojené s tělesem).

V **laboratorní** soustavě jsme odvodili a dále upravíme následující vztahy:

$$\vec{B} = \sum_n \vec{r}_n \times \vec{p}_n = \sum_n \vec{r}_n \times m_n \vec{v}_n = \sum_n m_n \vec{r}_n \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_n) \quad (7.42)$$

$$= \sum_n m_n (\vec{\omega}(\vec{r}_n \cdot \vec{r}_n) - \vec{r}_n(\vec{\omega} \cdot \vec{r}_n)) \quad (7.43)$$

Nyní chvilku nebudeme psát ani značku sumy přes n , ani sám index n číslicující částice; měl by být u všech proměnných m a složek $\vec{r}$, $\vec{v}$, $\vec{p}$, nikoli však u úhlové rychlosti $\vec{\omega}$, která je všem částicím společná. Takto zjednodušený zápis ve složkové symbolice bude znít

$$B_j = \sum_{klpq} \varepsilon_{jkl} x_k \varepsilon_{lpq} m \omega_p x_q \quad (7.44)$$

$$= m \sum_{klpq} \varepsilon_{jkl} \varepsilon_{lpq} x_k \omega_p x_q \quad (7.45)$$

$$= m \sum_{klpq} (\delta_{jp} \delta_{kq} - \delta_{jq} \delta_{kp}) x_k \omega_p x_q \quad (7.46)$$

$$= m \omega_j \sum_k x_k x_k - m x_j \sum_k \omega_k x_k \quad (7.47)$$

$$= \sum_r \omega_r I_{jr} \quad (7.48)$$

kde tenzor I_{jr} má složky (a tady si u m , x představte index n , první suma $\sum_n$ přes něj sčítá)

$$I_{11} = \sum_n m(x_2^2 + x_3^2) \quad ; \quad I_{23} = I_{32} = - \sum_n m x_2 x_3 \quad (7.49)$$

$$I_{22} = \sum_n m(x_3^2 + x_1^2) \quad ; \quad I_{31} = I_{13} = - \sum_n m x_3 x_1 \quad (7.50)$$

$$I_{33} = \sum_n m(x_1^2 + x_2^2) \quad ; \quad I_{12} = I_{21} = - \sum_n m x_1 x_2 \quad (7.51)$$

Tím bychom dostali pohybovou rovnici tuhého tělesa v inerciální – laboratorní – soustavě ve tvaru

$$\frac{d}{dt} \sum_k \omega_k I_{jk} = M_j \quad (7.52)$$

Bohužel, tato rovnice není použitelná.

Bereme-li totiž opravdu veličiny v laboratorní soustavě, pak díky otáčení tělesa ukazuje polohový vektor $\vec{r}$ pokaždé na jinou částici, s jiným n ; ta má jinou hmotnost m_n a tedy dává i jiný tenzor I_{jk} . Zjistit v čase $t > t_0$, která částice právě leží v bodě $\vec{r}$ (resp. zda tam zrovna vůbec nějaká část zkoumaného tělesa je!) vyžaduje ovšem vyřešit pohybovou rovnici dříve, nežli ji začneme řešit.

Náprava je v tom, že budeme uvažovat rov. (7.52) v (neinerciální) soustavě spojené s tělesem. Tam bude ovšem polohový vektor $\vec{\xi} = \vec{r}$ mít jiné složky ξ_j , ale zato se nebudou měnit částice tvořící těleso („podbíhat pod rukama“). Časová derivace bude o něco složitější, protože jsme v neinerciální soustavě: přibude násobení úhlovou rychlostí $\vec{\omega} \times \dots$.

Provedeme proto analogické úpravy znova, jen v jiné vztahné soustavě, a proto s jinými složkami:

- β_i budou složky momentu hybnosti $\vec{B}$,
- ξ_i složky polohového vektoru $\vec{r}$,
- Ω_i složky úhlové rychlosti $\vec{\omega}$,
- J_{jk} složky **tenzoru momentu setrvačnosti** (obvykle jen „**tenzor setrvačnosti**“) $\overline{\vec{J}}$.

Odvozování bude úplně stejné; jeho výsledek bude tedy

$$\beta_j = m \Omega_j \sum_k \xi_k \xi_k - m \xi_j \sum_k \Omega_k \xi_k \quad , \text{ tedy} \quad (7.53)$$

$$\beta_1 = \Omega_1 \sum_n m(\xi_2^2 + \xi_3^2) - \Omega_2 \sum_n m\xi_1 \xi_2 - \Omega_3 \sum_n m\xi_1 \xi_3 \quad (7.54)$$

$$\beta_2 = \Omega_2 \sum_n m(\xi_3^2 + \xi_1^2) - \Omega_3 \sum_n m\xi_2 \xi_3 - \Omega_1 \sum_n m\xi_2 \xi_1 \quad (7.55)$$

$$\beta_3 = \Omega_3 \sum_n m(\xi_1^2 + \xi_2^2) - \Omega_1 \sum_n m\xi_3 \xi_1 - \Omega_2 \sum_n m\xi_3 \xi_2 \quad (7.56)$$

$$J_{11} = \sum_n m(\xi_2^2 + \xi_3^2) \quad ; \quad J_{23} = J_{32} = - \sum_n m\xi_2 \xi_3 \quad (7.57)$$

$$J_{22} = \sum_n m(\xi_3^2 + \xi_1^2) \quad ; \quad J_{31} = J_{13} = - \sum_n m\xi_3 \xi_1 \quad (7.58)$$

$$J_{33} = \sum_n m(\xi_1^2 + \xi_2^2) \quad ; \quad J_{12} = J_{21} = - \sum_n m\xi_1 \xi_2 \quad (7.59)$$

(sčítací index n přes částice si jistě rádi domyslíte u všech m a ξ , nikoli u Ω).

Složky tenzoru momentu setrvačnosti J_{jk} mají své specifické názvy:

momenty setrvačnosti vůči osám jsou diagonální složky, tj. J_{11} , J_{22} , J_{33} . Každá odpovídá momentu známému z rotace kolem pevné osy x , resp. y , resp. z . (Činka ležící v ose x souměrně kolem počátku má malý J_{11} a velké J_{22} , J_{33} .)

deviační složky mají smíšené indexy: J_{12} , J_{21} , J_{23} , J_{32} , J_{31} , J_{13} . Vyvolají namáhání osy, kolem těleso rotuje, kroucením. (Činka ležící v rovině xy souměrně kolem počátku a svírající přitom úhel 45° s osou x ; přestavte si, jak je namáhána osa x či y , má-li činka rotovat kolem ní.)

7.8.2 Eulerovy rovnice

Odvození Jak jsme už uvedli, soustava spojená s tělesem je obecně neinerciální; složky ξ_j polohového vektoru v ní však zůstávají pevné a lze tedy konstruktivně vyčíslit tenzor setrvačnosti J_{jk} . Pohybová rovnice z věty o momentu hybnosti nebude tak jednoduchá jako rov. (7.52), ale zato bude použitelná. Jak víme z mechaniky v neinerciálních soustavách (rov. (6.17)), časovou derivaci musíme doplnit vektorovým součinem s úhlovou rychlostí: při otáčení je časová změna $\left. \frac{d\vec{b}}{dt} \right|_{\mathcal{N}}$ každého vektoru $\vec{B}$ (ať už polohy, rychlosti či síly), měřená v neinerciální soustavě, dána jednak jeho časovou změnou $\left. \frac{d\vec{B}}{dt} \right|_{\mathcal{S}}$ měřenou v inerciální soustavě, jednak úhlovou rychlostí $\vec{\Omega}$ neinerciální soustavy $\mathcal{N}$ vůči inerciální $\mathcal{S}$, a to vztahem

$$\left. \frac{d\vec{B}}{dt} \right|_{\mathcal{S}} = \left. \frac{d\vec{b}}{dt} \right|_{\mathcal{N}} + \vec{\Omega} \times \vec{B} \quad . \quad (7.60)$$

Věta o momentu hybnosti tedy nabude tvar ($\vec{b} \rightarrow \vec{\beta}$):

$$\frac{d\vec{\beta}}{dt} + \vec{\Omega} \times \vec{\beta} = \vec{\mu} \quad , \quad (7.61)$$

značíme-li μ_i složky výsledného silového momentu v neinerciální soustavě spjaté s tělesem. Rozepsáno do složek,

$$\frac{d\beta_1}{dt} + \Omega_2\beta_3 - \Omega_3\beta_2 = \mu_1, \quad (7.62)$$

$$\frac{d\beta_2}{dt} + \Omega_3\beta_1 - \Omega_1\beta_3 = \mu_2, \quad (7.63)$$

$$\frac{d\beta_3}{dt} + \Omega_1\beta_2 - \Omega_2\beta_1 = \mu_3, \quad (7.64)$$

resp. po dosazení $\beta_j = \sum_k \Omega_k J_{jk}$

$$\begin{aligned} J_{11} \frac{d\Omega_1}{dt} + J_{12} \frac{d\Omega_2}{dt} + J_{13} \frac{d\Omega_3}{dt} &+ \Omega_2\Omega_1J_{31} + \Omega_2\Omega_2J_{32} + \Omega_2\Omega_3J_{33} \\ &- \Omega_3\Omega_1J_{21} - \Omega_3\Omega_2J_{22} - \Omega_3\Omega_3J_{23} = \mu_1. \end{aligned} \quad (7.65)$$

Tři rovnice vzniklé z rov. (7.65) cyklickou záměnou indexů se nazývají **Eulerovy rovnice**. Je to tedy obecně soustava tří nelineárních diferenciálních rovnic pro tři neznámé $\Omega_k(t)$, $k = 1, 2, 3$, a není divu, že řešení v uzavřeném tvaru jsou známa jen v několika málo zvláštních případech (setrvačníky za zvláštních okolností). Numericky ovšem řešitelné jsou s libovolnou potřebnou přesností.

Kapitola 8

Základy teorie relativity

2018-06-17

8.1 Motivace

Základy teorie relativity jsou zde vysvětleny pro současného čtenáře běžně používajícího techniky s přesností před sto lety nepředstavitelnou. Proto neklademe příliš důraz na rozbor historických (byť geniálně vymyšlených!) postupů a např. namísto detailního rozboru Michelsonova-Morleyova interferometru prostě konstatujeme výsledek: „Naměřená rychlost světla nezávisí na směru letu světla, ani na rychlosti jeho zdroje; to ale odporuje teorému skládání rychlostí a Galileově transformaci“.

8.1.1 Co je a co není teorie relativity

Speciální teorie relativity (STR) se zabývá inerciálními vztažnými soustavami. Mění velmi podstatně naše pojmání *prostoru a času*. Zejména v oblasti velmi vysokých rychlostí (srovnatelných se světelnou rychlostí) se totiž při měření ukazuje, že prostor a čas nejsou nezávislé pojmy, ale souvisejí spolu natolik úzce, že je výstižnější chápat je spolu jako nový pojem *prostorčas* a studovat jeho vlastnosti. STR tuto souvislost vystihuje a popisuje. Přejít od jedné inerciální vztažné soustavy ke druhé podle STR již není popsán Galileovou transformací, ale transformací Lorentzovou; ta je symetričtější v souřadnicích (časové a prostorových) než Galileova.

STR spojuje *setrvačnou hmotnost s energií* známým Einsteinovým vztahem $E = mc^2$ (viz však kap. 1.5.5. Gravitační hmotností a gravitačním zákonem se však zabývá až obecná teorie relativity (GTR), nikoli STR.

Ostatní představy klasické mechaniky (např. částice, pole, síla) však zůstávají v STR v platnosti, dokonce i v tom smyslu, že při opatrné formulaci platí i nadále všechny tři pohybové zákony Newtonovy, tedy základ klasické mechaniky, používáme-li během práce pouze jedinou vztažnou soustavu. Např. 2. Newtonův zákon (zákon síly) platí ve znění „V inerciální soustavě je časová změna hybnosti hmotného bodu rovna výsledné síle na něj působící“.

STR je plně kompatibilní (slučitelná) s teorií elektromagnetického pole. Transformační vlastnosti tohoto pole (Lorentzova transformace) totiž vyhovují představě sjednoceného prostor času, nikoli však představě prostoru samostatného, na čase nezávislého (Galileova transformace). Připomeňme, že teorie elektromagnetického pole *není* kompatibilní s klasickou nerelativistickou mechanikou, konkrétně s Galileovou transformací.

Obecná teorie relativity (GTR; General theory of relativity) se zabývá i neinerciálními vztažnými soustavami a popisuje gravitaci nikoli jako samostatnou fyzikální sílu, ale jako zakřivení prostor času. Zde se jí nezabýváme.

8.1.2 Důvod pro STR: nyní, začátkem 21. století

Na rozdíl od konce 19. století, kdy se začala problematika STR vynořovat spolu s měřením rychlosti světla, dnes není problém měřit doby vysoce přesně (cezirové hodiny v satelitech pro GPS mají přesnost $1 : 10^{15}$, tj. 1 sekunda za více než 31 milionů let). Měření ukazují, že ve dvou inerciálních soustavách rychle se vůči sobě pohybujících (např. posuvná rychlost Země při jejím oběhu kolem Slunce je cca 30 km/s, takže rychlost Země vůči sluneční soustavě na jaře a na podzim se liší o 60 km/s) se na konečné vzdálenosti zachovává nikoli současnost dvou událostí (tj. formálně nekonečně velká rychlost), ale jistá **konečná** rychlost — rychlost světla ve vakuu neboli **světelná rychlost**¹, cca 300 000 km/s. (Přesně je to $c_0 = 299\,792\,458$ m/s, protože tak je nyní definován metr.) Světlo má tedy touž rychlost c_0 v každé inerciální soustavě a Galileův způsob skládání rychlostí prostým součtem $v' = v - W$ nemůže platit přesně. Toto lze mít za experimentálně ověřené. Jak to změní klasickou mechaniku? (Spěcháte-li, přeskočte následující odstavec 8.1.3.)

8.1.3 Důvod pro STR v době jejího vzniku: začátek 20. století

Výchozí situace: Klasická mechanika je už detailně rozpracována nejen ve formě vektorové (newtonovské), ale i ve svých vyšších partiích — v analytické mechanice, jako je Lagrangeův a Hamiltonův formalismus. Zůstává však stále Newtonova představa existence absolutního prostoru a absolutního času, v němž platí zcela přesně Newtonovy zákony; jemu se (pouze) přibližují vztažné soustavy námi realizované. Ovšem již Galileo Galiei (před Newtonem) věděl, že zákony mechaniky, platící např. ve vztažné soustavě spojené s klidným mořem (a se Zemí) mají stejný tvar i ve vztažné soustavě spojené s lodí, která se vůči moři pohybuje rovnoměrně přímočaře. Je tedy zřejmé, že *mechanickými* pokusy *nelze* zjistit, zda daná vztažná soustava je oním absolutním prostorem a časem, anebo se vůči němu pohybuje rovnoměrně přímočaře.

Také **teorie elektromagnetického pole** je prakticky hotova. Na podkladě zejména Faradayových pokusů a jejich matematického zpracování Maxwellem se v ní podařilo sjednotit do té doby samostatné obory – elektřinu, magnetismus a optiku. Elektromagnetické pole bylo popisováno jako mechanický stav (vnitřní pnutí) ve speciálním vše prostupujícím prostředí – éteru. Např. elektrická indukce $\vec{D}$ – displacement – popisovala podle těchto představ místní posunutí tohoto éteru pod vlivem příslušné síly – elektrické intenzity $\vec{E}$. Bylo by logické předpokládat, že éter je v klidu vůči absolutnímu prostoru.

Ukázalo se však, že rovnice popisující elektromagnetické pole (Maxwellovy rovnice) nejsou invariantní vůči Galileově transformaci. Plynou z nich totiž vlnové rovnice, které stanovují, že světelná rychlost má – rozumí se v absolutním prostoru a čase – jistou konkrétní hodnotu

$$c_0 = c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} = 299\,792\,458 \text{ m/s.} \quad (8.1)$$

Protože podle Galileova transformace se rychlosti při přechodu mezi vztažnými soustavami sčítají, dává to možnost z „kandidátů na absolutní prostor“ vyloučit ty vztažné soustavy, v nichž by měla naměřená hodnota světelné rychlosti hodnotu jinou. Otázka nalezení soustavy, vůči níž je éter v klidu, se stala aktuální a principiálně řešitelná.

H. A. Lorentz našel transformaci (po něm nazvanou), vůči níž jsou Maxwellovy rovnice invariantní. Ukázal také, že nesouhlas experimentu s teorií by šlo vyřešit předpokladem, že předmět pohybující se vůči éteru se zkracuje (Lorentzova kontrakce délek), doplněný později dalším předpokladem, že v pohybující se soustavě plyne čas pomaleji (dilatace času), aby šlo vysvětlit např. pokus Kennedyův-Thorndikeův (viz kap. 8.1). Předpokládal však existenci éteru a uvedené předpoklady pokládal za vlastnost hmoty, nikoli prostoru a času. Tento krok učinil až A. Einstein v r. 1905.

¹Užíváme stručný termín „světelná rychlost“ (luminal speed) pro „rychlost světla ve vakuu“ (speed of light in vacuum) podle nejnovější verze normy ISO/IEC 80000-6. Norma předepisuje značku c_0 a ponechává c pro rychlost světla i v jiném prostředí než ve vakuu. Protože zde se všude kromě kap. 8.6.8 zabýváme jedině rychlostí světla ve vakuu, budeme pro stručnost užívat jednodušší značku c namísto c_0 .

8.2 Klasické pojetí času a prostoru (připomenutí)

8.2.1 Vztažná soustava; synchronizace

Vztažnou soustavou $\mathcal{S}$, $\mathcal{S}'$ nám bude kartézská soustava souřadnic, **inerciální** (platí v ní 1. Newtonův zákon) a vybavená **synchronizovanými hodinami** (tj. technicky zařídíme, že hodiny umístěné v různých místech prostoru a jsoucí navzájem v klidu ukážou v libovolný okamžik tentýž časový údaj). Soustavu $\mathcal{S}$ spojíme s (dosavadním) newtonovským absolutním prostorem a časem a budeme ji občas pro jednoduchost nazývat „stojící“, „klidná“ apod. Druhá, „pohybující se“ soustava $\mathcal{S}'$ nechť se vůči $\mathcal{S}$ pohybuje rychlostí $\vec{W}$. Pro jednoduchost obě soustavy orientujeme osami x, x' ve směru pohybu této druhé soustavy $\mathcal{S}'$ vůči $\mathcal{S}$. Směry y, z, y', z' budou k tomuto směru kolmé a zpravidla se o ně nebudeme zajímat; pak nám stačí 2D **speciální transformace** (tento termín „speciální“ nesouvisí s termínem speciální vs. obecná teorie relativity.)

8.2.2 Událost

U důležité události zaznamenáváme *místo* a *čas*, kdy k ní došlo: v každém dotazníku např. zapisujeme den a místo svého narození. V následujících partiích bude termín **událost** zúžen právě jen na určení prostorového a časového údaje, tj. dvojice $\{\vec{r}; t\}$, kde a kdy dotyčný jev (výbuch supernovy, rozsvícení žárovky, setkání dvou pohyblivých se bodů) nastal.

Omezíme se na jevy, které lze dostatečně přesně lokalizovat prostorově i časově. Počátek vztažné soustavy $\{\vec{0}, 0\}$ je v tomto smyslu také „událost“: odsud začínáme měřit prostor i čas.

K plné informaci je ovšem potřeba zadat vztažnou soustavu, v níž polohu a okamžik určujeme: pasažér ve vlaku z Moskvy bude určovat události polohou vůči svému místu v rychlíku a časem vůči ČR posunutým o 2 hodiny dopředu. Údaje $\vec{r}', t'$ vztažené k jiné soustavě $\mathcal{S}'$ odlišíme též čárkou u závorky: $\{\vec{r}'; t'\}$, např. $\{\vec{0}; 0\}'$.

!!! Odpověď ze str. 104: $\{3; 3\frac{\beta}{\sqrt{1+\beta^2}}\}$.

8.2.3 Synchronizace vztažných soustav navzájem

Při sledování dvou různých soustav $\mathcal{S}$, $\mathcal{S}'$ se nám zjednoduší popis, budeme-li je **synchronizovat navzájem**: počátek $\{\vec{0}; 0\}$ soustavy $\mathcal{S}$ bude i počátkem $\{\vec{0}; 0\}'$ soustavy $\mathcal{S}'$ (srv. str. 34).

Prakticky vzato: pokud počátku $\{\vec{0}; 0\}$ odpovídala v původní $\mathcal{S}'$ dříve hodnota $\{\vec{R}'; T'\}'$, pak tuto hodnotu odečteme od každého údaje v $\mathcal{S}'$ a dostaneme tím soustavu synchronizovanou.

8.2.4 Současnost a soumítnost; relativní a absolutní

Řekneme, že dvě události A, B se souřadnicemi $\{\vec{r}_A; t_A\}$ a $\{\vec{r}_B; t_B\}$ měřenými v některé vztažné soustavě $\mathcal{S}$ jsou v této soustavě **současné**, jestliže $t_A = t_B$, resp. **soumítné**, jestliže $\vec{r}_A = \vec{r}_B$.

V logice budeme namísto slova „současné“ raději užívat slovo „zároveň“, nepůjde-li o bezprostřední vztah k času.

Veličinu nazýváme **absolutní**, resp. **relativní**, jestliže její hodnota **nezávisí**, resp. **závisí** na volbě vztažné soustavy použité pro popis a měření veličiny.

Současnost je v klasické mechanice absolutní: jestliže nastane výbuch současně na začátku i konci vlaku, pak nastal současně jak vůči vlaku, tak i vůči Zemi.

Naproti tomu soumítnost dvou událostí je i v klasické mechanice relativní, tj. závisí na volbě vztažné soustavy užitě při popisu. Jestliže si pasažér v jídelním voze u stolku objedná kávu (A) a po chvíli ji zaplatí (B), pak objednání a zaplacení nejsou současné (ani z hlediska vlaku, ani Země). Události A, B jsou soumítné z hlediska vlaku (u téhož stolku), nikoli však z hlediska Země (vlak zatím projel dlouhý úsek). Soumítné v *obou* vztažných soustavách by A, B byly buď tehdy, kdyby se soustavy vůči sobě nepohybovaly (kdyby vlak stál), nebo kdyby A, B byly navíc i současné — tj. kdyby se vlak nestačil mezi oběma událostmi A, B vůči Zemi posunout.

I v teorii relativity bude soumítnost relativní: dvě události v jedné soustavě soumítné, ale nesoučasné, nebudou soumítné vůči jiné soustavě, pohyblivé se vůči první. Relativní se však stane i současnost: dvě události v jedné soustavě současné, ale nesoumítné, nebudou současné vůči jiné soustavě, pohyblivé se vůči první. Bude to tedy – paradoxně – symetričtější. A také bude pravda, že dvě události A, B zároveň současné i soumítné v jedné soustavě $\mathcal{S}$ jsou současné a soumítné i v každé jiné soustavě $\mathcal{S}'$.

8.2.5 Galileova transformace

Zjednodušíme si výklad a popis tím, že orientujeme osu x v tom směru, ve kterém se koná pohyb („speciální transformace“ z kap. 8.2.1). Jak určíme pro událost A její souřadnice $\{x'; t'\}$ v S' , známe-li její souřadnice $\{x; t\}$ v S ?

Přímá transformace Při synchronizaci počátků má transformace tvar

$$\begin{aligned} x' &= x - Wt \\ t' &= t. \end{aligned} \quad (8.2)$$

Inverzní transformace ke speciální Galileově transformaci rov. (8.2) může být samozřejmě nalezena triviálním vyřešením soustavy těchto dvou lineárních rovnic vůči neznámým x a t , tedy

$$\begin{aligned} x &= x' + Wt' \\ t &= t'. \end{aligned} \quad (8.3)$$

Můžeme ji však najít i „fyzikálněji“, a toto si hluboce rozvažte: z principu relativity plyne, že inverzní transformace musí mít stejný tvar jako přímá – bude tedy opět Galileovou transformací, v níž zaměníme t za t' , dále x za x' a vzájemnou rychlost W za $W' = -W$.

8.2.6 Měření dob a délek

Pozorujme meteor², který někdy někde začal svítit (meteorit se rozežhvil, událost A) a poté jinde zhasl (meteorit se vypařil, událost Z); nechť mezitím letěl rovnoměrně přímočaře. Zajímá nás jednak *délka* trajektorie, tedy dráha $\Delta r = |\vec{r}_Z - \vec{r}_A|$, jakou meteorit urazil, jednak *doba* $\Delta t = t_Z - t_A$, jak dlouho svítil. Protože však hodnoty prostorových i časových údajů závisí na volbě vztažné soustavy, zajímá nás také, do jaké míry na této volbě závisí délka a doba zkoumaného děje, tj. prostorová a časová odlehlost mezi dvěma událostmi. S meteoritem můžeme spojit inerciální soustavu S' , inerciální soustavu spojenou se Zemí označíme S . Pro zjednodušení opět předpokládejme přímočarý let po ose x a synchronizaci obou soustav S a S' .

Letí-li meteorit po dobu Δt vůči Zemi, pak ve své vlastní inerciální soustavě (v níž stojí v klidu) letí dobu $\Delta t' = t'_Z - t'_A$: z transformačních rovnic plyne $\Delta t = \Delta t'$. V klasické mechanice je tedy **doba děje** absolutní, tj. nezávisí na volbě vztažné soustavy.

Snadno však nahlédneme, že *délka* coby prostorová vzdálenost mezi dvěma událostmi v různých okamžicích t, t' je relativní, tj. na volbě vztažné soustavy *závisí*. Meteorit v soustavě S' spojené s ním samým je ovšem v klidu (má tedy rychlost $v' = 0$), takže dráha $\Delta r' = v' \Delta t$, po které svítí, je nulová. V soustavě S spojené se Zemí urazí meteorit nenulovou dráhu Δr , v případě rovnoměrného pohybu $\Delta r = v \Delta t$.

Z toho také plyne samozřejmé „poučení“: chceme-li změřit délku předmětu, pak se tento předmět buď nesmí pohybovat (a jeho kraje pak můžeme měřit kdykoli), anebo – pokud se pohybuje – musíme změřit oba jeho kraje současně, tedy v tentýž okamžik. (V teorii relativity se ukáže, že současnost měření ve dvou vzdálených bodech je relativní, tj. závisí na volbě vztažné soustavy.)

8.2.7 Klasické skládání rychlostí

Při rovnoměrném přímočarém pohybu není rozdíl mezi průměrnou a okamžitou rychlostí: v obou případech je rychlost dána vztahem

$$\vec{v} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{\vec{r}_Z - \vec{r}_A}{t_Z - t_A}. \quad (8.4)$$

Dosazením snadno zjistíme, že mezi rychlostí $\vec{v}$ naměřenou v S a rychlostí $\vec{v}'$ naměřenou v S' pohybující se rychlostí $\vec{W}$ vůči S platí jednoduchý vztah — rychlosti se sčítají jako vektory:

$$\vec{v}' = \vec{v} - \vec{W} \quad (8.5)$$

²Meteor: světelný jev; meteorit: letící těleso.

resp., v našem 1D případě s označením $v_x = v$

$$v' = v - W \quad . \quad (8.6)$$

Odtud ihned plyne, že neexistuje žádná konečná rychlost, která by byla absolutní v tom smyslu, že by měla stejnou hodnotu bez ohledu na volbu vztažné soustavy. Jedině rychlost nekonečná v jedné vztažné soustavě je nekonečná v libovolné vztažné soustavě (s prominutím, $\infty = \infty - W$).

Tomto poněkud podezřelému tvrzení však můžeme dát přijatelnější tvar. Nekonečnou rychlostí bychom se mohli dostat od události $A = \{\vec{r}_A; t_A\}$ k události $Z = \{\vec{r}_Z; t_Z\}$ tehdy, kdybychom nenulovou délku $|\vec{r}_Z - \vec{r}_A|$ překonali během nulové doby, tedy pokud by platilo $t_Z = t_A$ a obě události byly současné. Potřeba *nekonečné* rychlosti ke spojení událostí A a Z je tedy totéž co *současnost* těchto událostí. Absolutnost nekonečné rychlosti v galileovské mechanice tedy znamená absolutnost současnosti. To je srozumitelný – a velmi důležitý – důsledek Galileovy transformace.

*Tímto jsme skončili rekapitulaci klasické kinematiky.
A začínáme s relativitou.*

8.3 Princip konstantní světelné rychlosti

Z Maxwellovy teorie plyne, že světlo (jakožto forma elektromagnetického záření) by se mělo v absolutním prostoru a čase (kde platí Maxwellovy rovnice) šířit rychlostí danou rov. (8.1), tedy

$$c = 1/\sqrt{\varepsilon_0\mu_0} = 299\,792\,458 \text{ m/s}.$$

V inerciálních soustavách pohybujících se vůči absolutnímu prostoru by tedy mělo mít světlo rychlost jinou, podle teorému o vektorovém skládání rychlostí, a tato rychlost by měla záviset na směru letu světla. Ale i nejpřesnější měření (např. ve své době Michelsonův-Morleyův pokus) naměřila c stejnou v různých inerciálních soustavách, a to nezávisle na směru letu světla. Protože Země obíhá kolem Slunce s posuvnou rychlostí 30 km/s, tak by v různých ročních obdobích mělo mít světlo mimozemských zdrojů rychlosti navzájem odlišné až o 60 km/s, podle ročního období. Nic takového však nebylo pozorováno. Světelná rychlost byla naměřena stejná v zimě i v létě, a to nezávisle na zdroji světla (ze Země, ze Slunce, ze Siria). Maxwellův éter, „nosiťel světla“, se tak jeví být v klidu vůči libovolné inerciální soustavě.

Přesnost měření dostatečně převyšovala přesnost potřebnou pro zjištění odchylek. Dále, většina pokusů (např. Michelson a Morley) měřila přímo rozdíl mezi rychlostmi v různých směrech; tím se získá výsledek mnohem přesněji než samostatným měřením rychlostí v obou směrech a pak jejich odečtením.

*Pokusy ověřily, že rychlost světla ve vakuu je ve všech inerciálních soustavách stejná.
Nezávisí ani na směru letu světla, ani na druhu, rychlosti či směru pohybu zdroje.*

A aby bylo jasno: nejde o nějaké specifikum světla.

*Cokoliv má rychlost $c_0 = 299\,792\,458 \text{ km/s}$ v jedné inerciální soustavě, má tutéž rychlost
i v kterékoli jiné inerciální soustavě.*

8.4 Lorentzova transformace

8.4.1 Motivace

Princip konstantní světelné rychlosti a Galileova transformace jsou spolu ve sporu. Ten vyřešíme nalezením jiné transformace než Galileovy, a to takové, aby při převodu souřadnic vycházela světelná rychlost c ve všech soustavách stejná, ale jinak aby se měnilo co nejméně.

Protože chceme zachovat platnost Newtonových zákonů v klasické oblasti, musíme se omezit na *lineární* transformace mezi prostorovými a časovými souřadnicemi. Jenom tak totiž rovnoměrný přímočarý pohyb v $\mathcal{S}$ zůstane rovnoměrným přímočarým pohybem i v $\mathcal{S}'$.

Fyzikálně řečeno: z nepřítomnosti výsledné síly (nulového zrychlení) v jedné inerciální soustavě plyne nepřítomnost výsledné síly i v každé jiné inerciální soustavě.

Taková transformace existuje; nazývá se podle svého objevitele **Lorentzova**.

!!! Odpověď ze str. 103: $U_A = \{0; \frac{5}{4}\}'$, $U_B = \{\frac{20}{9}; 0\}'$.

8.4.2 Speciální Lorentzova transformace (1D prostor x a čas t)

Omezme se na pohyb v jediném (neorientovaném) směru a orientujme v něm shodně osy x a x' (tedy podle kap. 8.2.1 jde o speciální³ Lorentzovu transformaci).

Uvažujme jistou událost (např. výskyt hmotného bodu v jistém místě a čase), popsanou ve dvou inerciálních soustavách $\mathcal{S}$ resp. $\mathcal{S}'$. Prostorčasové souřadnice události označíme $\{x; t\}$ v $\mathcal{S}$, resp. $\{x'; t'\}$ v $\mathcal{S}'$.

Označme W rychlost soustavy $\mathcal{S}'$ vůči $\mathcal{S}$; pak rychlost soustavy $\mathcal{S}$ vůči $\mathcal{S}'$ bude $-W$. Od transformací očekáváme, že budou tvořit grupu: složením dvou transformací dostaneme opět transformaci téhož typu. Označme c rychlost, mající si transformací zachovat svou velikost. Pak lze dokázat (kap. D.2), že nejobecnější lineární transformace vyhovující těmto čtyřem požadavkům je

$$\begin{aligned} x' &= \frac{1}{\sqrt{1-(W^2/c^2)}} (x - Wt) \\ t' &= \frac{1}{\sqrt{1-(W^2/c^2)}} (-\frac{W}{c^2}x + t). \end{aligned} \quad (8.7)$$

Všimněme si, že pro $c \rightarrow \infty$ je $W/c \rightarrow 0$ a transformace přechází na Galileovu transformaci.

Symetrie těchto rovnic vynikne ještě více, jestliže místo času t zavedeme veličinu $x_0 := ct$ mající rozměr délky. Při označení $\beta := W/c$ a $\gamma := 1/\sqrt{1-\beta^2}$ dostaneme

$$\begin{aligned} x' &= \gamma(x - \beta x_0) \\ x'_0 &= \gamma(-\beta x + x_0). \end{aligned} \quad (8.8)$$

Dokažte přímým výpočtem, že hodnota c je pro transformaci rov. (8.7) samodružná, tj. je-li $c = x/t$ rychlost změřená v $\mathcal{S}$, pak pro $c' = x'/t'$ platí $c' = c$.

Speciální Lorentzovy transformace podél téže osy se skládají snadno a tvoří grupu. Skládání Lorentzových transformací podél různých os je přiměřeně složitější (krychle se převádí na obecný, nepravoúhlý rovnoběžnostěn) a vede nikoli ke speciální, ale k **obecné** Lorentzově transformaci zahrnující i otočení prostorových souřadnic.

Příl. D.1 dokazuje, že požadavky transformace určují rov. (8.7), resp. (8.8) jednoznačně.

8.4.3 Obecná Lorentzova transformace (pro 3D prostor $x; y; z$ a čas t)

Posuv ve směru společném osám x, x'

Zobecnění Lorentzovy transformace pro 3D je snadné, dokud zůstaneme při tom, že soustavy $\mathcal{S}$ a $\mathcal{S}'$ mají osy x, x' ležící na téže přímce a navzájem se pohybují podél ní (jak tomu bylo ve speciální Lorentzově transformaci). Pak transformace nemění nic ve směru os y a z , takže rovnice mají tvar

$$\begin{aligned} x' &= \frac{1}{\sqrt{1-(W^2/c^2)}} (x - Wt) \\ y' &= y \\ z' &= z \\ t' &= \frac{1}{\sqrt{1-(W^2/c^2)}} (-\frac{W}{c^2}x + t) . \end{aligned} \quad (8.9)$$

resp. se značením $x_0 = ct, x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z$

$$\begin{aligned} x'_0 &= \gamma(x_0 - \beta x_1) \\ x'_1 &= \gamma(-\beta x_0 + x_1) \\ x'_2 &= x_2 \\ x'_3 &= x_3 . \end{aligned} \quad (8.10)$$

Výslovně zdůrazněme, že při pohybu podél jedné z os se ostatní dvě „transformují“ identitou, tedy bez jakékoliv změny: žádná kontrakce v nich nenastává.

³Znovu připomeňme, že tento termín „speciální“ nesouvisí s termínem speciální vs. obecná teorie relativity.

Posuv v obecném směru, obecná orientace os v $\mathcal{S}$, $\mathcal{S}'$

Obecná Lorentzova transformace (v libovolném směru) shrnuje a zahrnuje tyto dílčí transformace:

- speciální Lorentzova transformace podél jistého směru v 3D prostoru;
- posunutí počátku O souřadnic a času;
- otočení prostorových os kolem počátku O;
- inverze prostorových os;
- inverze času;
- identická transformace.

Obecné Lorentzovy transformace tvoří grupu. Zde se jí dále nebudeme zabývat.

Pro obecný směr rychlosti $\vec{\beta} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$, při synchronizaci počátků a bez inverzí zní obecná Lorentzova transformace takto:

$$\begin{aligned} x'_0 &= \gamma x_0 - \gamma\beta_1 x_1 - \gamma\beta_2 x_2 - \gamma\beta_3 x_3 \\ x'_1 &= -\gamma\beta_1 x_0 + \left(1 + \frac{(\gamma-1)\beta_1^2}{\beta^2}\right) x_1 + \frac{(\gamma-1)\beta_1\beta_2}{\beta^2} x_2 + \frac{(\gamma-1)\beta_1\beta_3}{\beta^2} x_3 \\ x'_2 &= -\gamma\beta_2 x_0 + \frac{(\gamma-1)\beta_1\beta_2}{\beta^2} x_1 + \left(1 + \frac{(\gamma-1)\beta_2^2}{\beta^2}\right) x_2 + \frac{(\gamma-1)\beta_2\beta_3}{\beta^2} x_3 \\ x'_3 &= -\gamma\beta_3 x_0 + \frac{(\gamma-1)\beta_1\beta_3}{\beta^2} x_1 + \frac{(\gamma-1)\beta_2\beta_3}{\beta^2} x_2 + \left(1 + \frac{(\gamma-1)\beta_3^2}{\beta^2}\right) x_3 \end{aligned} \quad (8.11)$$

I tato podmnožina tvoří grupu. Ani jí se dále zabývat nebudeme.

8.5 Vlastnosti a důsledky speciální Lorentzovy transformace**8.5.1 Transformace rychlostí („skládání rychlostí“)**

Značme

$$v' = x'/t' = \beta' c \quad (8.12)$$

$$v = x/t = \beta c \quad (8.13)$$

$$W = Bc \quad (8.14)$$

Vydělením rovnic rov. (8.7) pro x', t' dostaneme

$$v' = \frac{v - W}{1 - \frac{vW}{c^2}} \quad \text{a inverzní} \quad v = \frac{v' + W}{1 + \frac{v'W}{c^2}} \quad (8.15)$$

resp.

$$\beta' = \frac{\beta - B}{1 - \beta B} \quad \text{a inverzní} \quad \beta = \frac{\beta' + B}{1 + \beta' B} \quad (8.16)$$

To jsou (obecně) lineární lomené funkce vůči proměnným v, v' , resp. β, β' . Lineární lomená funkce (8.15) má vždy právě jeden pevný bod v takový, že $v' = v$; zde je to, jak víme, $v = c$, resp. $\beta = 1$.

Pokud by bylo $c = \infty$, redukovala by se rov. (8.15) na lineární rovnici a rov. (8.7) by přešla na Galileovu transformaci, kdy se rychlosti skládají prostým (vektorovým) součtem:

$$v' = v - W \quad \text{resp.} \quad v = v' + W \quad (8.17)$$

zápis typu (8.16) by neměl smysl.

Protože je hodnota rychlosti c konečná (světelná rychlost), nastane při vzájemné rychlosti $W < c$ (resp. $B < 1$) vztažných soustav pro pohyb bodu libovolnou rychlostí v právě jeden z těchto případů:

- $|v| < c \Rightarrow |v'| < c$ podsvětelné rychlosti
- $|v| = c \Rightarrow |v'| = c$ světelná rychlost
- $|v| > c \Rightarrow |v'| > c$ nadsvětelné rychlosti.

Rychlosti v se tedy rozpadají do tří tříd; příslušnost ke třídě se Lorentzovou transformací nemění. (Bod pomalejší než světlo v jedné vztažné soustavě $\mathcal{S}$ zůstane pomalejším než světlo i v libovolné jiné vztažné soustavě $\mathcal{S}'$ apod.) Případ $|v| > c$ zahrnuje i $v = \infty$ (současnost).

8.5.2 Interval jako invariant Lorentzovy transformace

Pro událost U o prostorové souřadnici x a časové souřadnici t definujeme **interval** Δs kvadratickou odlehlostí události U od počátku ve smyslu naší metriky; jeho mírou bude **čtverec intervalu** $\Delta s^2 \equiv x^2 - c^2 t^2$. V kap. D.2.4 jsme požadovali, aby z $\Delta s^2 = 0$ plynulo i $\Delta s'^2 = 0$, tedy aby rovnost $\Delta s^2 = 0$ byla **invariantní** vůči Lorentzově transformaci. Ověříme dokonce, že interval Δs^2 , i když není roven nule, je invariantem Lorentzovy transformace. Platí totiž

$$\Delta s'^2 = x'^2 - c^2 t'^2 = (x^2 - 2\beta xct + \beta^2 c^2 t^2) - \gamma^2 (c^2 t^2 - 2\beta ctx + \beta^2 x^2) = \Delta s^2, \quad (8.18)$$

což jsme chtěli dokázat.

Je-li $\Delta s^2 < 0$, říkáme, že interval má časový charakter – **časupodobný** interval, pro $\Delta s^2 > 0$ má interval prostorový charakter – **prostorupodobný** interval. Světobody, pro něž je $\Delta s^2 = 0$, tvoří **světelný kužel** s vrcholem v počátku.

Interval s_{AB} mezi dvěma událostmi A, B zavedeme vztahem $s_{AB}^2 = (x_B - x_A)^2 - c^2(t_B - t_A)^2$.

Několik poznámek:

- Při výkladu invariantů se zpravidla jako ilustrace nejprve dokazuje, že při otočení os x, y, z se zachovává délka $\Delta \ell$ úsečky. Někdy pak může vzniknout dojem, že v Galileově transformaci jsou dva invarianty, totiž délka $\Delta \ell$ a doba Δt , zatímco v Lorentzově transformaci jen jediný, totiž interval s^2 . To ovšem není pravda, délka není invariantem v Galileově transformaci popisující pohyb, viz kap. 8.2.6; invariantem v Galileově transformaci je jen doba. Délka se zachovává jen při transformaci mezi dvěma soustavami jsoucími navzájem v klidu (např. při otočení os), a to až už jde o transformaci Galileovu nebo Lorentzovu.
- Přísně vzato: tím, že „definujeme“ interval Δs jeho čtvercem Δs^2 , tedy fakticky $(\Delta s)^2$, by byl interval sám určen až na znaménko. Jak si však snadno rozmyslíte, nikde nám to nevadí. Výraz Δs^2 je vždy reálný, nikdy komplexní, takže Δs , pro které je $(\Delta s)^2 = \Delta s^2$, je buď reálné, anebo ryze imaginární. Fyzikální význam (vlastní délka či vlastní doba) také mají jen jeho velikost $|\Delta s| = \sqrt{|\Delta s^2|}$ a údaj, že $\Delta s^2 > 0$ (prostorový interval), či $\Delta s^2 < 0$ (časový interval), či $\Delta s^2 = 0$ (světelný kužel).
- Někdy se v literatuře zavádí čtverec intervalu s opačným znaménkem: $\sigma^2 = -s^2 = c^2 t^2 - x^2$.

8.5.3 Časová proměnná; metrika

Sjednocení rozměrů pro prostor a čas

Víme-li již, že čas úzce souvisí s prostorem, bylo by záhodno mít pro ně stejná měřítka⁴. Víme-li již navíc, že světelná rychlost c nezávisí na volbě inerciální vztažné soustavy, nabízí se měřit dobu Δt dráhou $\Delta s = c\Delta t$, kterou za tu dobu uběhne světlo ve vakuu. Již na str. 100 jsme proto zavedli novou proměnnou

$$x_0 := ct \quad (8.19)$$

a nadále budeme pracovat s proměnnými $x_0 = ct$, x_1 , x_2 , x_3 se stejnou jednotkou: $[x_\mu] = \text{m}$. Při speciální Lorentzově transformaci pak užíváme jen dvě proměnné, x_0 a $x := x_1$.

Metrika

Metrika prostoru je dána **metrickým tenzorem** $g^{\mu\nu}$ (viz str. 26):

$$ds^2 = -dx_0^2 + dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 = \sum_{\mu,\nu=0}^3 g^{\mu\nu} dx_\mu dx_\nu, \quad \text{kde} \quad (8.20)$$

$$g^{\mu\nu} = -1 \quad \text{pro } \mu = \nu = 0 \quad (8.21)$$

$$= 1 \quad \text{pro } \mu = \nu = 1, 2, 3 \quad (8.22)$$

$$= 0 \quad \text{pro } \mu \neq \nu. \quad (8.23)$$

Analogicky je skalární součin q dvou čtyřvektorů v_μ , w_μ definován vztahem

$$q = \sum_{\mu,\nu=0}^3 g^{\mu\nu} v_\mu w_\nu = g^{\mu\nu} v_\mu w_\nu \quad (8.24)$$

(poslední zápis s užitím Einsteinovy sčítací konvence).

Zápis tohoto typu se užívá v obecné teorii relativity vždy, nyní většinou i v STR.

⁴Vzpomeňte, že metr byl původně odvozen od rozměrů Země, zatímco sekunda od jejího otáčení, resp. od oběhu kolem Slunce. To jsou jevy, které spolu nesouvisí.

Minkowského symbolika

Hermann Minkowski (1864-1909) navrhl v r. 1908 využít k popisu prostoročasu komplexních čísel. Zavedeme-li totiž novou proměnnou

$$x_4 := ix_0 = ict \quad , \quad (8.25)$$

lze rov. (8.20) přepsat do tvaru

$$ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 + dx_4^2 = \sum_{\kappa=1}^4 dx_{\kappa} dx_{\kappa} \quad (8.26)$$

zcela analogicky 3D prostoru. Zjistíme, že čtveřice $\{x_{\kappa}\}_1^4$ popisující událost se při Lorentzově transformaci chová jako vektor ve čtyřrozměrném prostoru s obvyklými pravidly pro rovnost, skládání, skalární součin a velikost vektoru.

Lorentzovu transformaci lze pak interpretovat jako rotaci 4D-vektoru ve 4D-prostoročasu:

$$x'_{\iota} = L_{\iota\kappa} x_{\kappa} \quad , \quad (8.27)$$

kde transformační Lorentzova matice $L_{\iota\kappa}$ má tvar typický pro popis rotace

$$L_{\iota\kappa} = \begin{pmatrix} \gamma & i\beta\gamma & 0 & 0 \\ -i\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (8.28)$$

a je unitární:

$$\sum_{\iota} L_{\iota\kappa} L_{\iota\lambda} = \delta_{\kappa\lambda} \quad , \quad (8.29)$$

takže se při ní zachovává velikost vektoru a invariance intervalu je automaticky splněna.

Formálně jde o euklidovskou metriku při rov. (8.26). Rozdíl je však v tom, že díky imaginární jednotce ve čtvrté proměnné vektoru v_{κ} může být čtverec v^2 jeho velikosti nejen kladný nebo nulový, ale i záporný, a dále že může být roven nule i pro nenulový vektor v_{κ} . Proto tuto metriku nazýváme **pseudoeuklidovskou**.

Minkowského idea však není vhodná pro GTR, kde je křivost prostoru jeho podstatnou charakteristikou, nelze ho tedy nahradit prostorem plochým. S rozšířením GTR obliba komplexní symboliky upadla a dává se přednost formulacím s metrickým tenzorem (8.20). Tak budeme postupovat i zde. Pro čas budeme užívat proměnnou $x_0 = ct$ a metriku bereme $(-+)$, tzn. $g^{00} = -1$, $g^{11} = -1$, $g^{01} = g^{10} = 0$.

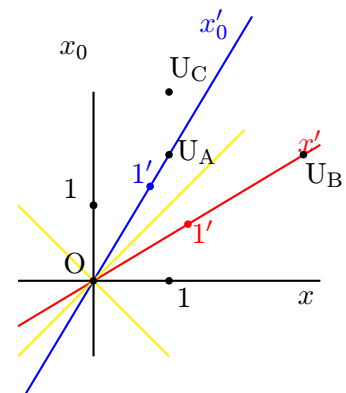
8.5.4 Relativita současnosti

Na rozdíl od newtonovské mechaniky je v teorii relativity současnost dvou nesoumísných událostí *relativní*, tj. závislá na volbě vztažné soustavy. Nebereme-li to v úvahu, dostaneme se snadno do sporu, který je podstatou řady „paradoxů“ teorie relativity.

Konkrétně: jsou-li v soustavě $\mathcal{S}$ dvě události U_A , U_B nesoumísné ($x_A \neq x_B$) a současné ($t_A = t_B$), pak v soustavě $\mathcal{S}'$ pohybující se směrem od x_A k x_B nastane událost U_A později než U_B , tedy $t_A > t_B$. Ověřte si to na grafickém znázornění.

Ilustrace: obrázek odpovídá $\beta = \frac{3}{5}$, tedy $\gamma = \frac{5}{4}$. Uvažujme událost $U_A = \{x; x_0\} = \{1; \frac{5}{3}\}$. V $\mathcal{S}$ je událost $U_C = \{1; \frac{5}{2}\}$ soumísná s U_A , událost $U_B = \{\frac{25}{9}; \frac{5}{3}\}$ je současná s U_A . Sledujme tyto události v obou soustavách. Přechodem k $\mathcal{S}'$ se nezachovala současnost ani soumísnost: v $\mathcal{S}'$ je U_B současná s počátkem souřadnic $O = \{0, 0\}'$; U_A je soumísná s počátkem souřadnic $O = \{0, 0\}'$.

??? Otázka: Spočítejte souřadnice bodů U_A , U_B v $\mathcal{S}'$ a ověřte je na obrázku. ($\rightarrow$ str. 100) Dokažte, že v soustavě $\mathcal{S}''$ pohybující se směrem od x_B k x_A nastane událost U_A naopak dříve než U_B , tedy $t_A < t_B$.



8.6 Klasické interpretace: kontrakce délek, dilatace času, éter

Klasická fyzika byla neobyčejně úspěšná v popisu přírody. Klasické představy jsou nám stále do té míry blízké a sugestivní (zejména ve srovnání s kvantovou fyzikou), že je užíváme občas i nevědomky, třebaže je nebereme doslova. Ostatně ještě z ptolemaiovského, geocentrického pojetí běžně říkáme, že vychází slunce, nebo dokonce že zašlo za mraky, aniž to bereme moc doslovně. Podobně i v oblasti platnosti STR se užívají některé historické formulace, které by při doslovném výkladu mohly zavádět. Bylo by ovšem školometské chtít je zakazovat. Lepší bude připomenout, co znamenají a upozornit na to, co neznamenaají.

8.6.1 Vlastní délka

Vlastní délkou ℓ_0 tyče nazýváme délku této tyče měřenou v takové S_0 , v níž je tyč v klidu („stojí“). Délka ℓ' téže tyče měřená v S' , vůči níž se tyč pohybuje rychlostí β s odpovídajícím γ , je však jiná, a to $\ell' = \ell_0/\gamma$, jak vzápětí odvodíme.

Pro další výklad však soustavy mírně přeznačíme. Klasická fyzika byla totiž zvyklá na preferovaný „absolutní“ prostor a čas S . Vůči němu pak vztahovala měření a snažila se vysvětlit, proč „pohybující se těleso“ má své vlastní, sebou samým změřené rozměry jiné (kontrahované = stlačené) i doby dějů jiné (dilatované = roztažené), než „ty správné“, měřené z S .

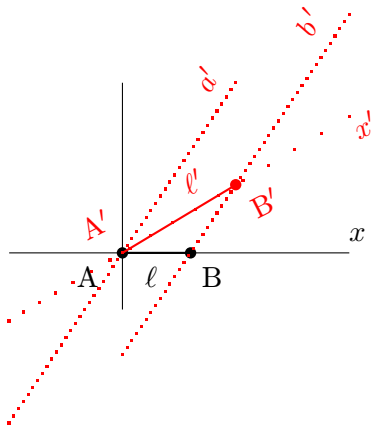
8.6.2 Kontrakce délek

Problém: Tyč má vlastní délku ℓ_0 . Jakou délku ℓ naměříme v soustavě S , vůči níž se tyč pohybuje rychlostí β ?

Řešení: Označme S „naši“ vztažnou soustavu, S' soustavu, v níž tyč stojí, a synchronizujme počátky obou soustav. Měříme-li délku (ať už pohybující se nebo stojící) tyče, určíme prostoročasové souřadnice obou jejích konců, a to v tomtéž čase z hlediska soustavy, v níž měříme. Na obrázku probíhá měření např. jako události A, B v S a A', B' v S' , kde A = A' = O, tedy $x_A = 0$, $x_B = \ell$, $x'_A = 0$, $x'_B = \ell' = \ell_0$. Lorentzova transformace $x' = \gamma(x - \beta ct)$ dává ihned $\ell' = \gamma\ell$, tedy $\ell = \ell_0/\gamma$. Protože je vždy $\gamma \geq 1$, zjistí pozorovatel P v S vždy, že letící tyč je *kratší*, a to γ -krát. (Výsledek ovšem nezávisí na synchronizaci, ověřte.)

Pozorovatele P' sedícího na tyči (klidného v soustavě tyče S') však právě provedené měření neuspokojí. Jednak pro něj akty měření obou konců tyče nebyly současné; přední konec byl vůči S' měřen dříve o dobu $\ell_0\beta$, a za tuto dobu zadní konec urazil rychlostí β vzdálenost $\ell_0\beta^2$, o kterou se pozorovateli P jeví tyč kratší, tedy $\ell = \ell_0(1 - \beta^2)$. Dále, P používal γ -krát kratší délkovou jednotku, naměří tedy namísto ℓ_0 délku pouhých $\ell = \gamma\ell_0(1 - \beta^2) = \ell_0/\gamma$.

Lorentzův výklad (původní): Těleso má svůj rozměr proto, že je tvořeno nabitými částicemi (jádra atomů, elektrony) a jejich elektromagnetické pole řídící se Maxwellovými rovnicemi je zpětně drží v rovnováze v těch polohách, jaké v tělese právě mají. (Mimochoodem, stabilitu tělesa klasická teorie zdůvodnit neumí, ale to je teď jedno.) Pohybující se elektromagnetické pole (v pohybujícím se tělese) se transformuje podle Lorentzovy transformace, ekvipotenciální plochy nábojů se z koulí mění na sploštělé elipsoidy, a podle toho se splošťuje ve směru pohybu i těleso samo.

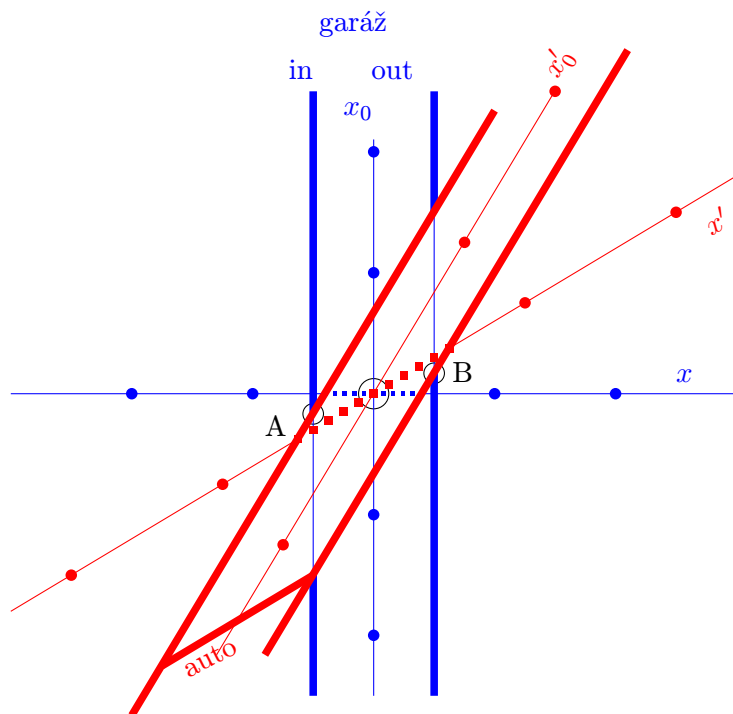


Grafický výklad (viz obr.) Nechť tyč leží klidně v S' , zadním koncem A v souřadnici $x' = 0$ (světočára a), předním B na souřadnici $x' = \ell_0$ (světočára b, obě červené hustě tečkované). Proběhne-li měření v S v okamžiku $t = 0$, je zadní konec určen událostí A = {0, 0}, přední konec událostí B = { ℓ_0 , 0}, protože současnost v S určují černá plná osa x a její rovnoběžky. Naproti tomu v S' určují současnost řídce červené tečkovaná osa x' a její rovnoběžky; konce tyče jsou tedy v čase $t' = 0$ událostmi A' = {0, 0}' a B' = { $\frac{\ell_0}{\gamma}$, 0}' a jsou měřeny měřidlem jiné délky než na ose x . Polohy tyče z hlediska S , resp. S' v čase $t = 0$, resp. t' jsou naznačeny plnou čarou černou, resp. červenou. Délka AB měřená příslušnou jednotkou v S je kratší než délka AB' = ℓ_0 měřená jednotkou v S' .

??? **Otázka:** Určete hodnoty B' v S . (→str. 97)

8.6.3 „Dlouhé auto projíždí krátkou garáží“

Lorentzův výklad (původní): Auto je zkrácené díky kontrakci. Proto se do garáže vejde.



Grafický výklad: Auto i garáž mají stejné klidové délky ($\ell_g = \ell'_a = 1$). Na obrázku červené **auto** (soustava S') projíždí zleva doprava modrou **garáží** (soustava S). Počátky S, S' (větší černý kroužek) odpovídají události, kdy střed auta projíždí středem garáže. Časové i délkové jednotky jsou na osách označeny tečkami. Tečkovaně (10 dílů) je vyznačeno auto modře v okamžiku $t = 0$ podle S a červeně v okamžiku $t' = 0$ podle S' ; všimněte si, že z hlediska auta má garáž délku $\ell'_g = 0,8$, a naopak z hlediska garáže má zase auto délku $\ell_a = 0,8$ (délková kontrakce).

Menší černé kroužky označují
- A: záď auta u vjezdu do garáže
- B: příď auta u výjezdu z garáže.

Všimněte si dále, že v soustavě S garáže nastane napřed A, potom B (a po tu dobu $\Delta t = 1/3$ je celé auto uvnitř garáže), za-

tímco v soustavě S' auta nastane naopak napřed B, potom A (a po dobu $\Delta t' = 1/3$ je garáž „kolem auta“, auto ji přesahuje).

8.6.4 Dilatace času

Problém: Na hodinách v soustavě S' uplyne doba t' . Jakou dobu naměří ve „stojící“ soustavě S ?

Řešení: Nechť opět hodiny proletěly společným počátkem obou soustav v čase $t = t' = 0$. Až v S' uplyne doba T' , bude

$$0 = x' = \gamma(x - \beta cT) \quad (8.30)$$

$$T' = t' = \gamma(T - \beta x/c) \quad , \quad (8.31)$$

odkud $x = \beta cT$ (hodiny letí rychlostí βc) a $T' = \gamma T(1 - \beta^2)$, čili $T = \gamma T'$. V soustavě S uplyne doba γ -krát delší.

Heslovitě řečeno: „Mezi dvěma událostmi A, B uplyne nejkratší doba v té soustavě, v níž jsou A, B soumístné“ (tedy měříme-li tuto dobu hodinami, které právě stihnou zajet od jedné události ke druhé; předpokládá se, že interval AB je časupodobný).

Experimentální ověření Mikroskopické ověření: mezony μ s poločasem rozpadu $\tau_0 = 2,2 \cdot 10^{-6}$ s vznikající ve vrchních vrstvách atmosféry sekundárně z kosmického záření proletí na povrch země dráhu ℓ cca 30 km. Z „pozemského hlediska“ letí tedy nejméně dobu $\tau = \ell/c \approx 10^{-4} \approx 50 \cdot \tau_0$. Za tuto dobu vlastního času by se jejich počet zmenšil rozpadem asi 10^{20} -krát, takže bychom je na Zemi prakticky nemohli registrovat.

Makroskopické ověření dilatace je popsáno mj. v HRW (st. vyd. str. 1013, nov. 1037): v říjnu 1977 Joseph Hafele a Richard Keating nechali čtyři přenosné atomové hodiny $20\times$ obletět kolem Země na komerčních leteckých linkách v různých směrech. Výsledné zpoždění se shodovalo s teorií na 10%. O několik let později byla po 15 h obletání Chesapeacké zátoky potvrzena dilatace času s přesností lepší než 1%. V dnešní době se při přemísťování přesných atomových hodin vždy započítávají efekty STR i GTR. Rovněž hodiny na družicích pro GPS se nastavují s uvážením jak STR, tak i GTR.

8.6.5 „Paradox dvojčat“

Cestovatel C z počátku O letí své 4 roky rychlostí $\beta = \frac{3}{5}$ (pro ruční výpočty oblíbenou, $\gamma = \frac{5}{4}$) do bodu A , tam se namíste obrátí a letí zpět; doma v O zjistí, že na výletu zestárl jen 8 roků, tedy méně než jeho dvojče D — bratr, který zůstal doma a zestárl o $2\gamma = 10$ roků. Každý z pozemšťanů, který uvidí po cestě cestovatele C , uvidí, že jeho (jediné) hodiny ukazují menší čas než místní hodiny na Zemi, a usoudí, že tedy cestovatelovy hodiny jdou γ -krát pomaleji. Cestovatel C sleduje (mnohé) pozemské hodiny a vidí, že i na cestě tam, i na cestě nazpět

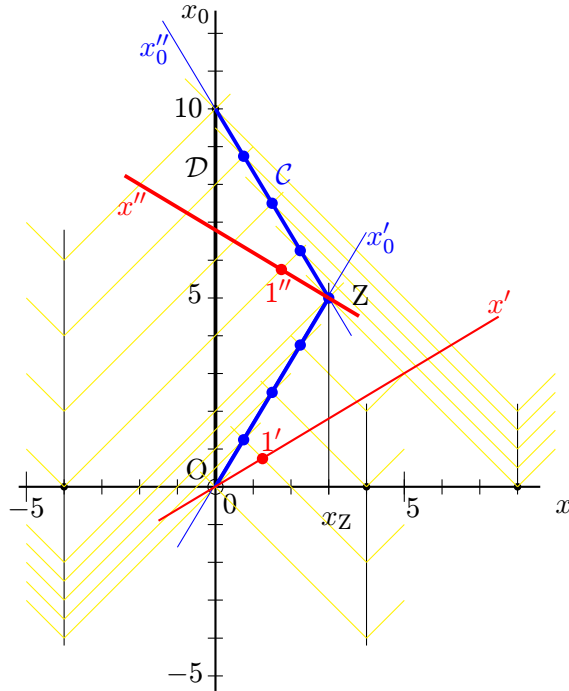
- každé z (mnoha) potkávaných hodin jdou γ -krát pomaleji než jeho (jediné);
- přesto každé následující ukazují čas větší než jeho.

Z toho usoudí, že sice kterékoli pozemské hodiny jdou pomaleji než jeho, ale že jsou navzájem rozsynchronizovány tak, aby vždy, postupně ve směru jeho letu (tam i zpět), ukazovaly čas pozdější.

Obrázek je grafickým záznamem (tučně modré) cesty cestovatele D rychlostí $\beta = \frac{3}{5}$, s lokálními časovými značkami – tečkami po dobách $\Delta t' = 1$. Cestou přijímá signály z majáků se vzdálenostmi $\Delta x = 4$ a po uplynutí vlastní doby $t' = 4$, když se setká se signálem vyslaným z majáku vzdáleného 8 od základny O , změní směr na opačný a vrací se rychlostí $-\beta$ zpět. Při opětovném míjení základny O zjistí, že on zestárl jen o 8 roků, na základně však o $t_c = 8\gamma = 10$ roků. Změnou směru letu získal oproti základně dobu (životu) $t_b - t_a$ pozemských roků.

Situace se jeví paradoxní, pokud si myslíme, že situace cestovatele C by měla být stejná jako jeho dvojčete v D , „podle principu relativity“. Ale ona není: D byl celou dobu v klidu vůči inerciální soustavě, zatímco C jednou zažil obrovské zrychlení, když měnil směr, aby se vrátil domů. Během tohoto zrychlení C zestárne jen minimálně, zatímco pro něj D zestárne o dobu BC (pro C se mění koncepce současnosti).

Dá rozum, že D , který opravdu nikdy „nezhřešil neinerciálností“, je na tom jinak, než C , který sice nehřešil ani cestou tam, ani zpátky — ovšem kromě okamžiku (event. krátké doby) změny směru. Asi jako cestovatel, který chce uklidnit svou ženu tvrzením, že jí byl věrný po celou cestu tam i zpátky, až na jediný okamžik (event. krátkou dobu) v cíli, v přístavu v půli cesty.



8.6.6 Éter

Klasická fyzika nabízela pro vysvětlení Michelsonova-Morleyova pokusu dva modely světla: korpuskulární (Newton) a vlnový (Huyghens).

V *korpuskulárním modelu* se žádný éter nevyskytuje: světlo jsou letící částice (korpuskule) vystřelované svým zdrojem. Model vysvětluje přesně přímočaré šíření světla a odraz světla. Nesouhlasí však rychlost v látkovém prostředí (vychází větší než ve vakuu); směr při lomu souhlasí jen kvantitativně (neřídí se Snellovým zákonem)⁵. Nesouhlasí dále rychlost c světla při pohybu zdroje: v tomto modelu by se měla rychlost zdroje k rychlosti světla vektorově přičítat. Nevysvětluje tedy, proč světlo pozemské, sluneční i ze Siria mají stejnou rychlost (jak bylo experimentálně ověřeno).

Podle *vlnové teorie* je světlo chvěním éteru, asi jako zvuk je chvěním vzduchu nebo železné tyče. V soustavě, v níž éter stojí, vysvětluje model vše dobře: přímočaré šíření světla, odraz i lom (a fyzikální optika vysvětluje i další jevy jako difrakci apod.). Rychlost světla nezávisí na rychlosti zdroje. Látkou (= hmotným prostředím) je éter ovlivněn tak, že se v něm šíří světlo pomaleji než ve vakuu. Pohybujícím se prostředím je také strháván éter, ale jen částečně, viz kap. 8.6.8, a není jasné, proč právě dílem $1 - \frac{1}{n^2}$, a ne úplně – viz kap. 8.6.8.

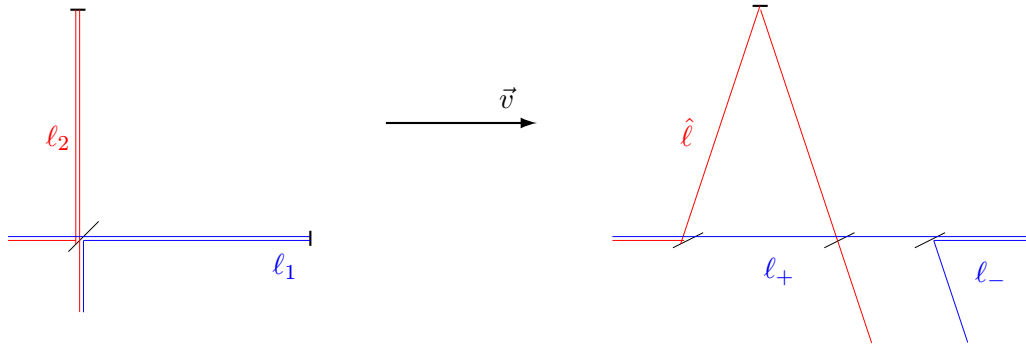
⁵V prostředí s vyšším indexem lomu, např. ve skle, má podle této teorie světelná částice nižší potenciální energii než ve vakuu. Při průletu rozhraním je proto urychlena směrem kolmo k rozhraní a její trajektorie se tedy láme směrem ke kolmici.

Problémy nastávají, když se pozorovatel pohybuje vůči éteru. Pak by měl naměřit nejen Dopplerův jev, tj. změnu kmitočtu – barvy světla (to naměří), ale i rychlost světla vektorově zvětšenou o svou vlastní rychlost (to však bylo pokusy vždy vyvráceno).

Při tom všem zůstává podstata éteru utajena a jeho vlastnosti jsou velmi pozoruhodné. Protože světlo je vlnění příčné a nikoli podélné, má éter povahu pevné látky (nikoli plynu či tekutiny). Jeho modul pružnosti musí být obrovský kvůli obrovské rychlosti světla, přitom se však v něm pohybují všechny předměty, aniž jim klade měřitelný odpor v pohybu apod.

V *teorii relativity* nepotřebujeme znát model světla. Lorentzova transformace vysvětlí skládání rychlostí (z klasického hlediska nepochopitelné) bez ohledu na vlastnosti pohybujícího se objektu tím, že jde o vlastnost prostoročasu, nikoli světla či materiálu přístrojů.

8.6.7 Měření rychlosti světla v různých směrech; Michelson-Morley



Obrázek 8.1: Pokus Michelsonův-Morleyův a Kennedyův-Thorndikův

Obr.8.1 ukazuje schematicky pokus Michelsonův-Morleyův (kde $\ell_1 = \ell_2$) a Kennedyův-Thorndikův (kde naopak ℓ_1 a ℓ_2 mají hodnoty co nejvíce rozdílné). Záporný výsledek Michelsonova-Morleyova pokusu lze sice vysvětlit samotným předpokladem Lorentzovy kontrakce, ale k vysvětlení záporného výsledku Kennedyova-Thorndikeova pokusu je potřeba navíc přibrat i dilataci času.

Dráhy paprsků interferometru od polopropustného zrcátka k odrazovému a zpět.

v klidu (vlevo):

vodorovný modrý: $\ell_1 + \ell_1 = 2\ell_1$

svislý červený: $\ell_2 + \ell_2 = 2\ell_2$

rozdíl: $2(\ell_1 - \ell_2)$

rozdíl po otočení o 90° : $2(\ell_1 - \ell_2) - 2(\ell_2 - \ell_1) = 0$

v pohybu (vpravo):

vodorovný modrý: $\ell_{\pm} = \ell_1 + vt_{\pm} = ct_{\pm} \Rightarrow \ell_{\pm} = \frac{c\ell_1}{c \mp v} \Rightarrow \ell_+ + \ell_- = \frac{2\ell_1}{1 - \beta^2}$

svislý šikmý červený: $\hat{\ell}^2 = (v\hat{t})^2 + \ell_2^2 = (c\hat{t})^2 \Rightarrow \hat{\ell} = \frac{\ell_2}{\sqrt{1 - \beta^2}} \Rightarrow \frac{2\ell_2}{\sqrt{1 - \beta^2}}$

rozdíl: $\frac{2\ell_2}{\sqrt{1 - \beta^2}} - \frac{2\ell_1}{1 - \beta^2}$

rozdíl po otočení o 90° : $2(\ell_2 + \ell_1) \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} - \frac{1}{1 - \beta^2} \right)$

8.6.8 „Strhování světla“

Rychlost světla ve vakuu značíme c . V klidném prostředí s indexem lomu n má světlo rychlost $v = c/n$. Otázkou však je, do jaké míry se éter strhuje v látce s indexem lomu n , která se *pohybuje* rychlostí $w = \beta c$. Experimenty s tekoucí vodou (Fresnel) ukázaly, že se éter strhuje pohybujícím se prostředím (pro rychlost v' světla v pohybujícím se prostředí platí $v' > v$), ale jen částečně, a to s těžko pochopitelným koeficientem cca $(1 - 1/n^2)$:

$$v' \approx v + w \left(1 - \frac{1}{n^2} \right) < v + w \quad (8.32)$$

STR řeší všechny uvedené otázky logicky, bez dalších předpokladů a v úplném souladu s experimentem. „Strhovací koeficient“ vyjde jako první přiblížení výsledku relativistického skládání rychlosti světla v látce $v = c/n$ a rychlosti látky $w = \beta c$, totiž

$$v' = \frac{v + w}{1 + \frac{vw}{c^2}} = c \frac{\frac{1}{n} + \beta}{1 + \frac{\beta}{n}}, \quad (8.33)$$

a to můžeme rozvinout v mocninnou řadu podle β :

$$v' = \frac{c}{n} + w \left(1 - \frac{1}{n^2} \right) + \beta^2 \dots \quad (8.34)$$

??? **Otázka:** Proveďte naznačené odvození podrobně a zjistěte úplný člen druhého řádu. ($\rightarrow$ str. 108)

V současných představách nevymýšlíme mechanický model nebo jiný nositel pro elektromagnetické pole. Pole popisuje stav prostoru popsany tak, že každému bodu a času v uvažované oblasti je přiřazena nějaká hodnota tohoto pole (např. $\vec{E}, \vec{B}$). Kvantová teorie se sice „vrátila“ k částicovému pojetí světla jako proudu fotonů, ty ovšem nepojímá mechanisticky, ale jen jako vyjádření toho, že energie pole se mění o celistvé násobky výrazu $E = hf$. Ten interpretujeme jako energii vznikající či zanikající částice – fotonu – s nulovou klidovou hmotností, světelnou rychlostí a hybností $p = hf/c$.

8.6.9 Světlo v látkovém prostředí a relativita

Nebudeme zde budovat relativistickou teorii elektrodynamiky kontinua, připomeneme jen dva aspekty, které nesmíme ztratit ze zřetele:

- Studujeme-li chování světla v hmotném prostředí (a nikoli ve vakuu), pak *existuje* jistá apriori význačná vztažná soustava, totiž ta, ve které prostředí stojí. Není tedy pravda jako ve vakuu, že všechny inerciální soustavy jsou rovnoprávné a zákony v nich mají mít stejný tvar.
- Tvrdíme-li že rychlost v světla v látce s indexem lomu n je rovna $v = c/n$, pak tím rozumíme rychlost světla⁶ v *ustáleném* stavu, nikoli v *přechodovém* stavu při vniknutí světla do prostředí. Čelo elektromagnetické vlny rozkmitá nosiče náboje tvořící látku, ty – tím, že kmitají – vyzařují elektromagnetické pole. To se sčítá se stále dopadající vlnou, a výsledkem je v rovnovážném stavu situace, kdy zpětná vlna se vyruší a dopředná se pohybuje rychlostí c/n . Nežli se ovšem k rovnovážnému stavu dojde, trvá to jistou přechodovou dobu (problematiku tvaru **prekurzoru** – světelné vlny před dosažením rovnovážného stavu – probírá podrobně např. Stratton.) Má-li tedy za jistých okolností látka (plasma) index lomu $n < 1$, pak to není ve sporu s teorií relativity. V *ustáleném stavu* bude v takové látce fázová rychlost světla nadsvětelná. Ovšem tím, že jde o ustálený stav, nepřenáší vlna žádnou (novou) informaci. Kdybychom poslali pulz (nebo obecně změnili ustálený stav), pak by se šířil světelnou rychlostí a deformoval by se přitom. Nadsvětelnou rychlost by vlna vykazovala až později, v informačně sterilním ustáleném stavu.

8.7 Vektorový formalismus, čtyřvektory

8.7.1 Základní idea

Lorentzovu transformaci, tedy přechod mezi dvěma navzájem se pohybujícími inerciálními soustavami, lze interpretovat jako otočení ve 4D-prostoru času s metrikou (8.20). Naše strategie bude následující: vezmeme klasickou rovnici platnou v jedné inerciální soustavě. Pokud ji zapíšeme veličinami invariantními vůči Lorentzově transformaci anebo veličinami majícími při této transformaci jednoduše definované chování (čtyřvektory, čtyřtenzory...), pak z platnosti této rovnice v jedné inerciální soustavě plyne platnost i v libovolné jiné inerciální soustavě (po Lorentzově transformaci).

!!! **Odpověď** ze str. 108: $-c\beta^2 n^{-1}(1 + n^{-2})$

⁶Zde myslíme fázovou rychlost monochromatického světla, tj. rychlost přesunu místa se stejnou fází vlny. Jinak je definována rychlost grupová, rychlost přenosu energie atp.

8.7.2 Čtyřskaláry, čtyřvektory, čtyřtenzory

V klasické mechanice nazýváme **skalárem** veličinu, která se při otočení vztažné kartézské soustavy nemění a **vektorem** 3D veličinu, jejíž složky se při otočení vztažné kartézské soustavy transformují stejně jako složky diferenciálu $d\vec{r}$ polohového vektoru.

Veličinu nazveme **čtyřskalárem** ve 4D prostoročase, jestliže je invariantem při Lorentzově transformaci; jinými slovy, má-li výraz, který ji definuje, stejný tvar i stejnou hodnotu ve všech soustavách spojených Lorentzovou transformací. Je to např. elektrický náboj Q , anebo, jak jsme dříve zjistili, prostoročasný interval s^2 z rov. (8.26), a jak v kap. 8.7.3 zjistíme, vlastní čas (s elementem $d\tau = dt/\gamma$, což je, přesněji řečeno, vlastní *doba*, tj. rozdíl dvou časových údajů).

Veličinu $\{X_\lambda\}_{\lambda=0}^3$ v prostoročase s osami x_κ nazveme **čtyřvektorem**, jestliže se transformuje Lorentzovou transformací stejně jako „posunutí“ $\{d\vec{X}\} = \{dx_0, dx_1, dx_2, dx_3\}$ události popsané bodem $\vec{X}$. Čtyřvektor zde budeme značit kapitálkou a řeckým indexem, např. X_κ , jeho poslední tři složky tvoří 3D vektor toutéž minuskulí a latinským indexem, např. x_k .

Analogicky, tedy transformačními vlastnostmi, můžeme zavést **čtyřtenzory** libovolného řádu.

8.7.3 Vlastní čas (vlastní doba)

Čas t byl v klasické mechanice invariantem Galileova transformace a bylo proto možné podle času t derivovat⁷. V STR však čas t , resp. veličina $x_0 = ct$, se nechová jako skalár, ale je to jen jedna ze složek polohového čtyřvektoru (s nepodstatnou multiplikační konstantou c). Ukážeme však, že veličina zvaná **vlastní čas** (resp. vlastní doba)

$$\tau = \frac{t}{\gamma} = t\sqrt{1 - \beta^2} \quad (8.35)$$

určující údaj hodin v soustavě, ve které hodiny stojí (tedy fakticky to, co hodiny skutečně ukazují), invariantem je, a je tedy vhodná k použití všude, kde jsme v klasické fyzice potřebovali čas či dobu (např. pro derivace podle času).

Uvažujme pohybující se hodiny. Události A odpovídá poloha x_A a čas t_A , události B poloha x_B a čas t_B ; rozdíly mezi souřadnicemi bodů A a B značme Δx_μ . Pro $x_0 = ct$ zřejmě platí

$$\Delta x' = \gamma(\Delta x - \beta\Delta x_0) \quad (8.36)$$

$$\Delta x'_0 = \gamma(\Delta x_0 - \beta\Delta x) \quad (8.37)$$

V soustavě spojené s hodinami je ovšem $\Delta x' = 0$, a tedy $\Delta x = \beta\Delta x_0$, a z druhé rovnice pak plyne

$$\Delta x'_0 = \gamma(\Delta x_0 - \beta(\beta\Delta x_0)) = \gamma(1 - \beta^2)\Delta x_0 = \Delta x_0/\gamma \quad (8.38)$$

a podle definice $\Delta x_0 = c\Delta\tau$ platí i

$$\Delta\tau = \frac{\Delta t}{\gamma} = \Delta t\sqrt{1 - \beta^2} \quad , \quad (8.39)$$

$$d\tau = \frac{dt}{\gamma} = dt\sqrt{1 - \beta^2} \quad . \quad (8.40)$$

Protože pro $\beta \neq 0$ je vždy $\gamma > 1$, je také vlastní doba $\Delta\tau$, kterou změříme hodinami, vždy menší než doba změřená v libovolné vztažné soustavě $\mathcal{S}$, vůči níž se tyto hodiny pohybují („pohybující se hodiny jdou pomaleji“).

Uvedený vztah lokálně platí i tehdy, když se hodiny pohybují z bodu A do B s proměnnou rychlostí; z toho plyne

$$\tau_{AB} = \int_A^B \frac{dt}{\gamma} = \int_A^B \sqrt{1 - \beta^2} dt \quad . \quad (8.41)$$

⁷Terminologicky přesněji, jde nikoli o **čas**, ale o elementární **dobu** dt , tedy rozdíl dvou časových údajů. Je ovšem obecný úzus užívat termín „čas“ v širším slova smyslu, tedy jak pro veličiny časový údaj, doba, tak i pro objekty typu časový interval (v nerelativistické fyzice ve smyslu množiny soumístných událostí mezi dvěma událostmi – začátkem a koncem tohoto intervalu) apod. Podobně je běžný „vlastní čas“, „poločas“ ap., kam by terminologicky patřila „doba“.

8.7.4 Polohový čtyřvektor X

Jak lze očekávat, polohový čtyřvektor X_λ odpovídající polohovému vektoru pro 4D prostoročas bude složen z časové složky $x_0 = ct$ a z polohového vektoru x_ℓ v dalších třech složkách:

$$X_\lambda = \{x_0; x_1; x_2; x_3\} = \{ct; x_1; x_2; x_3\} \quad (8.42)$$

8.7.5 Čtyřvektor rychlosti – čtyřrychlost U

Ve 3D jsme zavedli rychlost vztahem

$$v_i = \frac{dx_i}{dt}, \quad (8.43)$$

protože dt byl vůči Galileově transformaci invariant.

Čtyřrychlost U_λ zavedeme analogicky 3D rychlosti v , ovšem nikoli derivací podle (obyčejného) času t , ale podle vlastního času τ :

$$U_\lambda = \frac{dX_\lambda}{d\tau} = \frac{dX_\lambda}{dt} \frac{dt}{d\tau} = \gamma \frac{dX_\lambda}{dt} = (\gamma c, \gamma v_1, \gamma v_2, \gamma v_3) \quad (8.44)$$

Všimněme si, že díky záporné časové složce je čtverec čtyřrychlosti konstantní:

$$U_\lambda \cdot U_\lambda = g^{\mu\nu} U_\mu U_\nu = \gamma^2(-c^2 + v_1^2 + v_2^2 + v_3^2) = c^2 \gamma^2(-1 + \beta^2) = -c^2 \quad (8.45)$$

8.7.6 Čtyřvektor hybnosti P ; klidová m_0 a relativistická m hmotnost

V klasické mechanice je hybnost $\vec{p}$ definována vztahem

$$\vec{p} := m_0 \vec{v}, \quad (8.46)$$

kde m_0 je charakteristika částice zvaná hmotnost; v STR ji nazýváme **klidovou hmotností**. Čtyřhybnost zavedeme proto vztahem

$$P_\lambda := m_0 U_\lambda = m_0 \gamma (c, v_1, v_2, v_3) \quad (8.47)$$

Zavedeme-li *relativistickou hmotnost* m vztahem

$$m := \gamma m_0, \quad (8.48)$$

můžeme analogicky s klasickou mechanikou psát

$$P_0 = mc \quad ; \quad P_1 = mv_1 \quad ; \quad P_2 = mv_2 \quad ; \quad P_3 = mv_3, \quad (8.49)$$

takže platí opět klasická definice rov. (8.46), jenom s hmotností nikoli klidovou m_0 , ale relativistickou m . Časovou složku (mc) budeme později interpretovat jako (E/c) , kde E bude celková energie sledované částice.

8.7.7 Čtyřvektor zrychlení A

Další derivací zjistíme snadno čtyřvektor zrychlení:

$$A_\lambda = \frac{dU_\lambda}{d\tau} = \gamma \frac{dU_\lambda}{dt}, \quad (8.50)$$

např. pro složku $\lambda = 1$

$$A_1 = \gamma \left(\frac{dv_1}{dt} \gamma + v_1 \frac{d\gamma}{dt} \right) = \gamma^2 a_1 + \frac{\gamma^4 v_1 (\vec{v} \cdot \vec{a})}{c^2}, \quad (8.51)$$

jak se zjistí výpočtem $d\gamma/dt$.

Derivací rov. (8.45) podle τ dále zjistíme, že čtyřrychlost a čtyřzrychlení jsou na sebe kolmé:

$$0 = \frac{d}{d\tau} \sum_\lambda U_\lambda U_\lambda = 2 \sum_\lambda A_\lambda U_\lambda, \quad \text{tedy } A \perp U. \quad (8.52)$$

Toho využijeme v následujícím odstavci při interpretaci časové složky čtyřvektoru síly.

8.7.8 Čtyřvektor síly. Pohybová rovnice

Klasická pohybová rovnice (druhý Newtonův zákon) zněla ve 3D

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt}m\vec{v} = \vec{f} \quad , \quad (8.53)$$

kde $\vec{f}$ byla klasická 3D síla. Skalárním násobením rychlostí $\vec{v}$ jsme dostali zákon zachování energie:

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v} = \vec{f} \cdot \vec{v} \quad , \text{ čili } \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m v^2 \right) = \vec{f} \cdot \vec{v} \quad . \quad (8.54)$$

Podobnou analogií jako dříve zavedeme čtyřsílu F_λ tak, aby platilo

$$\frac{dP_\lambda}{d\tau} = m_0 \frac{dU_\lambda}{d\tau} = F_\lambda \quad . \quad (8.55)$$

Tři prostorové složky budou s uvážením $dt = \gamma d\tau$ odpovídat rovnici

$$m_0 \frac{d}{dt}(\gamma v_\lambda) = F_\lambda / \gamma \quad (8.56)$$

a budou tedy souhlasit s klasickou rovnicí, zvolíme-li čtyřsílu F tak, aby

$$F_1 = \gamma f_1 \quad , \quad F_2 = \gamma f_2 \quad , \quad F_3 = \gamma f_3 \quad . \quad (8.57)$$

K určení a interpretaci časové složky F_0 užijeme jednak rov. (8.55), tedy

$$m_0 \frac{dU_0}{d\tau} = F_0 \quad , \text{ neboli } \quad F_0 = \gamma m_0 \frac{d}{dt}(\gamma c) \quad , \quad (8.58)$$

jednak skalárního čtyřsoučinu rov. (8.55) se čtyřrychlostí U_λ , o němž dokážeme, že je roven nule:

$$\sum_\lambda F_\lambda \cdot U_\lambda = \sum_\lambda m_0 \frac{dU_\lambda}{d\tau} \cdot U_\lambda \quad (8.59)$$

$$= \sum_\lambda m_0 A_\lambda \cdot U_\lambda \quad (8.60)$$

$$= 0 \quad . \quad (8.61)$$

Je tedy

$$0 = \sum_\lambda F_\lambda \cdot U_\lambda = \gamma^2 \sum_\lambda f_\lambda \cdot v_\lambda \quad (8.62)$$

odkud

$$F_0 c \gamma = -\gamma^2 \sum_{k=1}^3 f_k \cdot v_k \quad (8.63)$$

Eliminací F_0 z rov. (8.58) a (8.63) dostaneme po úpravě

$$\frac{d}{dt}(\gamma m_0 c^2) = \sum_{k=1}^3 f_k \cdot v_k \quad (8.64)$$

Člen v závorce tedy odpovídá kinetické energii z rov. (8.54). Označme ho E ; je definován jako

$$E = \gamma m_0 c^2 = m c^2 \quad ; \quad (8.65)$$

k jeho (mis)interpretaci viz též kap. 1.5.5. Rozvineme-li γ podle binomické věty, dostaneme

$$E = m_0 c^2 \left(1 + \frac{1}{2} \beta^2 + \frac{3}{8} \beta^4 \dots \right) \quad (8.66)$$

$$= m_0 c^2 + \frac{1}{2} m_0 v^2 + \dots \quad (8.67)$$

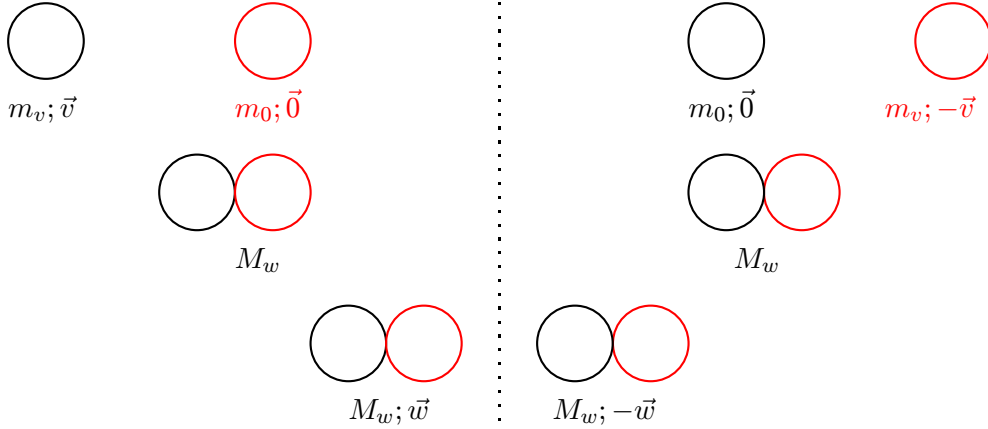
Nyní je vidět, že skutečně časová složka čtyřhybnosti z rov. (8.49) souvisela s energií, přesněji

$$P_0 = \frac{E}{c} \quad , \quad (8.68)$$

$$F_0 = \frac{\gamma}{c} \frac{dE}{dt} \quad . \quad (8.69)$$

8.7.9 Relativistická hmotnost; jiné odvození

K pojmu relativistické hmotnosti můžeme též přijít rozбором nepružné relativistické čelní srážky dvou stejných koulí. Uvažujme ráz koule hmotnosti m_v s rychlostí v a klidné koule hmotnosti m_0 ; výsledkem bude těleso hmotnosti M_w s rychlostí w , viz obrázek. Tutéž situaci pak popíšeme jednak z hlediska druhé koule jako klidné (zrcadlová symetrie), jednak přepočteme rychlosti vzorcem pro skládání s rychlostí $-v$.



Předpokládáme zákon zachování hybnosti, hmotnosti a k přechodu z $\mathcal{S}$ do $\mathcal{S}'$ použijeme relativistické skládání rychlostí:

$$p = M_w w = m_v v + m_0 0 \quad \text{ZZ hybnosti} \quad (8.70)$$

$$M_w = m_v + m_0 \quad \text{ZZ hmotnosti} \quad (8.71)$$

$$-w = \frac{w - v}{1 - \frac{wv}{c^2}} \quad \text{složení rychlostí } w \text{ a } -v \quad (8.72)$$

Z prvních dvou rovnic plyne

$$m_v v = (m_v + m_0) w, \quad \text{odkud} \quad (8.73)$$

$$w = v \frac{m_v}{m_v + m_0} \quad (8.74)$$

Z transformace rychlostí rov. (8.72) plyne

$$w \left(1 - \frac{wv}{c^2} \right) = v - w \quad (8.75)$$

odkud dosazením z rov. (8.74) a poté po vykrácení $\frac{v}{m_0 + m_v}$ dostaneme

$$m_v \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \frac{m_v}{m_0 + m_v} \right) = m_0 + m_v - m_v \quad (8.76)$$

vyrušíme m_v a rozšíříme $m_0 + m_v$

$$m_v \left(m_0 + m_v - \frac{v^2}{c^2} m_v \right) = m_0 (m_0 + m_v) \quad (8.77)$$

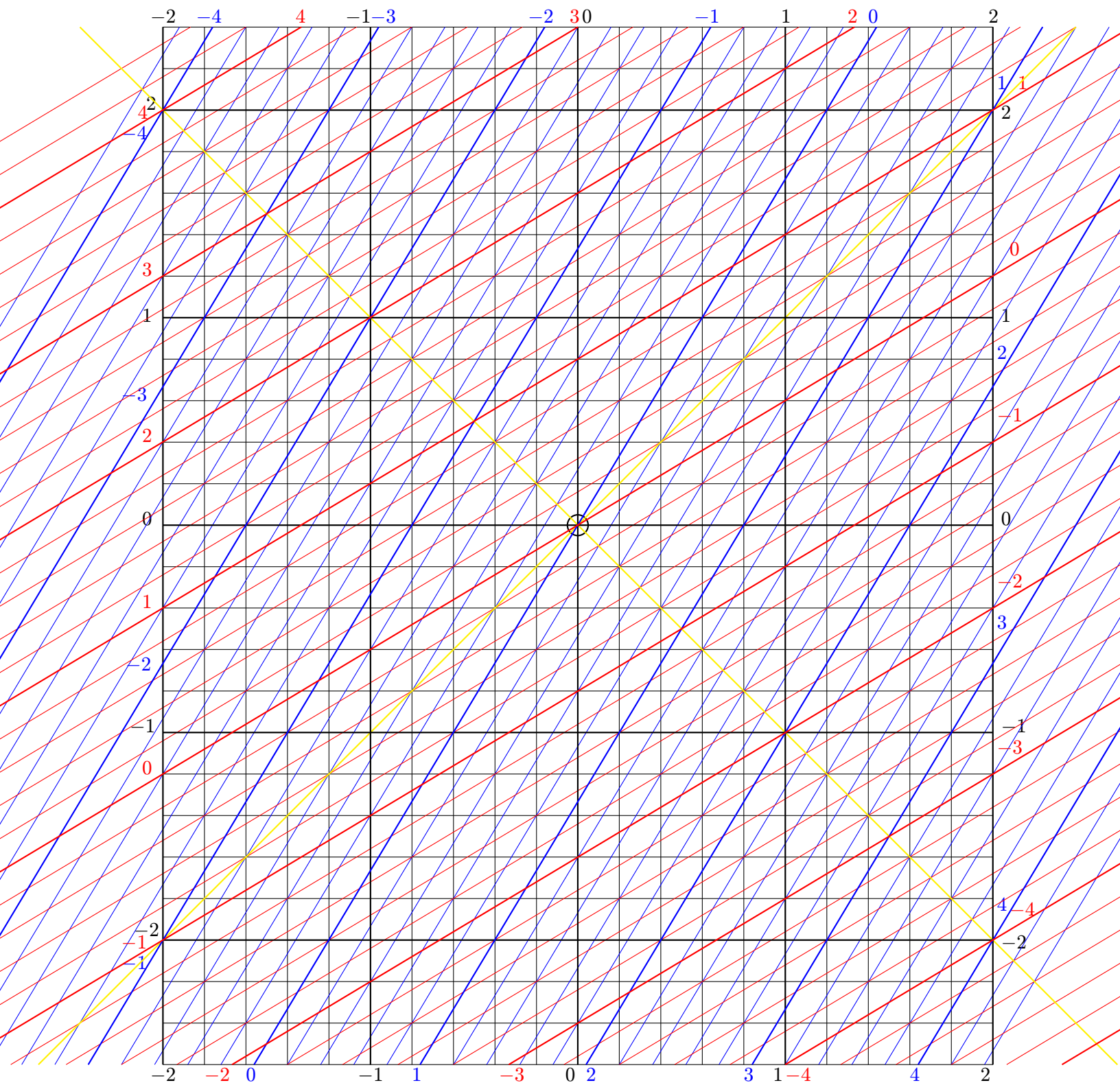
$$m_v^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) = m_0^2 \quad (8.78)$$

$$m_v = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad \text{neboli} \quad (8.79)$$

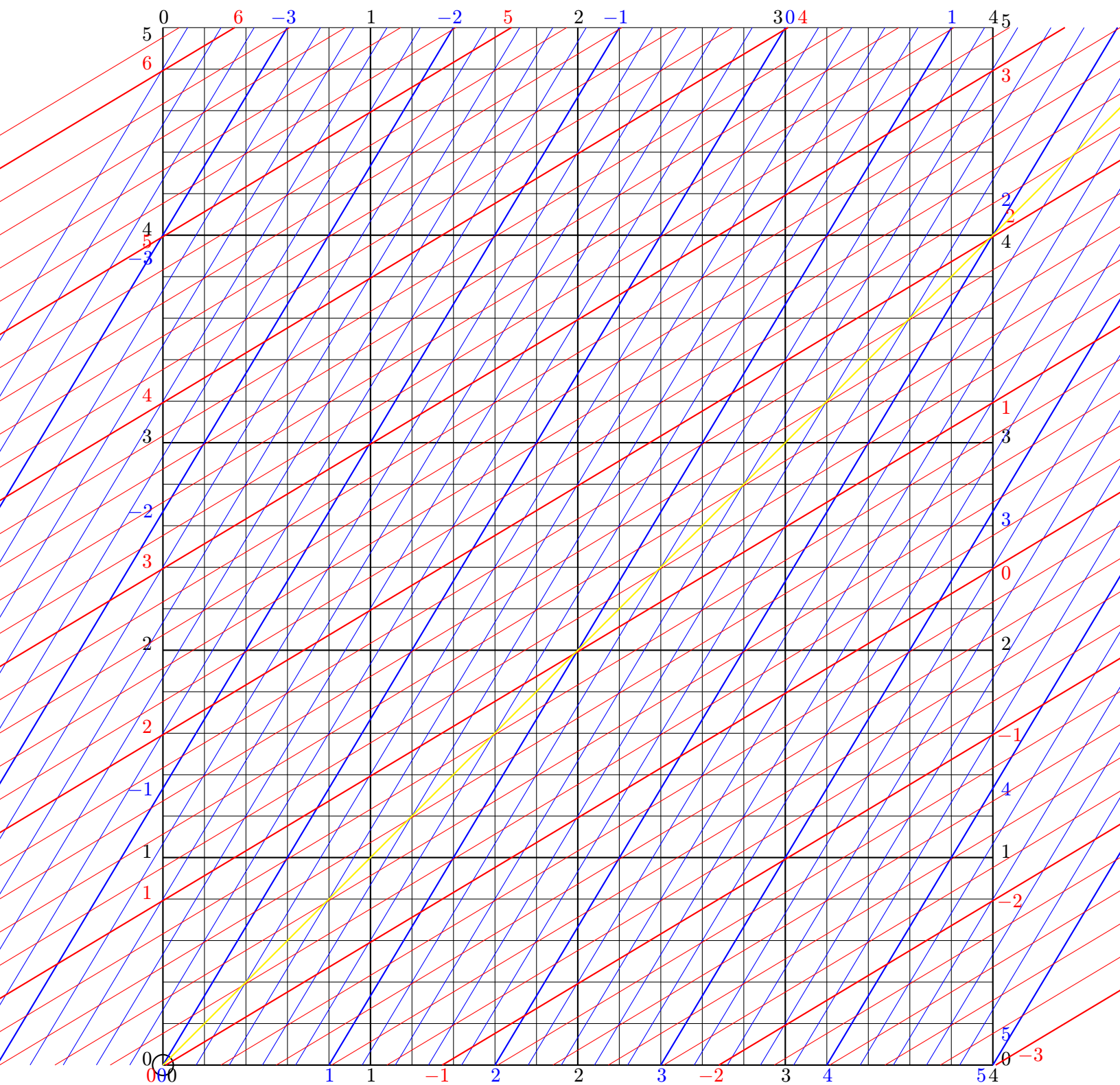
$$m = \gamma m_0, \quad (8.80)$$

v souladu s rov. (8.48).

Pro pohodlí čtenáře přikládáme síť pro grafický záznam Lorentzovy transformace při $\beta = \frac{3}{5} = 0,6$; $\gamma = \frac{5}{4} = 1,25$.



$$\beta = \frac{3}{5} = 0,6; \gamma = \frac{5}{4} = 1,25;$$



Kapitola 9

Analytická mechanika

2018-05-17

3-ANAL.tex; 15. pracovní verze, 2018-05-17. Uvítám všechny kritické připomínky. J.O.

9.1 Plán; pojem principu

9.1.1 Co, proč a jak (syntéza vs. analýza)

Zatím jsme poznali klasickou *vektorovou* neboli *newtonovskou* mechaniku. Dalo by se říct, že ta postupovala „synteticky“. Vyšla od hmotných bodů, („od toho nejmenšího“). Popsala v kinematice jejich stav pomocí pojmů čas a poloha v prostoru (a z toho odvozených veličin rychlosti a zrychlení). Pro popis vzájemného působení – interakce – částic zavedla veličinu *síla* coby prostředník interakce mezi částicemi, a veličinu *hmotnost* částice (proto také název hmotný bod), určující míru, jakou se daná síla projeví na stavu částice. Z více částic pak sestavila složitější fyzikální soustavy: kontinuum, tuhé těleso.

Postup *analytické mechaniky* je opačný. Rádi bychom vytvořili jiný, obecnější přístup k řešení fyzikálních problémů. Chceme nyní pohlížet na fyzikální soustavu jako na celek. Nechceme vycházet z „nejmenších částí“, ale chceme řešit soustavu jako celek, řešit úlohy z obecnějšího pohledu, na základě vhodných **principů**. Ty zde nastoupí namísto pohybových rovnic. Doufáme mj., že takový princip, dostatečně obecně formulovaný, bude jednodušeji použitelný ve složitějších případech, případně i za hranicemi klasické mechaniky. Z té ovšem vyjdeme, protože nám skýtá spolehlivý základ pro výstavbu jakékoli obecnější konstrukce. Protože namísto syntézy (složitě soustavy z jednoduchých částí) vycházíme přímo ze složitěho celku a provádíme jeho analýzu (na dílčí části), mluvíme o **analytické mechanice**.

9.1.2 Příklad z optiky

Společný problém Světlo má ve vakuu rychlost c_0 , v látce¹ rychlost $c = c_0/n$, kde n je materiálová konstanta (*index lomu*). Jak se pohybuje světlo mezi body A a B?

Popis newtonovský (geometrickou optikou) Zavedeme „foton“² coby „částičku světla“, takže světelný paprsek bude jeho trajektorií. Pohyb tohoto „fotonu“ popíšeme podobně jako pohyb hmotného bodu z Newtonových rovnic, tedy:

- V homogenním izotropním prostředí letí „foton“ rovnoměrně přímočaře rychlostí $c = c_0/n$.
- Na rozhraní dvou prostředí se některý „foton“ odrazí, některý vnikne dovnitř prostředí³.
- Pro odražený „foton“ platí, že úhel α'_1 odrazu se rovná úhlu α_1 dopadu: $\alpha'_1 = \alpha_1$.

¹Termín „látka“ užíváme pro hmotné prostředí (protiklad pole) tehdy, když je jeho hmotnost nepodstatná.

²Ten je zcela klasický a nemá v sobě samozřejmě nic kvantového. Pro odlišení ho proto píšeme v uvozovkách.

³Geometrická optika neuvádí v jakém poměru; fyzikální optika i toto stanoví Fresnelovými vzorci, které lze odvodit z Maxwellových rovnic. To nás ale teď nezajímá.

- „Foton“ v prostředí 1 má jinou energii než v prostředí 2. Na přechodu rozhraní proto získá či ztratí rychlost ve směru normály, zatímco složka ve směru rozhraní se nemění. Tím se ale mění úhel, pod kterým dál letí. (Aby se kvalitativně lámal ke kolmici, musí být rychlost v prostředí 2 větší než v 1; to však odporuje přímému měření. Snellův zákon $n_1 \sin \alpha_1 = n_2 \sin \alpha_2$ rovněž splněn není, shoda tedy není kvantitativní.)

Popis principem Z optiky známý Fermatův princip říká ve své zjednodušené formě toto:

Fermatův princip: Světlo se pohybuje mezi dvěma danými body A , B tak, aby celková doba, kterou na tento pohyb potřebuje, byla minimální.

Tento princip tedy bere trajektorii světla jako celek a vypovídá o ní jako o celku. Snadno z něj vyplyne např. přímočaré šíření světla v homogenním prostředí, stejně jako pravidla lomu a odrazu světla. Je ale určitě názornější pro určení ohybu trajektorie světla v nehomogenním prostředí (např. ve vzduchu s proměnnou hustotou) než geometrická optika.

9.1.3 Troška filosofie

Jak Fermatův princip, tak geometrická optika vedou (různými cestami) ke stejným výsledkům; příslušný důkaz však nyní není podstatný. Podstatné je uvědomit si *rozdílnost obou přístupů*. Rozdíl je i filosofický: popis podle geometrické optiky je plně kauzální (příčinný), zatímco popis Fermatovým principem je teleologický (účelový).

V geometrické optice se „foton“ v každém okamžiku může poradit s výše uvedenými čtyřmi pravidly, jak a kam se má pohybovat v dalším okamžiku. Nepotřebuje plánovat, nepotřebuje mít paměť: jeho bezprostřední budoucnost je určena přítomným stavem jednak „fotonu“, jednak jeho bezprostředního okolí. „Foton“ je současnými okolnostmi donucen jednat tak, jak jedná,

Naproti tomu podle Fermatova principu se „foton“ pohybuje tak, aby koneckonců splnil jistý globální požadavek, účel, cíl: mít co nejmenší celkovou dobu letu za dodržení podmínky $v = c_0/n$ v každém okamžiku a místě letu. Jak zákon přímočarého letu v homogenním prostředí, tak i zákon odrazu a zákon lomu na rozhraní už z Fermatova principu vyplynou. Připomeňme, že účelový, teleologický popis a zdůvodnění je běžný třeba v biologii: zvíře plánuje a jedná globálně tak, aby... (ukojilo hlad, uniklo nebezpečí apod.)

Tyto filosofické rozdíly nás sice nebudou moc zajímat, je ale dobře o nich vědět. V klasické fyzice s její plnou určeností (determinismem) nevedou ke sporu; objektům klasické fyziky nepřisuzujeme svobodnou vůli (resp. pojem „vůle“ není předmětem zkoumání pro fyziku).

9.1.4 Proč tedy tuto novotu?

1. Pomocí principů se některé úlohy řeší názorněji.
2. V případě potřeby můžeme řešit úlohy kvalitativně a nejen kvantitativně.
3. Můžeme hledat přibližná řešení, tedy řešení na jisté (jednoduché) třídě funkcí, do níž přesné řešení eventuálně nepatří.

Ilustrace Uvažme situaci s indexem lomu vzduchu závislým na nadmořské výšce.

Ad 2) Máte určit tvar cesty v nehomogenním prostředí. Z Fermatova principu je (kvalitativně) ihned jasné, že z řidšího vzduchu ve výšce do hustnějšího vzduchu níže se světlo budou pohybovat po trajektorii vypuklé (a), nikoli vydaté (b) či přímé (c). Důkaz tohoto odhadu geometrickou optikou je jistě možný, ale určitě složitější, a tím i méně názorný.

Ad 3) Máme k tomu dodat ilustrativní obrázek do knížky, kde však jednoduchý grafický program umí kreslit jen kruhové oblouky. Na této třídě najdeme Fermatovým principem oblouk minimalizující danou veličinu (dobu). Naproti dosazování do rovnic geometrické optiky by nás nanejvýš přesvědčilo o tom, že žádný kruhový oblouk není přesným řešením úlohy (což jsme věděli už předem taky).

9.2 Rekapitulace vektorové mechaniky

Všude budeme předpokládat analytické funkce s potřebným počtem derivací.

9.2.1 Základní pojmy ve vektorové mechanice

Ve vektorové mechanice (zvané též newtonovská) jsme sledovali v čase t nejprve jedinou částici (hmotný bod, HB) s časově neproměnnou hmotností m a s časově proměnnou polohou

$$\vec{r}(t) \equiv \mathbf{r}(t) = \{x(t), y(t), z(t)\} \quad (9.1)$$

zadanou kartézskými souřadnicemi x, y, z v inerciální vztažné soustavě (1. NZ). Pokud se částice nacházela pod vlivem vnějších⁴ sil s výslednicí $\vec{F}$, pak její pohyb byl popsán pohybovou rovnicí (2. NZ)

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}. \quad (9.2)$$

Ta představuje pro jedinou částici systém tří obyčejných diferenciálních rovnic 2. řádu pro tři neznámé funkce $\vec{r}(t) \equiv (x, y, z)$ s počátečními podmínkami (počátečním stavem) – známou polohou $\vec{r}_0$ a rychlostí $\vec{v}_0$ v čase $t = 0$.

Pro počáteční hodnotu se užívají zápisy např.

$$\vec{r}_0 \equiv \vec{r}_0 \equiv \vec{r}(0) \equiv \vec{r}(t=0) \equiv \vec{r}|_{t=0} \text{ aj.}$$

Konfigurace jediné částice v daném okamžiku t je určena její polohou $\vec{r}(t)$, tedy např. trojicí x, y, z v tomto okamžiku.

♣ Názorně řečeno: konfigurace je to, co poznáme z fotografie.

Stav částice v daném okamžiku t je určen její polohou a rychlostí, tedy $\{\vec{r}(t), \vec{v}(t)\}$.

♣ Stav určuje víc než jen konfigurace. Názorně řečeno: určuje např. vše, co potřebuji jako počáteční podmínku k jednoznačnému vyřešení pohybových rovnic. Zénonův paradox letícího šípů ukazuje, že konfigurace (šíp v určitém místě své dráhy) nepopisuje stav šípů úplně, může mít v tomtéž místě ještě různé rychlosti.

Od jedné částice jsme přešli k soustavě částic a k tělesu (tuhému či deformovatelnému). Síly působící mezi jednotlivými částicemi se stanou vnitřními silami z hlediska soustavy; předpokládáme pro ně zákon akce a reakce (3. NZ). Na pohyb soustavy jako celku (např. na pohyb tuhého tělesa) mají vliv jen vnější síly.

Konfigurace soustavy N částic v daném okamžiku t je určena souborem $\{x_i, y_i, z_i\}_{i=1\dots N}$ poloh všech jejích částic v tomto okamžiku.

Stav soustavy N částic v daném okamžiku t je určen souborem $\{x_i, y_i, z_i, \dot{x}_i, \dot{y}_i, \dot{z}_i\}_{i=1\dots N}$ poloh a rychlostí všech jejích částic v tomto okamžiku.

9.2.2 Analogické pojmy v analytické mechanice

V analytické mechanice vyjdeme také z částic. Jejich polohu však popíšeme výhodněji.

Zobecněné souřadnice jsou proměnné q_i libovolného druhu (např. polární souřadnice) vhodné pro popis konfigurace soustavy.

Pohyb soustavy (časovou změnu konfigurace, chcete-li) pak budeme zjišťovat pomocí vhodného **principu**. Princip budeme hledět formulovat natolik obecně, aby nám umožnil zjistit časový vývoj nejen jediné částice, ale co nejobecnější fyzikální soustavy, např.:

- soustavy částic podrobené dalším podmínkám — vazbám,
- složitěho pákového mechanismu (v něm zobecněnými souřadnicemi budou např. úhly svírané pákami),
- ale třeba i elektromagnetického pole.

⁴U částice samozřejmě nepřicházejí v úvahu vnitřní síly; z hlediska částice jsou všechny síly vnější. Připomínáme to však vzhledem k následujícímu zobecnění na soustavu částic.

Počet F stupňů volnosti (z něm. Freiheitsgraden) je počet spojitě proměnných parametrů nutných a postačujících k popisu polohy soustavy (tj. všech jejích částí). Pro N volných částic v 3D prostoru (= třírozměrném prostoru) je $F = 3N$.

Toto F by nemělo kolidovat se silou $\vec{F}$ (resp. mohlo by kolidovat s její velikostí $F = |\vec{F}|$, ale ta se tu naštěstí nikde nevyskytne). My zde navíc prostý výčet typu $i = 1, \dots, F$ v indexu zapíšeme značkou Φ v indexu, tedy např. namísto $f = f(x_1, x_2, \dots, x_F, \dot{x}_1, \dot{x}_2, \dots, \dot{x}_F)$, zapíšeme stručně $f = f(x_\Phi, \dot{x}_\Phi)$.

Konfigurace soustavy v daném okamžiku t bude určena souborem $\{q_i\}_{i=1\dots F} \equiv \{q_\Phi\}$ těchto parametrů, tedy zobecněných souřadnic (poloh).

Stav soustavy bude určen souborem $\{q_\Phi, \dot{q}_\Phi\}$ zobecněných souřadnic a zobecněných rychlostí anebo ekvivalentními údaji (např. souborem $\{q_\Phi, p_\Phi\}$ zobecněných souřadnic a zobecněných hybností).

Konfigurační prostor Uvažujme N stejných částic, $k = 1 \dots N$. Všechny mají stejnou hmotnost m a k -tá částice má souřadnice

$$X_i^k, \quad i = 1, 2, 3; \quad k = 1, \dots, N. \quad (9.3)$$

Přecházíme postupně souřadnice N bodů ve 3D prostoru na souřadnice jediného bodu v $3N$ -D prostoru, tzv. *konfiguračním prostoru*.

Pak tuto soustavu N částic popíšeme jediným bodem ve $3N$ -rozměrném *konfiguračním prostoru*. Pohybové rovnice zůstávají formálně stejné:

$$F_i = m\ddot{x}_i, \quad (9.4)$$

jen i probíhá do 1 do $3N$.

↔ Definici konfiguračního prostoru později, v 9.3.4, zobecníme pro případ soustavy s vazbami. Konfigurační prostor bude mít vždy právě tolik rozměrů, kolik má soustava stupňů volnosti.

♣ Napište explicitně tvar transformace rov. (9.3).

$$\text{Řešení: } x_j = X_i^k, \quad j = 3(k-1) + i.$$

9.3 Vazby, zobecněné souřadnice

9.3.1 Vazba

Vazba popisuje omezení kladené na polohu nebo pohyb částic.

Příklad 1: Dva body ležící oba na povrchu koule o poloměru R a současně si zachovávající od sebe vzdálenost a . Soustava je popsána třemi vazbami:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - R^2 = 0; \quad (9.5)$$

$$x_4^2 + x_5^2 + x_6^2 - R^2 = 0; \quad (9.6)$$

$$(x_1 - x_4)^2 + (x_2 - x_5)^2 + (x_3 - x_6)^2 - a^2 = 0. \quad (9.7)$$

Vazby jsme zapsali ve tvaru $\varphi_k(x_j) = 0$. Každá z nich definuje podprostor dimenze $N - 1$ (nádplachu). Bod určující v konfiguračním prostoru konfiguraci systému se tedy pohybuje jen po průsečnici nadplach zobrazujících jednotlivé vazby.

Příklad 2: Pohyb v rovině, kdy rychlost ve směru x je vždy dvojnásobek rychlosti ve směru y :

$$\begin{aligned} v_x &= 2v_y & \text{neboli} \\ dx - 2dy &= 0 \end{aligned} \quad (9.8)$$

Příklad 3: K smrti vyděšená myš běžící kamkoliv maximální možnou rychlostí $v(t)$:

$$(dx)^2 + (dy)^2 - (v(t) dt)^2 = 0 \quad (9.9)$$

9.3.2 Typy vazeb

Vazby klasifikujeme z různých hledisek:

- **rovnost $\times$ nerovnost**

Vazba *oboustranná*, např.:

$$\varphi(x_\Phi) = 0, \quad (9.10)$$

Bod je vázán na nadplochu, „nemůže z ní ven“. Tohoto typu jsou vazby v př. 1, 2, 3.

Vazba *jednostranná*, např.:

$$\varphi(x_\Phi) \geq 0, \text{ resp. } \varphi(x_\Phi) \leq 0, \quad (9.11)$$

Bod se může pohybovat po jisté ploše a nad ní, nikoli však pod ní (anebo obráceně).

- **závislost na čase**

Vazba *skleronomní* nezávisí explicitě na čase t , např.:

$$\varphi(x_\Phi) = 0 \text{ nebo } \varphi(x_\Phi, \dot{x}_\Phi) = 0. \quad (9.12)$$

Tohoto typu jsou vazby v př. 1, 2, 3. Skleronomní vazba nemění energii částice v časově nezávislých silových polích.

Vazba *reonomní* obsahuje explicitní závislost na čase, např.:

$$\varphi(x_\Phi, t) = 0 \quad (9.13)$$

Vazba se s časem mění (např. bod na nafukovaném míči). Tomu by např. odpovídalo, kdyby se v př. 1 s časem měnila vzdálenost a bodů, tedy $a = a(t)$, nebo koule s časem měnila svůj poloměr: $R = R(t)$. Taková vazba může měnit energii částice i v časově nezávislých silových polích.

- **závislost na souřadnicích $\times$ na diferenciálech souřadnic (a času)**

Vazba *holonomní* obsahuje jenom souřadnice, např.

$$\varphi(x_\Phi, t) = 0 \text{ nebo } \varphi(x_\Phi, \dot{x}_\Phi, t) = 0. \quad (9.14)$$

Omezuje polohu částice. Tohoto typu je vazba v př. 1.

Vazba *neholonomní* obsahuje i diferenciály souřadnic, tedy obecně

$$\varphi(x_\Phi, dx_\Phi, t, dt) = 0. \quad (9.15)$$

Omezuje tedy explicitě nikoli polohu, ale směr pohybu (dx/dy) nebo jeho rychlost (dx/dt). (Nesnižuje proto počet stupňů volnosti.) To jsou vazby z př. 2 a 3.

Smysl mají jen vazby převeditelné na homogenní formu (řádu L) v diferenciálech. Obsahuje-li vazba dt , pak jejím vydělením $(dt)^L$ získáme vazbu obsahující složky rychlosti $\dot{x}_i^L$ namísto diferenciálů; neobsahuje-li, pak podobným způsobem dostaneme vazbu omezující jen směr pohybu (tj. dx_i/dx_k) v daném bodě. Vazba z př. 2 je stupně $L = 1$, v př. 3 stupně $L = 2$.

Připomeňme, že lineární forma v diferenciálech se nazývá *Pfaffova forma*:

$$\mathring{d}F = \sum_{k=1}^n a_k(x_\Phi) dx_k = \sum_{k=1}^n a_k dx_k, \text{ příp. } \sum_{k=1}^n a_k(x_\Phi, t) dx_k + b(x_\Phi, t) dt = \sum_{k=1}^n a_k dx_k + b dt \quad (9.16)$$

Pro rozlišení od totálního diferenciálu se značí přeškrtnutým $\mathring{d}$, např. v termodynamice

$$\mathring{d}Q = dU + p dV \quad (9.17)$$

Vnitřní energie U a objem V jsou zde nezávislé stavové proměnné, tlak $p(U, V)$ je stavovou funkcí těchto proměnných. Neexistuje však stavová veličina Q , jejímž totálním diferenciálem by byl výraz (9.17). Existuje jen dějová veličina

$$Q = \int_{\Gamma} \mathrm{d}Q = \int_{\Gamma} (\mathrm{d}U + p \mathrm{d}V) \quad (9.18)$$

jehož hodnota však závisí na integrační dráze (křivce) Γ v prostoru proměnných U, V . Fyzikálně řečeno, teplo Q je proto dějová veličina (daná dějem), nikoli stavová (daná stavem).

Neholonomní vazby probereme podrobněji v následujícím odstavci.

9.3.3 $\leftrightarrow$ Neholonomní vazby integrabilní a neintegrabilní

Celý tento odstavec přeskočte při prvním čtení.

Každou holonomní vazbu můžeme snadno převést na „neholonomní“, konkrétně na anulovanou Pfaffovu formu tím, že vytvoříme její diferenciál. Tak např. z holonomní vazby

$$f(x_{\Phi}) = 0 \quad (9.19)$$

tím vznikne vazba

$$\sum_k \left(\frac{\partial f}{\partial x_k} \right)_{x_{\Phi}} \mathrm{d}x_k = \sum_k A_k \mathrm{d}x_k = 0. \quad (9.20)$$

Je to triviální, protože omezíme-li pohyb na plochu, omezíme tím i možné směry pohybu (a to na směry tečné k této ploše).

Vazba 9.20 omezuje podobně jako původní holonomní vazba 9.19, je však obecnější: je ekvivalentní vazbě

$$f(x_{\Phi}) = C$$

s libovolnou na x_k nezávisící konstantou C na pravé straně. Proto se vazbě tohoto typu říká neholonomní vazba **integrabilní** nebo také **pseudoholonomní**.

Obrácený postup je však možný jen někdy: ne každá vazba popsaná anulovanou Pfaffovou formou je integrabilní, tj. převeditelná na holonomní s vhodnou integrační konstantou. Závisí přitom podstatně na počtu proměnných:

1. V případě jediné proměnné je jediná možnost: neholonomní vazba je vždy diferenciálem, tedy pro každou $f(x)$ existuje taková $F(x)$, že platí

$$f(x) \mathrm{d}x = \mathrm{d}F(x).$$

($F(x)$ je primitivní funkce k $f(x)$.)

2. V případě dvou proměnných jsou dvě možnosti. Neholonomní vazba
 - 2a) buď je totálním diferenciálem (jako u jedné proměnné), tedy pro ni platí

$$f(x, y) \mathrm{d}x + g(x, y) \mathrm{d}y = \mathrm{d}F(x, y), \quad (9.21)$$

čili existuje funkce $F(x, y)$ taková, že

$$f(x, y) = \frac{\partial F(x, y)}{\partial x}, \quad (9.22)$$

$$g(x, y) = \frac{\partial F(x, y)}{\partial y}. \quad (9.23)$$

- 2b) anebo má vazba **integrační faktor** λ , tj. existuje funkce $\lambda(x, y)$ taková, že vazba

$$f(x, y) \mathrm{d}x + g(x, y) \mathrm{d}y = 0 \quad (9.24)$$

sice nemá tvar $\mathrm{d}F(x, y) = 0$, ale získá ho po vynásobení λ :

$$\lambda(x, y) \cdot f(x, y) \mathrm{d}x + \lambda(x, y) \cdot g(x, y) \mathrm{d}y = \mathrm{d}F(x, y), \quad (9.25)$$

neboli existují funkce $F(x, y)$, $\lambda(x, y)$ takové, že

$$\lambda(x, y) \cdot f(x, y) = \frac{\partial F(x, y)}{\partial x}, \quad (9.26)$$

$$\lambda(x, y) \cdot g(x, y) = \frac{\partial F(x, y)}{\partial y}. \quad (9.27)$$

Všechny až doposud popsané vazby nazýváme *integrabilní*.

3. V případě třech a více proměnných existuje vedle uvedených typů navíc možnost, že vazba není integrabilní, tj. neexistují funkce $F(x, y, z)$ a $\lambda(x, y, z)$ takové, aby

$$\lambda(x, y, z) \cdot f(x, y, z) = \frac{\partial F(x, y, z)}{\partial x}, \quad (9.28)$$

$$\lambda(x, y, z) \cdot g(x, y, z) = \frac{\partial F(x, y, z)}{\partial y}, \quad (9.29)$$

$$\lambda(x, y, z) \cdot h(x, y, z) = \frac{\partial F(x, y, z)}{\partial z}. \quad (9.30)$$

Prototyp neintegrabilní vazby ve 3 proměnných x, y, z je

$$x \, dy + dz = 0 \quad (9.31)$$

a naopak na tento tvar lze vhodnou volbou nových proměnných lokálně převést libovolnou neintegrabilní neholonomní vazbu ve 3 proměnných.

Obecně platí, že pro n proměnných lze libovolnou anulovanou Pfaffovu formu převést vhodnou transformací $x_i \rightarrow y_j$, tj. $y_j = y_j(x_1, \dots, x_n)$ na tvar

$$y_1 \, dy_2 + y_3 \, dy_4 + \dots + y_{n-1} \, dy_n = 0 \quad \text{pro sudé } n, \quad (9.32)$$

$$y_1 \, dy_2 + y_3 \, dy_4 + \dots + dy_n = 0 \quad \text{pro liché } n. \quad (9.33)$$

Pro $n \geq 3$ je tato forma neintegrabilní.

9.3.4 Zobecněné souřadnice

Zobecněné souřadnice jsou libovolné spojitě parametry q_i popisující polohu bodu v konfiguračním prostoru. Zpravidla je vybereme tak, aby poslední z nich (s indexy $i = n + 1, \dots, 3N$) identicky splňovaly vazby a počítáme pak jen s ostatními, tj. s prvními n souřadnicemi.

Příklad: Uvažujme 2 body vázané na povrch koule jako v odst.9.3.1; zřejmě platí $N = 2$ a $n = 2 * 3 - 3 = 3$ (jsou 3 vazby pro 6 proměnných). Zvolíme sférické souřadnice r_i, θ_i, φ_i ; $i = 1, 2$. Označíme potom např.

$$q_1 = \theta_1, \quad q_2 = \theta_2, \quad q_3 = \varphi_1, \quad q_4 = \varphi_2, \quad q_5 = r_1 - R, \quad q_6 = r_2 - R.$$

Díky vazbám rov. (9.5), (9.6) bude identicky

$$q_5 = 0 \quad (9.34)$$

$$q_6 = 0 \quad (9.35)$$

a zbývá ještě vazba rov. (9.7) vedoucí na vztah

$$\sin q_1 \sin q_2 \cos(q_3 - q_4) + \cos q_1 \cos q_2 + K = 0, \quad (9.36)$$

kde značíme $a^2/2R^2 - 1 = K$; vhodnou volbou jiného tvaru zobecněných souřadnic q_3, q_4 by ho rovněž šlo splnit automaticky formou $q_4 = 0$, čímž by zbyly tři nezávislé zobecněné souřadnice q_1, q_2, q_3 .

↔ Není cílem zde dořešit tuto úlohu a formulovat tuto závislost; stačí, když čtenář nahlédne, jak by to šlo dořešit. Přirovnáme-li oba body ke dvěma lodím na oceánu, pak q_1, q_2 určují polohu první lodi; je-li kdekoli kromě severního a jižního pólu, lze polohu druhé lodi vzdálené o a jednoznačně určit např. orientovaným úhlem φ_{12} od severního směru ke druhé lodi. Tento úhel může sloužit jako poslední zobecněná souřadnice q_3 .

9.3.5 Zobecněné rychlosti

Zobecněné rychlosti definujeme předpisem

$$\dot{q}_i \equiv \frac{dq_i}{dt}. \quad (9.37)$$

Zobecněné hybnosti p_i definujeme *nikoli* jako $m\dot{q}_i$, ale složitěji, viz odst. 9.6.6.

9.3.6 Označení prostorů

Uvažujme soustavu N částic podrobených V holonomním vazbám a mající tedy n stupňů volnosti. Zavedeme několik označení:

konfigurační prostor je n -rozměrný prostor $\mathcal{M}(q_i)$ všech zobecněných souřadnic q_i . Konfiguraci soustavy s n stupni volnosti lze popsat bodem v tomto prostoru;

rychlostním prostorem zde nazýváme n -rozměrný prostor $\mathcal{M}(\dot{q}_i)$ všech zobecněných rychlostí $\dot{q}_i$;

hybnostním prostorem zde nazýváme n -rozměrný prostor $\mathcal{M}(p_i)$ všech zobecněných hybností p_i . Zobecněnou hybnost zavedeme až v odst. 9.6.6;

stavový prostor (též **rychlostní fázový prostor**) je $2n$ -rozměrný prostor $\mathcal{M}(q_i, \dot{q}_i)$, který je přímým součinem konfiguračního a rychlostního prostoru. Stav systému lze popsat bodem v tomto prostoru. (Na stavovém prostoru je např. definován lagranžian z kap.9.6.4);

fázový prostor (též **hybnostní fázový prostor**) je $2n$ -rozměrný prostor $\mathcal{M}(q_i, p_i)$, který je přímým součinem konfiguračního prostoru a hybnostního prostoru (odst. 9.6.6). Stav systému lze rovněž popsat bodem v tomto prostoru. Tento prostor má hlubší význam než stavový prostor a lépe vystihuje různé symetrie a zákony zachování (např. tzv. Liouvillův teorém, podle něhož se skupina bodů ve fázovém prostoru pohybuje jako nestlačitelná kapalina). Na tomto prostoru je např. definován hamiltonián z kap.9.6.7.

9.3.7 Zahnutí vazeb do mechaniky

Uvažujme soustavu N částic s V holonomními vazbami, mající tedy $F = 3N - V$ stupňů volnosti. Vazby lze vystihnout

- tzv. *vazbovými* silami (pohyb je pak popsán $3N + V$ rovnicemi, totiž $3N$ Lagrangeovými rovnicemi 1. druhu a V rovnicemi vazeb);
- použitím *zobecněných souřadnic* q_i , vystihujících vazbu automaticky (pohyb je pak popsán F Lagrangeovými rovnicemi 2. druhu). Vazby jsou dány V vztahy $q_{n+i} = 0$ pro $i = 1, \dots, V$.

9.4 Lagrangeovy rovnice 1. druhu

Chceme-li vystihnout vazbu „newtonovsky“, tedy silou (*vazbová síla*), pak tato síla

- musí udržet částici v souladu s vazbovou podmínkou
- nesmí konat práci (urychlovat nebo brzdit částici).

Řešení: má-li vazba tvar $f(x_\Phi) = 0$, musí být vazbová síla $F^{(v)}(x_\Phi)$ kolmá k vazbou definované nadploše (pak nekoná práci), tedy mít směr gradientu: $F^{(v)} = \lambda \mathbf{grad} f$. Funkci $\lambda(x_\Phi)$ vypočteme dodatečně tak, aby opravdu částice na vazbě $f(x_\Phi) = 0$ zůstala.

Např. pro 1 bod v 3D prostoru a 1 vazbu ($3 - 1 = 2$ stupně volnosti) máme $3 + 1 = 4$ neznámé: x_1, x_2, x_3, λ a pro ně 4 rovnice:

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_1 &= F_1 + F_1^{(v)} = F_1 + \lambda \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ m\ddot{x}_2 &= F_2 + F_2^{(v)} = F_2 + \lambda \frac{\partial f}{\partial x_2} \\ m\ddot{x}_3 &= F_3 + F_3^{(v)} = F_3 + \lambda \frac{\partial f}{\partial x_3} \\ f(x_1, x_2, x_3) &= 0 \end{aligned}$$

Názorně: otec usměrňuje neposedného synka na cestičku v parku: buď mu přikove na nožičku kroužek, kterým prochází tyč křivá tak, jak se vine cestička (realizace vazby), anebo bude synek volný, ale budou mu z boku uštěďrovány impulzy kolmé k cestičce (aby ho nezrychlovaly či nezbzpomalovaly), a silné tak akorát, aby ho navrátily na cestu pravou.

9.5 Princip virtuální práce

9.5.1 Statika

Pro volnou částici bylo podmínkou rovnováhy $\vec{F} = \vec{0}$. To lze říci tak, že při libovolném *virtuálním posunutí* $\delta\vec{r}$ je vykonaná *virtuální práce* δW rovna nule:

$$\delta W = \vec{F} \cdot \delta\vec{x} = 0.$$

Takto formulujeme princip virtuální práce (zvaný též *princip virtuálních posunutí*) i při vázané částici, kde již $\delta\vec{r}$ nejsou libovolná, ale vyhovují vazbovým podmínkám. Je-li např. 1 částice v 3D podrobena 2 vazbám f, g , platí:

$$\begin{aligned} F_1\delta x_1 + F_2\delta x_2 + F_3\delta x_3 &= 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x_1}\delta x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}\delta x_2 + \frac{\partial f}{\partial x_3}\delta x_3 &= 0 \\ \frac{\partial g}{\partial x_1}\delta x_1 + \frac{\partial g}{\partial x_2}\delta x_2 + \frac{\partial g}{\partial x_3}\delta x_3 &= 0 \end{aligned}$$

Jak ukážeme ekvivalenci těchto rovnic Lagrangeovým rovnicím 1. druhu? Můžeme např. „dřevorubecky“ z poslední rovnice vyjádřit δx_3 pomocí δx_2 a δx_1 , dosadit do první a druhé rovnice, pak z poslední rovnice vyjádřit δx_2 pomocí δx_1 a dosadit do první rovnice. Při troše smůly však může náhodný výběr rovnic a eliminovaných proměnných δx_i selhat (např. zde, pokud by v třetí rovnici náhodou bylo $\frac{\partial g}{\partial x_3} = 0$). Obecnější je proto symetrický postup užívající *Lagrangeových multiplikátorů*: druhou rovnici vynásobíme zatím neznámým λ , třetí μ a sečteme:

$$\left(F_1 + \lambda \frac{\partial f}{\partial x_1} + \mu \frac{\partial g}{\partial x_1}\right) \delta x_1 + \left(F_2 + \lambda \frac{\partial f}{\partial x_2} + \mu \frac{\partial g}{\partial x_2}\right) \delta x_2 + \left(F_3 + \lambda \frac{\partial f}{\partial x_3} + \mu \frac{\partial g}{\partial x_3}\right) \delta x_3 = 0.$$

Nyní naopak ponecháme libovolná δx_i a určíme λ, μ tak, aby všechny tři závorky vymizely.

Při postupu užitím principu virtuální práce se prostě zabýváme jen takovým virtuálním posunutím, které respektuje vazby. Sestavení rovnic je pak mnohem snadnější a přehlednější.

Příklady: Rovnováha na páce. Člověk v kleci držící sebe sama přes kladku.

9.5.2 Dynamika; d'Alembertův princip

Vzhledem k tomu, že pohyb a klid jsou pojmy relativní, závislé na volbě vztažné soustavy, nečiní problémy „roztáhnout platnost“ principu virtuální práce i do dynamiky, prostě zavedením členu vystihujícího v dynamice účinek (časového) působení síly. Síla prostě vyvolá zrychlení: $m\vec{a} = \sum \vec{F}$, nový člen přeneseme k síle jako novou, *kinematickou sílu*. Výslednou sílu – součet sil skutečných a síly kinematické – nazveme *silou efektivní*. Princip tedy bude mít tvar

$$(\vec{F} + \vec{F}_{kin}) \cdot \delta\vec{x} = (\vec{F} - m\vec{\ddot{x}}) \cdot \delta\vec{x} = 0.$$

V tomto tvaru se nazývá *principem d'Alembertovým*:

Soustava se pohybuje tak, aby práce efektivních sil byla rovna nule.

Výraz $(-m\vec{a})$ zde nazýváme silou kinematickou (Brdička-Hladík). Různí autoři užívají i různé názvy: síla setrvačná, inerciální, fiktivní, zdánlivá apod., též „setrvačný odpor“. Někteří autoři dále takto nazývají nikoli výraz $-m\vec{a}$, ale $+m\vec{a}$. Při studiu podle jiné literatury je potřeba tyto nejednotnosti vzít v úvahu.

9.6 Lagrangeovy rovnice 2. druhu. Hamiltonovy rovnice

9.6.1 Zákon zachování energie

Předpokládejme, že síla působící v soustavě částic má potenciál a lze tedy najít skalární funkci $U(x_\Phi)$ tak, že síla je jejím záporně vzatým gradientem: $\vec{F} = -\mathbf{grad} U$, resp. složkově $F_i = -\partial U(x_\Phi)/\partial x_i$. Potom z pohybových rovnic v kartézských souřadnicích lze po skalárním vynásobení rychlostí $d\vec{r}/dt \equiv \vec{v}$ odvodit zákon zachování (mechanické) energie E_0 :

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = -\mathbf{grad} U \quad (\text{tedy 2. NZ}) \quad (9.38)$$

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = -\mathbf{grad} U \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} \quad (9.39)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m \vec{v} \cdot \vec{v} + U \right) = 0 \quad (9.40)$$

$$T + U = \text{const} \equiv E_0, \quad (9.41)$$

kde $T = \frac{1}{2} m \vec{v} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} m v^2$ je kinetická a U potenciální energie systému.

9.6.2 Lagrangeovy rovnice 2. druhu v kartézských souřadnicích

Zavedme *Lagrangeovu funkci* (*lagranžián*) $L = T - U$, resp. $L(x_\Phi, v_\Phi) = T(v_\Phi) - U(x_\Phi)$. Pak platí

$$\partial L / \partial v_i = \partial T / \partial v_i = m v_i \quad (9.42)$$

$$\partial L / \partial x_i = -\partial U / \partial x_i = -F_i \quad (9.43)$$

a Newtonův zákon rov. (9.38) lze zapsat ve tvaru *Lagrangeových rovnic 2. druhu v kartézských souřadnicích*

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial v_i} \right)_{x_\Phi, v_\Phi} - \left(\frac{\partial L}{\partial x_i} \right)_{x_\Phi, v_\Phi} = 0 \quad (9.44)$$

9.6.3 Lagrangeovy rovnice 2. druhu v zobecněných souřadnicích

Rov. (9.44) zachovávají svůj tvar, i když od kartézských souřadnic x_i a rychlostí $v_i = \dot{x}_i \equiv dx_i/dt$ přejdeme k zobecněným souřadnicím $q_j = q_j(x_\Phi)$ a zobecněným rychlostem $\dot{q}_j = dq_j/dt$. Abychom to dokázali, vyjádříme nejprve

$$q_j = q_j(x_\Phi), \quad \dot{q}_j = \dot{q}_j(\dot{x}_\Phi, x_\Phi)$$

a explicitě rozepíšeme

$$\dot{q}_j = \frac{dq_j}{dt} = \sum_i \frac{\partial q_j}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt} = \sum_i \frac{\partial q_j}{\partial x_i} \dot{x}_i;$$

odtud plyne „krácení tečkou“

$$\frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \dot{x}_i} = \frac{\partial q_j}{\partial x_i}.$$

Zapišeme znovu Lagrangeovu rovnici rov. (9.44) s tím, že nový lagranžián $\mathcal{L}$ bude funkcí zobecněných souřadnic q_j a rychlostí $\dot{q}_j$ a jenom jejich prostřednictvím funkcí kartézských souřadnic x_i a rychlostí v_i . Bude tedy $\mathcal{L} = \mathcal{L}(q_\Phi, \dot{q}_\Phi)$, přičemž platí

$$L(x_\Phi, \dot{x}_\Phi) = \mathcal{L} \left(q_\Phi(x_\Phi), \dot{q}_\Phi(x_\Phi, \dot{x}_\Phi) \right)$$

Derivacemi $\mathcal{L}$ jako složené funkce odvodíme (toto si prosím *opravdu* zkuste a pište, nejen čtete!):

$$0 = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial v_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial x_i} \quad (9.45)$$

$$= \frac{d}{dt} \sum_j \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial v_i} \right) - \sum_j \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial x_i} - \sum_j \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} \frac{\partial q_j}{\partial x_i} \quad (9.46)$$

$$= \sum_j \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \frac{\partial q_j}{\partial x_i} \right) - \sum_j \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial x_i} - \sum_j \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} \frac{\partial q_j}{\partial x_i} \quad (9.47)$$

$$= \sum_j \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \right) \frac{\partial q_j}{\partial x_i} + \sum_j \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial q_j}{\partial x_i} \right) - \sum_j \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial x_i} - \sum_j \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} \frac{\partial q_j}{\partial x_i} \quad (9.48)$$

$$= \sum_j \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \right) \frac{\partial q_j}{\partial x_i} + \sum_j \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial x_i} - \sum_j \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial x_i} - \sum_j \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} \frac{\partial q_j}{\partial x_i} \quad (9.49)$$

$$= \sum_j \left(\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} \right) \frac{\partial q_j}{\partial x_i}, \quad (9.50)$$

odkud plyne výsledek ve tvaru *Lagrangeových rovnic 2. druhu*

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} = 0, \quad \text{q. e. d.}$$

Tyto rovnice jsou tedy pohybovými rovnicemi vhodnými pro práci v zobecněných souřadnicích.

9.6.4 Lagranžián

Lagranžián⁵ $\mathcal{L} = T - U$ je funkcí zobecněných souřadnic q_i a rychlostí $\dot{q}_i$; může být případně i explicitě funkcí času t (např. pro časově proměnná pole):

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(q_\Phi, \dot{q}_\Phi, t).$$

Dosazením konkrétního pohybu $q = q(t)$ a $\dot{q} = \dot{q}(t)$ by se lagranžián stal funkcí $\mathcal{L}'$ samotného času:

$$\mathcal{L}' = \mathcal{L}'(t) = \mathcal{L}(q_\Phi(t), \dot{q}_\Phi(t), t) \quad (9.51)$$

Obvykle ovšem nerozlišujeme typograficky L , $\mathcal{L}$ a $\mathcal{L}'$; lagranžián značíme prostě L , ať je funkcí jakýchkoliv proměnných. Je-li to potřeba, vyplyne typ proměnných z kontextu.

9.6.5 Hamiltonův princip, princip minimální akce

V matematice (variační počet) se dokazuje následující tvrzení:

Nechť je dán funkcionál

$$A = \int_{t_1}^{t_2} L(q_\Phi(t), \dot{q}_\Phi(t), t) dt. \quad (9.52)$$

Zadáme-li konkrétní funkce $q_i(t)$, popisující pohyb částic s časem, spočteme-li jejich derivace $\dot{q}_i(t)$ a dosadíme-li je do rov. (9.52), dostaneme konkrétní číslo. Mezi všemi funkcemi $\vec{q}(t)$ nabývajících téže hodnoty $\vec{Q}_1$ v čase t_1 a hodnoty $\vec{Q}_2$ v čase t_2 nabývá integrál A minimální hodnotu pro tu funkci $\vec{q}(t)$, pro niž platí rovnice

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0.$$

Obráceně tedy: skutečný pohyb se děje tak, aby integrál A byl minimální. Tento integrál $\int L dt$ má ve fyzice význam akce, odtud název „princip minimální akce“.

⁵někdy se píše lagrangián

9.6.6 Zobecněné hybnosti. Fázový prostor

Definitivně zavádíme zobecněnou hybnost p_i vztahem

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \quad \text{resp.} \quad p_i = \frac{\partial L(q_\Phi, \dot{q}_\Phi)}{\partial \dot{q}_i} \quad (9.53)$$

(tedy nikoli jako $m\dot{q}_i$). Snadno se přesvědčíme, že přechází v „obyčejnou“ hybnost, má-li kinetická energie tvar $T = \frac{1}{2}m \sum \dot{q}_i^2$). Takto definované hybnosti by byly funkcí zobecněných souřadnic a zobecněných rychlostí. Můžeme však také postupovat obráceně; od dvojic nezávislých veličin $q_i, \dot{q}_i$ a funkcí $p_i = p_i(q_\Phi, \dot{q}_\Phi)$ přejít ke dvojici nezávislých veličin q_i, p_i a k funkcím $\dot{q}_i = \dot{q}_i(q_\Phi, p_\Phi)$.

Analogicky výraz $\frac{\partial L}{\partial q}$ nazýváme k -tou složkou zobecněné síly. (Rozmyslete si znaménko!)

$2F$ -rozměrný prostor $\{q_\Phi, p_\Phi\}$ nazýváme, jak již víme z (9.3.6), *fázovým prostorem*. Např. 10 částic bez vazeb je popsáno jedním bodem v 60-rozměrném fázovém prostoru; 10 částic s 1 vazbou je popsáno jedním bodem v 58-rozměrném fázovém prostoru.

9.6.7 Hamiltonovy rovnice

Pohybové rovnice získají symetričtější tvar, vyjádříme-li je nikoli v zobecněných souřadnicích q_i a zobecněných rychlostech $\dot{q}_j$, ale v zobecněných souřadnicích q_i a zobecněných hybnostech p_j . Při přechodu k novým proměnným použijeme tzv. Legendreovu duální transformaci: místo funkce $L(q_\Phi, \dot{q}_\Phi)$ zavedeme novou funkci – *hamiltonián* $H(q_\Phi, p_\Phi)$ vztahem

$$H(q_\Phi, p_\Phi) = \sum_k p_k \dot{q}_k - L(q_\Phi, \dot{q}_\Phi),$$

kde na pravé straně dosadíme systematicky $\dot{q}_m = \dot{q}_m(q_\Phi, p_\Phi)$ tak, aby i pravá strana byla funkcí jen proměnných p_Φ, q_Φ a nikoli $\dot{q}_\Phi$. Pro názornost – úplně rozepsáno:

$$H(q_\Phi, p_\Phi) = \sum_k p_k \dot{q}_k(q_\Phi, p_\Phi) - L(q_\Phi, \dot{q}_\Phi(q_\Phi, p_\Phi))$$

Určíme nyní $\partial H / \partial q_i$ a $\partial H / \partial p_i$ s využitím Lagrangeových rovnic, definičního vztahu $\partial L / \partial \dot{q}_k = p_k$ a relace $\partial p_i / \partial p_j = \delta_{ij}$:

$$\frac{\partial H}{\partial q_i} = \sum_j \left(\frac{\partial p_j}{\partial q_i} \dot{q}_j + p_j \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial q_i} - \frac{\partial L}{\partial q_j} \frac{\partial q_j}{\partial q_i} - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \frac{\partial \dot{q}_k}{\partial q_i} \right) = p_j \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial q_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} - p_k \frac{\partial \dot{q}_k}{\partial q_i} = -\frac{\partial L}{\partial q_i} = -\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) = -\frac{dp_i}{dt}$$

$$\frac{\partial H}{\partial p_i} = \frac{\partial p_j}{\partial p_i} \dot{q}_j + p_j \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial p_i} - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \frac{\partial \dot{q}_k}{\partial p_i} = \delta_{ji} \dot{q}_j + p_j \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial p_i} - p_k \frac{\partial \dot{q}_k}{\partial p_i} = \dot{q}_i \equiv \frac{dq_i}{dt}$$

Soustava $2F$ diferenciálních rovnic 1. řádu

$$\frac{\partial H}{\partial q_i} = -\frac{dp_i}{dt} \quad ; \quad \frac{\partial H}{\partial p_i} = \frac{dq_i}{dt}$$

se nazývá Hamiltonovy rovnice a představuje pohybové rovnice v $2F$ -rozměrném fázovém prostoru, tvořeném F souřadnicemi q_i a F souřadnicemi p_i (tj. zobecněnými souřadnicemi a jim příslušnými zobecněnými hybnostmi).

9.6.8 Názorný význam hamiltoniánu

$H(p, q) = \sum_i p_i \dot{q}_i - T + U = \sum \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - T + U = \sum \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - T + U$; pokud je kinetická energie T homogenní kvadratickou funkcí rychlostí a potenciální energie U na rychlostech nezávisí, je suma rovna $2T$ a platí, že hamiltonián $H = T + U$ je roven celkové mechanické energii soustavy.

9.7 Kanonické transformace

9.8 Hamiltonova-Jacobiho rovnice

XXX

9.9 Přednosti analytického přístupu

Řešení úlohy metodami analytické mechaniky může mít specifické výhody.

- Popis pomocí zobecněných souřadnic lze jednoduše použít na mnohem větší třídu úloh než zobecnění soustavy částic řešených vektorovou mechanikou.
- Variační principy umožňují nejen nalezení (skutečného) řešení, ale také nalezení nejlepší aproximace řešení na třídě funkcí, a to i takové, v níž skutečné řešení neleží. Máme-li např. šikmý vrh (po parabole) aproximovat obloukem kružnice, může nás vektorová mechanika jen ujistit, že žádný náš návrh není řešením pohybových rovnic (což víme taky, jen nevíme, který z našich návrhů je špatný a který ještě horší). Naproti tomu variační princip hledající např. minimum akce ukáže, která z uvažovaných funkcí $q(t)$ je onen jednooký mezi slepými.
- Vycházíme-li ze známé jednoduché úlohy a chceme-li ji zobecnit tak, aby postihla i náš, složitější případ, pak ve vektorové mechanice např. můžeme zkusit zobecnit tvar působících sil; ovšem síla je vektor (a zde v $3N$ -rozměrném prostoru) a zobecnění jedné složky může vyžadovat jisté změny i ostatních složek z důvodů vnitřní konzistence, symetrií apod. Naproti tomu zobecnění skalárního lagranžianu či hamiltonianu je podstatně jednodušší mj. právě tím, že toto nebezpečí nehrozí: zobecňujeme jedinou funkci.

Příloha A

Keplerova úloha – problém dvou těles

2016-09-03

A.1 Formulace úlohy

A.1.1 Cíl

Chceme vyšetřit v rámci klasické mechaniky pohyb planety, např. Země, v naší sluneční soustavě. Jako jedinou sílu budeme uvažovat gravitační interakci mezi Zemí a Sluncem.

A.1.2 Co záměrně zanedbáme

Vědomě přitom zanedbáme řadu dalších okolností:

- veškeré relativistické jevy;
- ve sluneční soustavě jsou i jiné planety než Země a působí gravitačně na Zemi i na Slunce;
- Zemi obíhá Měsíc;
- ve sluneční soustavě jsou i jiné objekty než Slunce a planety (komety, asteroidy, meziplanetární hmota, ...) ;
- Slunce i Země jsou nepravidelná tělesa;
- Slunce i Země rotují kolem vlastních os;
- ani Slunce, ani Země nejsou tuhá tělesa: Slunce je celé plynné, Země je pokryta oceány a ovzduším a má tekutý vnitřek;
- ...

A.1.3 Vztah k reálné situaci

Budeme se zabývat nejjednodušším případem, a to soustavou složenou ze dvou bodových objektů – hmotných bodů B_1 , B_2 . K tomu nás opravňují tyto skutečnosti:

- Zemi i Slunce můžeme „stáhnout do bodu“ proto, že gravitační pole po vrstvách homogenní koule (ať je v klidu nebo ať rotuje) je v klasické mechanice stejné jako gravitační pole hmotného bodu;
- vlastní rozměry jak Slunce (poloměr $0,7 \times 10^9 \text{ m}$), tak i Země ($0,006 \times 10^9 \text{ m}$) jsou zanedbatelné ve srovnání se vzdáleností Země – Slunce ($150 \times 10^9 \text{ m}$).

A.1.4 Další možný rozvoj teorie

Dalším krokem by bylo uvážit gravitační interakci planet navzájem (včetně pohybu Slunce kolem společného těžiště) jakožto *poruchu* a doplnit poruchové, tzv. sekulární členy (lat. saeculum = století, dlouhé pro člověka, ale přesto zanedbatelné oproti věčnosti).

Mohli bychom také přejít na obecnou teorii relativity; postihli bychom s ní i nepatrnou část stáčení perihela Merkura (43" za století), která zbývá po započtení všech vlivů klasických (5 557" za století) do pozorované hodnoty (5 600" za století). To je ovšem daleko vně rámce našich zájmů zde.

A.2 Problém dvou těles – Keplerova úloha

Vyšetříme pohyb dvou hmotných bodů B_1, B_2 o hmotnostech m_1, m_2 a polohových vektorech $\vec{r}_1, \vec{r}_2$ pod vlivem vzájemného gravitačního přitahování. Vycházíme z Newtonových pohybových rovnic

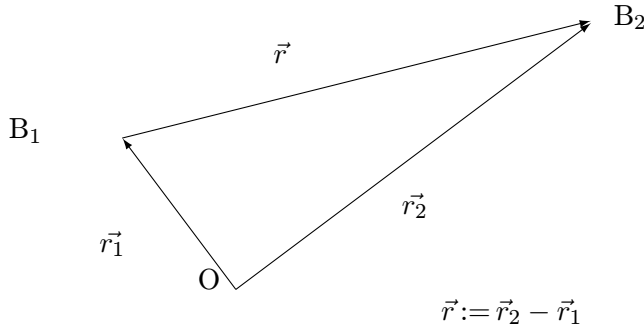
$$m_1 \ddot{\vec{r}}_1 = \vec{F}_{12} \quad (\text{A.1})$$

$$m_2 \ddot{\vec{r}}_2 = \vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12} \quad (\text{A.2})$$

doplňených Newtonovým gravitačním zákonem

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2}, \quad (\text{A.3})$$

kde $G \approx 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$ je gravitační konstanta. Zavedeme relativní polohový vektor $\vec{r}$



$$\vec{r} := \vec{r}_2 - \vec{r}_1 \quad (\text{A.4})$$

takže r je vzdálenost obou bodů. Dosazením dostaneme

$$m_1 \ddot{\vec{r}}_1 = + G \frac{m_1 m_2}{r^2} \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} \quad (\text{A.5})$$

$$m_2 \ddot{\vec{r}}_2 = - G \frac{m_1 m_2}{r^2} \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} \quad (\text{A.6})$$

(rozmyslete si znaménka obou výrazů – gravitace je přitažlivá).

Úloha je tedy trojrozměrná (3D) a hledáme šest neznámých – šest složek vektorů $\vec{r}_k$, $k = 1, 2$.

A.3 Těžišťová vztažná soustava

Zavedeme těžiště (hmotný střed) jakožto bod o souřadnicích

$$\vec{R} := \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2}. \quad (\text{A.7})$$

Protože jde o soustavu uzavřenou (vnější síly jsou nulové), očekáváme, že se těžiště bude pohybovat rovnoměrně přímočaře. To skutečně snadno dokážeme součtem (rov. (A.5)+rov. (A.6)), při němž se vyruší pravá strana a po vydělení součtem $(m_1 + m_2)$ vyjde rovnou rovnice $\ddot{\vec{R}} = \vec{0}$. Tu můžeme snadno dvakrát integrovat

$$\dot{\vec{R}} = \vec{V}_0, \quad (\text{A.8})$$

$$\vec{R} = \vec{V}_0 t + \vec{R}_0, \quad (\text{A.9})$$

kde integrační konstanty $\vec{V}_0$, resp. $\vec{R}_0$ mají fyzikální význam rychlosti, resp. polohy těžiště soustavy v čase $t = 0$ (počáteční podmínky).

A.4 Redukovaná úloha

Přejdeme od šesti proměnných (složky $\vec{r}_1, \vec{r}_2$) k šesti proměnným (složky $\vec{R}, \vec{r}$ z rov. (A.4), (A.7)). Pro první tři proměnné (složky $\vec{R}$) jsme už úlohu vyřešili (rov. (A.9)). Pravé strany rov. (A.5) a rov. (A.6) obsahují jen $\vec{r}$, nikoli jednotlivá $\vec{r}_1, \vec{r}_2$. Zkombinujme tedy obě rovnice tak, aby zbylo samotné $\vec{r}$ i na levé straně: první rovnici vydělme $-m_1$, druhou m_2 a sečteme. Dostaneme

$$\ddot{\vec{r}} = - \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) G \frac{m_1 m_2}{r^2} \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} \quad (\text{A.10})$$

a zavedením **redukované hmotnosti** μ , celkové hmotnosti M a pomocné konstanty g

$$\mu := \frac{1}{\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}} = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \quad (\text{A.11})$$

$$M := m_1 + m_2 \quad (\text{A.12})$$

$$g := G \frac{m_1 m_2}{\mu} = GM, \quad (\text{A.13})$$

dostaneme vztah

$$\mu \ddot{\vec{r}} = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} \quad (\text{A.14})$$

$$= -\mu g \frac{\vec{r}}{r^3}, \quad \text{resp.} \quad (\text{A.15})$$

$$= -G \frac{\mu M}{r^2} \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}, \quad (\text{A.16})$$

Všimněme si, že síla vyjádřená pravými stranami rov. (A.5), (A.6), (A.14) až (A.16) je (až event. na znaménko) táž a má i analogický zápis.

Zápis (A.16) lze interpretovat takto: eliminací pohybu těžiště a zavedením relativní vzdálenosti r jsme úlohu převedli na náhradní úlohu – pohyb tělesa („kvaziplaneta“) s redukovanou hmotností μ v centrálním silovém poli ve vzdálenosti $r(t)$ od centra. Naše „kvazislunce“ je nyní nehybné v počátku souřadnic (jako kdyby mělo setrvačnou hmotnost nekonečnou) a má gravitační hmotnost $M = m_1 + m_2$. Kolem něj obíhá „kvaziplaneta“ o hmotnosti μ z rov. (A.11).

Jde o stejný trik, který jsme použili v kap. 5.2.8 při vyšetřování harmonických kmitů soustavy navzájem pružně sprzęžených částic. Jejich polohy jsme převedli lineárními kombinacemi na polohy redukovaných částic – kvazičástic. Ty se chovají jako volné (nesprážené) a každá z nich koná harmonický pohyb nezávislý na ostatních kvazičásticích. Zde jsme Slunce a planetu (dvě závislá tělesa) převedli na dvě nezávislé kvazičástice: „těžiště soustavy“ (hmotnost $M + m$, pohyb rovnoměrný přímočarý) a „kvaziplaneta“ (hmotnost μ , pohyb rovinný, po kuželocečce – jak dále odvodíme).

Z polohy $\vec{r}$ kvaziplanety dostaneme skutečné polohy planety i Slunce jednoduchou lineární transformací (vyřešením rov. (A.4) a (A.7)):

$$\vec{r}_1 = \vec{R} + \frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{r} \quad (\text{A.17})$$

$$\vec{r}_2 = \vec{R} - \frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{r}. \quad (\text{A.18})$$

A.5 Rovinný problém; moment hybnosti

Ukážeme, že náš problém je trojrozměrný jen zdánlivě. Ve skutečnosti se kvaziplaneta pohybuje pouze v jisté rovině procházející počátkem souřadnic (kde leží centrum síly), počáteční polohou planety a obsahující směr její počáteční rychlosti. Tato rovina je kolmá k momentu hybnosti $\vec{L}$ kvaziplanety:

$$\vec{L} \equiv \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times \mu \vec{v} = \vec{r} \times \mu \dot{\vec{r}}$$

přičemž vektor $\vec{L}$ zůstává s časem neproměnný (vnější síly jsou nulové a mají tedy výsledný moment nulový): $\vec{L} = \vec{L}_0 = \overrightarrow{\text{konst.}}$.

Dá se ukázat, že i původní Keplerova úloha (tedy se Sluncem a planetou, nejen s kvazisluncem a kvaziplanetou, a nejen v těžištové soustavě) se odehrává v rovině procházející počáteční polohou Slunce, planety a jejich těžiště a pohybující se rovnoměrně přímočaře rychlostí těžiště.

K důkazu vynásobíme rov. (A.16) zleva vektorově polohovým vektorem $\vec{r}$. Protože na její pravé straně je též vektor $\vec{r}$, dostaneme nulu:

$$\vec{r} \times \mu \ddot{\vec{r}} = -G \frac{\mu M}{r^2} \frac{\vec{r} \times \vec{r}}{|\vec{r}|} = \vec{0}. \quad (\text{A.19})$$

Dále použijeme vztah

$$\frac{d}{dt}(\vec{r} \times \mu \dot{\vec{r}}) = (\dot{\vec{r}} \times \mu \dot{\vec{r}} + \vec{r} \times \mu \ddot{\vec{r}}) = \vec{r} \times \mu \ddot{\vec{r}} \quad (\text{A.20})$$

a z rov. (A.19) dostaneme *zákon zachování momentu hybnosti* (ZZMH) planety:

$$\frac{d}{dt} \vec{L} \equiv \frac{d}{dt}(\vec{r} \times \mu \dot{\vec{r}}) = \vec{0}, \quad (\text{A.21})$$

$$(\vec{r} \times \mu \dot{\vec{r}}) = \vec{L}_0 = \overrightarrow{\text{konst.}} \quad (\text{A.22})$$

Vektor momentu hybnosti $\vec{L}_0$ tedy nemění svůj směr v prostoru. Protože je roven vektorovému součinu polohového vektoru $\vec{r}$ (s rychlostí $\vec{v}$), leží polohový vektor kvaziplanety (i její rychlost $\vec{v} \equiv \dot{\vec{r}}$) stále v rovině kolmé k $\vec{L}_0$. Pohyb v centrálním poli je tedy rovinný.

Při odvození jsme nevyužili závislosti síly na čtverci vzdálenosti. Pohyb částice je tedy rovinný, ať je závislost síly na vzdálenosti jakákoliv.

A.6 Zákony zachování

Zákon zachování momentu hybnosti (ZZMH, rov. (A.22)) platný pro libovolné centrální pole jsme právě odvodili a použili k důkazu rovinnosti úlohy. Ukážeme, že pro libovolné centrální pole platí i zákon zachování mechanické energie (ZZE) a využijeme toho ke zjednodušení úlohy.

Využijeme relace

$$\frac{d}{dt}(r^n) = nr^{n-2} \dot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}} \quad (\text{A.23})$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} v^2 \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \dot{\vec{r}}^2 \right) = \dot{\vec{r}} \cdot \ddot{\vec{r}}. \quad (\text{A.24})$$

a dosadíme při $n = -1$ do rov. (A.15) vynásobené skalárně rychlostí $\vec{v} \equiv \dot{\vec{r}}$:

$$\mu \dot{\vec{r}} \cdot \ddot{\vec{r}} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \mu v^2 \right) = \mu g (-r^{-3} \dot{\vec{r}} \cdot \vec{r}) = \frac{d}{dt} \frac{\mu g}{r} \quad (\text{A.25})$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \mu v^2 - \frac{\mu g}{r} \right) = 0 \quad (\text{A.26})$$

$$\frac{1}{2} \mu v^2 - \frac{\mu g}{r} = \text{konst} = E_0 \quad (\text{A.27})$$

$$E_k + E_p = E_0, \quad (\text{A.28})$$

což je odvození ZZE pro speciální případ síly (pro obecnou centrální sílu).

Ani zde jsme při odvození nevyužili závislosti síly na čtverci vzdálenosti.

A.7 Řešení rovinného problému

A.7.1 Polární souřadnice

Vzhledem k tomu, že uvažované pole je centrální a jeho velikost tedy závisí jen na vzdálenosti r od počátku souřadnic, budou jistě polární souřadnice výhodnější než kartézské.

Polární souřadnice jsou ortogonální. Proto je v nich vyjádření čtverce rychlosti jednoduché. Nejprve vyjádříme obecné posunutí dl pomocí přírůstku dr radiální souřadnice (vzdálenosti od počátku) a přírůstku $d\varphi$ úhlu; při změně o $d\varphi$ se poloha změní o $rd\varphi$. Pak dostaneme vztah mezi přírůstky z Pythagorovy věty:

$$(dl)^2 = (dr)^2 + (rd\varphi)^2 \quad (\text{A.29})$$

a odtud vydělením $(dt)^2$ přímo čtverec rychlosti:

$$v^2 = (\dot{r})^2 + (r\dot{\varphi})^2 \equiv \dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2. \quad (\text{A.30})$$

V polárních souřadnicích má tedy ZZE tvar

$$\frac{1}{2}\mu(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) - \frac{\mu g}{r} = E_0. \quad (\text{A.31})$$

ZZMH zní velmi jednoduše:

$$r^2\dot{\varphi} = \frac{L_0}{\mu} \equiv \lambda \quad (\text{A.32})$$

a umožňuje nám odstranit $\dot{\varphi}$ z rov. (A.31). V ní se pak vyskytuje jen $\dot{r}$, r a t . Můžeme ji tedy řešit samostatně. Upravíme ji do tvaru

$$\frac{1}{2} \left(\dot{r}^2 + \frac{\lambda^2}{r^2} \right) - \frac{g}{r} = \frac{E_0}{\mu}, \quad (\text{A.33})$$

odkud

$$\dot{r} = \sqrt{\frac{2E_0}{\mu} + \frac{2g}{r} - \frac{\lambda^2}{r^2}}. \quad (\text{A.34})$$

Dále můžeme postupovat dvěma směry:

A.7.2 Výpočet závislosti vzdálenosti r a času t

Jedna možnost je upravit rov. (A.34) na tvar se separovanými proměnnými:

$$\frac{dr}{\sqrt{\frac{2E_0}{\mu} + \frac{2g}{r} - \frac{\lambda^2}{r^2}}} = dt \quad (\text{A.35})$$

a přímo integrovat: dostaneme $t = t(r)$, tedy informaci, ve kterém čase se kvaziplaneta dostane do dané vzdálenosti r od centra.

$$t = \int \frac{dr}{\sqrt{\frac{2E_0}{\mu} + \frac{2g}{r} - \frac{\lambda^2}{r^2}}} + t_0. \quad (\text{A.36})$$

Nás by ovšem zajímala spíše inverzní funkce $r = r(t)$ udávající, kde se částice nachází v daný okamžik t . Tu bychom dále použili k řešení $\varphi(t)$ integrací z rov. (A.32). Proto se vrátíme k rov. (A.34) a budeme postupovat jinak.

A.7.3 Výpočet trajektorie kvaziplanety $r = r(\varphi)$

Jiná možnost řešení redukováného problému je určit trajektorii (parametrizovanou úhlem φ) a eliminovat čas, tedy ponechat v rov. (A.31) a (A.32) jen proměnné r a φ .

Výpočet lze vlastně provést jen v monotonní části trajektorie planety, ale na výsledku se toto omezení neprojeví.

Berme tedy $r = r(\varphi)$. Vyjádříme

$$\frac{dr}{d\varphi} = \frac{\dot{r}}{\dot{\varphi}} = \dot{r} \frac{r^2}{\lambda} \quad (\text{A.37})$$

dosadíme do rov. (A.34) a separujeme proměnné:

$$d\varphi = \frac{dr\lambda}{r^2\dot{r}} = \frac{\lambda dr}{r^2 \sqrt{\frac{2E_0}{\mu} + \frac{2g}{r} - \frac{\lambda^2}{r^2}}}. \quad (\text{A.38})$$

Integrace pravé strany je samozřejmě čistě záležitostí matematické analýzy (resp. kalkulu). Fyzika však může napomoci ideou: víme-li, že se planety pohybují po kuželosečkách v ohniskové poloze, budeme hledat řešení v tomto tvaru rovnice kuželosečky, tedy

$$r = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos(\varphi - \varphi_0)}, \text{ resp. } \frac{p}{r} = 1 + \varepsilon \cos(\varphi - \varphi_0), \quad (\text{A.39})$$

kde p určuje „velikost“ (měřítko) kuželosečky a numerická výstřednost (excentricita) $\varepsilon = \sqrt{1 - b^2/a^2}$ určuje její charakter:

- $\varepsilon = 0$: kružnice;
- $0 < |\varepsilon| < 1$: elipsa;
- $|\varepsilon| = 1$: parabola;
- $|\varepsilon| > 1$: hyperbola.

Tvar rov. (A.39) nás vede na vhodné substituce v rov. (A.38). Nejprve zavedeme $\rho := \frac{\lambda}{r}$, takže $d\rho = -\frac{\lambda}{r^2}dr$:

$$d\varphi = \frac{-d\rho}{\sqrt{\frac{2E_0}{\mu} + 2\frac{g}{\lambda}\rho - \rho^2}}. \quad (\text{A.40})$$

Výraz pod odmocninou známým způsobem zbavíme lineárního členu: zavedeme $\sigma := \rho - \frac{g}{\lambda}$, $d\sigma = d\rho$, $K := \sqrt{\frac{2E_0}{\mu} + \left(\frac{g}{\lambda}\right)^2}$,

$$d\varphi = \frac{-d\rho}{\sqrt{\frac{2E_0}{\mu} + \left(\frac{g}{\lambda}\right)^2 - \left(-\frac{g}{\lambda} + \rho\right)^2}} = \frac{-d\sigma}{\sqrt{K^2 - \sigma^2}}. \quad (\text{A.41})$$

a konečně zavedeme $s := \sigma/K$, $ds = d\sigma/K$:

$$d\varphi = \frac{-ds}{\sqrt{1 - s^2}}. \quad (\text{A.42})$$

K této funkci již primitivní funkci známe (arccos). Do ní pak postupně dosazujeme všechny předchozí substituce.

$$\varphi = \arccos s + \varphi_0 \quad (\text{A.43})$$

$$s = \cos(\varphi - \varphi_0) \quad (\text{A.44})$$

$$K = \sqrt{\frac{2E_0}{\mu} + \frac{g^2}{\lambda^2}} \quad (\text{A.45})$$

$$\sigma = K \cos(\varphi - \varphi_0) \quad (\text{A.46})$$

$$\rho = \frac{g}{\lambda} + K \cos(\varphi - \varphi_0) \quad (\text{A.47})$$

$$\frac{\lambda}{r} = \frac{g}{\lambda} + K \cos(\varphi - \varphi_0) \quad (\text{A.48})$$

$$\frac{\lambda^2}{g} \frac{1}{r} = 1 + \frac{K\lambda}{g} \cos(\varphi - \varphi_0). \quad (\text{A.49})$$

Tato rovnice přesně odpovídá druhé rov. (A.39), jestliže značíme

$$p = \frac{\lambda^2}{g} = \frac{L_0^2}{G\mu m_1 m_2}, \quad (\text{A.50})$$

$$\varepsilon = \frac{K\lambda}{g} = \sqrt{\frac{2E_0 L_0^2}{\mu G^2 m_1^2 m_2^2} + 1} \quad (\text{A.51})$$

$$= \sqrt{\frac{2E_0 p}{G m_1 m_2} + 1} \quad (\text{A.52})$$

Pro délku a velké poloosy, resp. vzdálenost r_P perihelia platí

$$a = \frac{p}{1 - \varepsilon^2} \quad (\text{A.53})$$

$$r_P = \frac{p}{1 + \varepsilon} \quad (\text{A.54})$$

A.7.4 Pohyb planety a slunce

Odvodili jsme, že kvaziplaneta se pohybuje po kuželosečce (rov. (A.39)) s ohniskem v počátku souřadnic, tedy s rovnicí

$$r = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos(\varphi - \varphi_0)}, \quad (\text{A.55})$$

kde φ_0 určuje úhel velké osy trajektorie vůči ose x , a rov. (A.50) a další určují parametr p i excentricitu ε . Charakter trajektorie je zřejmě dán znaménkem energie E soustavy:

- pro $E < 0$ je $\varepsilon < 1$ (elipsa),
- pro $E = 0$ je $\varepsilon = 1$ (parabola),
- pro $E > 0$ je $\varepsilon > 1$ (hyperbola).

Speciálně pro $E = -Gm_1 m_2 / 2p$ vyjde $\varepsilon = 0$ a trajektorií je kružnice.

Z pohybu kvaziplanety odvodíme pohyb skutečné planety a skutečného Slunce dosazením výsledku redukované úlohy pro kvaziplanetu do rov. (A.17) a (A.18) s tím, že obvykle předpokládáme těžiště soustavy v klidu, tedy $\vec{R} = \vec{0}$. Je tedy

$$\vec{r}_1 = \frac{-m_2}{m_1 + m_2} \vec{r} = -\frac{\mu}{m_1} \vec{r} \quad (\text{A.56})$$

$$\vec{r}_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{r} = \frac{\mu}{m_2} \vec{r} \quad (\text{A.57})$$

Snadno nahlédneme, že i v tom případě zůstane charakter kuželosečky zachován a změní se jen parametry její trajektorie.

A.7.5 Shrnutí a diskuse

Vyřešili jsme pohybové rovnice pro soustavu dvou částic při síle mezi nimi dané Newtonovým gravitačním zákonem (rov. (A.3)). Zjistili jsme, že v těžištové soustavě je trajektorií planety (i Slunce) kuželosečka s ohniskem (nikoli středem!) v těžišti soustavy.

Energie E soustavy určuje charakter trajektorie planety takto:

- pro $E < 0$ má planeta uzavřenou trajektorii eliptickou (případně kruhovou),
- pro $E = 0$ by měla planeta trajektorii parabolickou,
- pro $E > 0$ by měla planeta trajektorii hyperbolickou.

Poslední dva případy odpovídají návštěvníkům typu komety s původem mimo Sluneční soustavu. (U nich, chceme-li být v souladu s realitou, zřejmě nemůžeme zanedbat veškeré ostatní objekty kromě Slunce a uvažovaného návštěvníka.)

Jde-li skutečně o soustavu Slunce + planeta s hmotností planety zanedbatelnou proti hmotnosti Slunce, pak je Slunce prakticky v klidu a jeho střed je i těžištěm soustavy. Naše řešení se však hodí i pro soustavu typu dvojhvězdy tvořené složkami se stejnou či srovnatelnou hmotností, opisujícími pak eliptické trajektorie kolem společného těžiště.

Připomeňme konečně, že výsledek platí i v případě, že Slunce a planety nejsou bodové, ale že jde o koule po vrstvách homogenní.

A.8 Keplerovy zákony

A.8.1 1. Keplerův zákon

Planety se pohybují po elipsách málo odlišných od kružnic, v jejichž společném ohnisku je Slunce.

Tento zákon je speciálním důsledkem rov. (A.39), přihlédneme-li k tomu, že

- planety jsou vůči Slunci lehké, malé a jsou daleko od sebe, takže jejich vzájemné působení lze v prvním přiblížení zanedbat a řešit soustavu planet a Slunce jako superpozici soustav „jediná planeta a Slunce“;
- trajektorií každé z planet je kuželosečka podle rov. (A.39), resp. rov. (A.53). Parabola ani hyperbola však pro planetu nepřicházejí v úvahu (vedou z nekonečna a nejsou periodické).

Konkrétními počátečními podmínkami bylo dáno, že každá z trajektorií má malou výstřednost (je blízká ke kružnici) a že leží všechny blízko jediné společné roviny – roviny ekliptiky. Jak ukazují numerické simulace, byla a bude tato konstelace stabilní ještě několik miliard let; poté se však ekliptika zbortí, a rovněž Slunce ve svém dalším vývoji se rozroste tak, že pohltí Merkur atp.

A.8.2 2. Keplerův zákon

(Zákon ploch:) *Plošná rychlost $\vec{w}$ planety je podél celé její trajektorie konstantní.*

Má-li planeta posuvnou rychlost $\vec{v}(t)$, pak elementární plocha opsaná jejím průvodičem za dobu dt je dána plochou $dP = |\vec{w}|dt$ úzkého trojúhelníku o vrcholu ve Slunci a se stranami danými vektory $\vec{r}(t)$, $\vec{v}dt$ a $\vec{r}(t + dt)$. Tato plocha je polovinou velikosti vektorového součinu $\vec{r} \times \vec{v}dt$ a souvisí jasně s momentem hybnosti $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times \mu\vec{v}$ vztahem

$$w = |\vec{w}| = \frac{dP}{dt} = \frac{1}{2\mu}|\vec{L}| = \frac{L_0}{2\mu} \quad (\text{A.58})$$

Zákon zachování momentu hybnosti byl pro obecné centrální pole odvozen jako rov. (A.22).

A.8.3 3. Keplerův zákon

Poměr třetích mocnin velkých poloos eliptických trajektorií dvou planet je roven poměru druhých mocnin jejich oběžných dob.

Pro kruhové trajektorie lze tento zákon odvodit na středoškolské úrovni; tam je prostě dostředivá síla $F(r) = \mu v^2/r$ (nutná pro to, aby planeta konala rovnoměrný kruhový pohyb) dána gravitační silou podle rov. (A.3), resp. rov. (A.16) a předcházejících:

$$\frac{\mu v^2}{r} = G \frac{M\mu}{r^2}; \quad r = a; \quad v = \frac{2\pi a}{T} \quad (\text{A.59})$$

$$\left(\frac{2\pi a}{T}\right)^2 \frac{1}{a} = G \frac{M}{a^2} \quad (\text{A.60})$$

Odtud dostaneme hledaný vztah

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{GM}{4\pi^2} \quad (\text{A.61})$$

Pro obecnou eliptickou trajektorii využijeme toho, že plošná rychlost w je konstantní; za periodu oběhu tedy planeta urazí plochu elipsy, tedy πab :

$$wT = \pi ab \quad ()^2 \quad (\text{A.62})$$

$$\frac{L_0^2}{4\mu^2} T^2 = \pi^2 a^4 (1 - \varepsilon^2) = \pi^2 a^3 p \quad (\text{A.63})$$

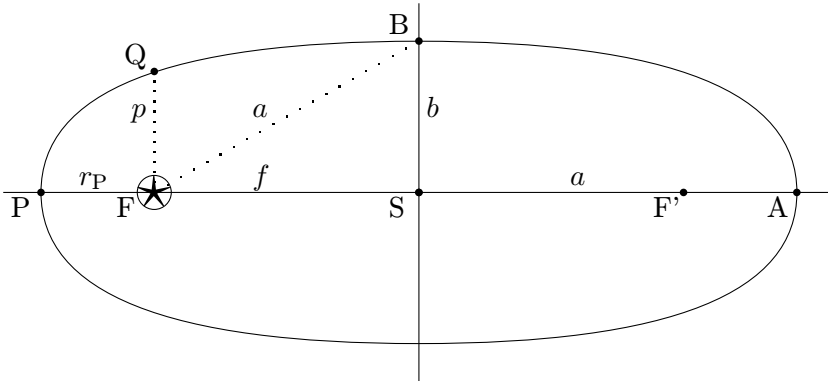
a po dosazení za p z rov. (A.50) a μ z rov. (A.11) se L_0^2 vykrátí:

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{L_0^2}{4\pi^2 \mu^2 p} = \frac{GM}{4\pi^2} \quad (\text{A.64})$$

A.9 Označení

Pro pohodlí připomeneme z geometrie základní vlastnosti elipsy a shrneme zde užívané označení.

A.9.1 Elipsa



střed S ;

ohniska F, F' ; $SF = SF' = f$; slunce leží v F

perihelium P ; $FP = r_P = a(1 + \varepsilon)$ (pro Zemi a družici: perigeum)

afelium A ; $FA = r_A = a(1 - \varepsilon)$ (pro Zemi a družici: apogeum)

velká poloosa $SA = SP = FB = a$

malá poloosa $SB = b = a\sqrt{1 - \varepsilon^2}$

parametr $FQ = p = b^2/a = a(1 - \varepsilon^2)$

numerická výstřednost (excentricita) $\varepsilon = \frac{f}{a} = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$

Rovnice elipsy v kartézských souřadnicích ve středové poloze (střed v počátku souřadnic) s velkou osou ve směru x :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (\text{A.65})$$

Rovnice elipsy v polárních souřadnicích v ohniskové poloze (ohnisko v počátku souřadnic):

$$r = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos(\varphi - \varphi_0)} \quad , \quad (\text{A.66})$$

kde φ_0 určuje úhel velké osy trajektorie vůči ose x .

A.9.2 Označení užitá v Keplerově úloze

m_1 hmotnost skutečného slunce

m_2 hmotnost skutečné planety

$\vec{r}_1$ polohový vektor skutečného slunce

$\vec{r}_2$ polohový vektor skutečné planety

$M := m_1 + m_2$ celková hmotnost; gravitační hmotnost kvazislunce

$\vec{R} := \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{M}$ polohový vektor těžiště soustavy

$\mu := \frac{m_1 m_2}{M}$ redukovaná hmotnost (kvaziplanety)

$\vec{r} := \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ polohový vektor kvaziplanety

$\vec{v} := \dot{\vec{r}}$ vektor rychlosti kvaziplanety

$G \approx 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$ gravitační konstanta

$g := GM$

$\vec{L} := \vec{r} \times \mu \dot{\vec{r}}$ moment hybnosti kvaziplanety (zůstává konstantní, roven $\vec{L}_0$)

$L_0 := |\vec{L}_0|$, např. z perihelia: $L_0 = r_P v_P$

$p := \frac{L_0^2}{\mu^2 GM} = \frac{L_0^2}{\mu G m_1 m_2} = \frac{L_0^2 M}{G(m_1 m_2)^2}$ parametr elipsy (trajektorie kvaziplanety)

$E_0 := \frac{1}{2} \mu v^2 - \frac{\mu GM}{r}$ celková mechanická energie kvaziplanety v gravitačním poli kvazislunce (pro planetu $E_0 < 0$, pro kometu $E_0 \geq 0$)

$\varepsilon := \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} = \sqrt{1 + \frac{2E_0 p}{G m_1 m_2}}$ excentricita trajektorie kvaziplanety

$r_P = \frac{p}{1+\varepsilon}$ vzdálenost kvaziplanety od kvazislunce v periheliu

$r_A = \frac{p}{1-\varepsilon}$ vzdálenost kvaziplanety od kvazislunce v afeliu

Příloha B

Kinematika graficky

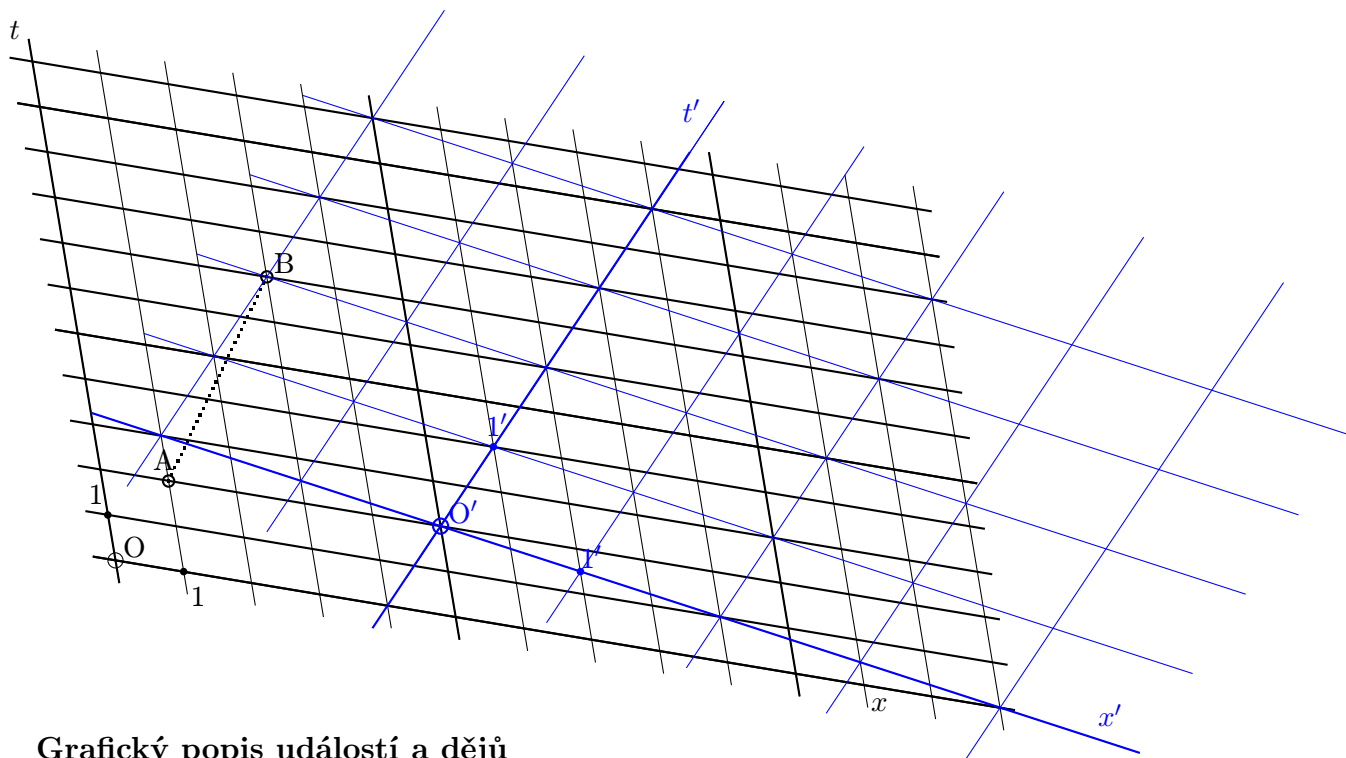
2017-05-27

B.1 Grafický popis

B.1.1 Grafický popis obecně

Uvažujme nejobecnější kosoúhlou soustavu souřadnic $\mathcal{S}$ v rovině, s počátkem O a dvěma osami x , t . Osy nemusí být k sobě kolmé a také jednotky na nich nemusí být stejně velké. Každý bod v rovině má dvě souřadnice: $A = \{x_A; t_A\}$, např. zde $A = \{1; 2\}$, $B = \{3; 7\}$.

Zdůrazněme výslovně, že měříme *výhradně* ve směru některé z os, a to jedině jí příslušnou jednotkou. Jiný směr měření – např. přímé měření délky úsečky AB na obrázku – nemá žádný fyzikální smysl.



B.1.2 Grafický popis událostí a dějů

Osy interpretujeme jako zobrazení prostoru x a času t . Každá událost U_A je zobrazena vzájemně jednoznačně bodem $A = \{x_A; t_A\}$ v rovině.

Pohyb popíšeme dostatečně vysokým počtem událostí. Rovnoměrný přímočarý pohyb se zřejmě zobrazí orientovanou úsečkou mezi počáteční a koncovou událostí (zde 31 událostí pro rovnoměrný pohyb z bodu $x = 1$ v čase $t = 2$ do bodu $x = 3$ v čase $t = 7$). Rychlostí $v = \Delta x / \Delta t$, zde $v = 1/3$, je vzájemně jednoznačně určen směr úsečky na grafu.

Pro popis pohybu zpravidla orientujeme graf tak, aby růst času t na časové ose směřoval vzhůru a růst souřadnice x směřoval doprava. Nutné to samozřejmě není, ale – jako ostatně každá rozumná zvyklost – usnadňuje nám to přehled a tím zjednodušuje práci.

B.1.3 Změna vztažné soustavy

Zvolíme jinou kosoúhlou soustavu $\mathcal{S}'$ s jiným počátkem O' , osami x' , t' a měřítky. Nové souřadnice téhož bodu $B = \{x'_B; t'_B\}'$ budou v $\mathcal{S}'$ obecně jiné (zde $\{-2; 2\}'$), ale zřejmě vždy budou s dvojicí x_B a t_B ze soustavy $\mathcal{S}$ spojeny lineárními vztahy: označíme-li souřadnice nového počátku a nových jednotek na osách

$$O' = \{0; 0\}' = \{p; q\} \quad (\text{B.1})$$

$$X'_1 = \{1; 0\}' = \{p + p_x; q + q_x\} \quad (\text{B.2})$$

$$T'_1 = \{0; 1\}' = \{p + p_t; q + q_t\} \quad , \quad (\text{B.3})$$

pak platí

$$x_B = p + p_x x'_B + p_t t'_B \quad (\text{B.4})$$

$$t_B = q + q_x x'_B + q_t t'_B \quad (\text{B.5})$$

a jednoduše spočteme i transformaci inverzní.

Šestice volitelných parametrů p, p_x, p_t, q, q_x, q_t umožňuje provést jednoznačně libovolnou lineární transformaci a zobrazit geometricky. I naopak, libovolná „nová“ kosoúhlá soustava odpovídá jednoznačně nějaké lineární transformaci. (Ne každá lineární transformace $\{x; t\} \rightarrow \{x'; t'\}$ má ovšem fyzikální smysl popisu pohybu.)

Mají-li $\mathcal{S}$ a $\mathcal{S}'$ společný počátek, tj. $O' = O$, je $p = 0, q = 0$, jde o transformaci homogenní a vše se trošku zjednoduší. Toho lze snadno dosáhnout, jak jsme uvedli v kap. 8.2.3: pokud počátek $\{0; 0\}$ soustavy $\mathcal{S}$ má v $\mathcal{S}'$ souřadnice $\{X'; T'\}'$, pak od $\mathcal{S}'$ přejdeme k nové $\mathcal{S}''$ posunutím – transformací $x'' = x' - X'; t'' = t' - T'$. Dále se budeme proto zabývat jen transformacemi homogenními.

Zatím jsme se nezabývali měřítky os ve výchozí $\mathcal{S}$ a metrikou všeobecně. Dále se budeme zabývat Galileovou a Lorentzovou transformací.

B.1.4 Grafický popis homogenní Galileovy transformace

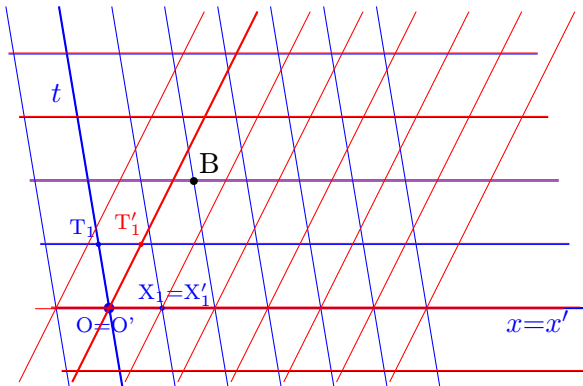
V Galileově transformaci jsou čas a prostor nezávislé a invariantem je jen Δt . Nejobecnější homogenní transformační rovnice jsou

$$x' = x - Wt \quad (\text{B.6})$$

$$t' = t \quad . \quad (\text{B.7})$$

Osy x, x' tedy splývají a mají i stejné jednotky, osa t' je skloněna tak, aby odpovídala světočáře prostorového počátku O' pohybujícího se vůči $\mathcal{S}$ danou rychlostí W a jednotkou takovou, aby událost T'_1 nastala v čase $t = 1$. (Pak bude identicky $t = t'$ pro každou událost.)

Na grafu $W = 0,8$; $B = \{3; 2,5\} = \{1; 2,5\}'$.



B.1.5 Grafický popis homogenní Lorentzovy transformace

V Lorentzově transformaci prostor (x) a čas ($x_0 = ct$) souvisí, metrika je $\Delta s^2 = \Delta x^2 - \Delta x_0^2$ pro čtverec intervalu; ten je vůči Lorentzově transformaci invariantní (viz vztah (8.20)). K danému bodu B proto leží body B' od počátku stejně vzdálené na hyperbolách (či jejich asymptotách pro $\Delta s^2 = 0$), což není nijak zvlášť názorné. Ponecháme tedy stanovení čtverce intervalu Δs_{AB}^2 na dodatečném výpočtu z časových a prostorových souřadnic bodů A, B změřených v použité vztažné soustavě obvyklým způsobem – rovnoběžným promítáním.

Zvolíme-li (při libovolném vzájemném úhlu os x , x_0) pro obě osy stejně velkou jednotku, budou osy těchto úhlů – asymptoty hyperbol – k sobě kolmé a hyperboly budou rovnoramenné; světelný kužel má vrcholový úhel pravý (půlí úhly mezi osami x a x_0). Je dále zvyklostí (ale ne nutností) v námi navržené „klidové“ soustavě $\mathcal{S}$ pro přehlednost

- vynášet polohu x na vodorovnou osu;
- na svislou osu vynášet čas t vynásobený světelnou rychlostí, tedy veličinu $x_0 = ct$;
- zvolit v grafu stejně dlouhé jednotky pro x i x_0 .

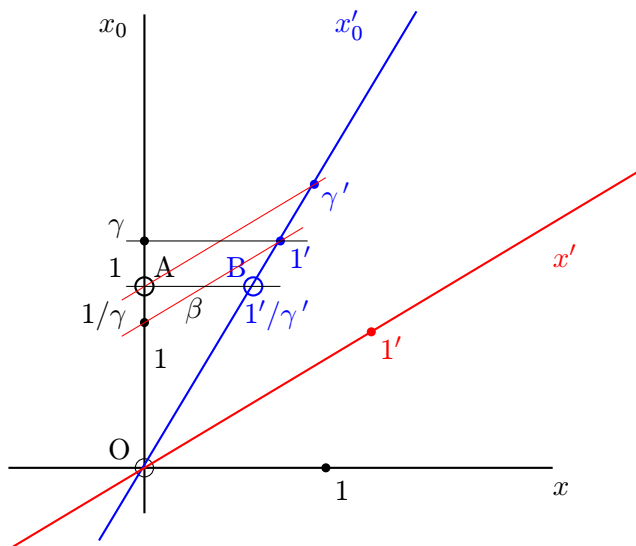
Víme, že pro libovolnou další $\mathcal{S}'$ získanou Lorentzovou transformací rov. (D.11) se zachovává světelný kužel a jeho obě větve opět půlí úhly mezi osami x' a x'_0 . Značíme-li jako obvykle $\beta = W/c$; $\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}$, pak osy x' , x'_0 určíme jednotkami na nich:

- jednotka na ose x' má souřadnice $X'_1 = \{1; 0\}' = \{\gamma; \gamma/\beta\}$;
- jednotka na ose x'_0 má souřadnice $T'_1 = \{0; 1\}' = \{\gamma/\beta; \gamma\}$.

Světelný kužel zachovává svou polohu. Pohybuje-li se soustava $\mathcal{S}'$ vůči $\mathcal{S}$ ve směru osy x , pak je $\beta > 0$, takže osy $\mathcal{S}'$ se „sevrou“ k sobě. Při pohybu $\mathcal{S}'$ proti směru osy x je $\beta < 0$; osy se „rozevrou“.

Měřítka v grafickém zobrazení ilustruje následující obrázek. Údaje v jednotkách $\mathcal{S}$ jsou uvedeny černě, současnost v $\mathcal{S}$ je znázorněna černými úsečkami rovnoběžnými s osou x („vodorovnou“). Délka spodní úsečky („v jednotkové výšce od osy x “) je β .

Údaje o $\mathcal{S}'$ jsou modré (čas) a červené (prostor); současnost v $\mathcal{S}'$ ukazují červené úsečky rovnoběžné s osou x' . Mají obě stejnou jednotku (značíme ji $1'$), ovšem jinou, než má $\mathcal{S}$ (tu značíme 1).



Obrázek B.1: Měřítka v grafu

B.2 Omyly způsobené nekonzistencí

Pozor, abychom nemíchali údaje z různých soustav. Značíme-li kroužkem na obr. B.1 události $O = \{0; 0\} = \{0; 0\}'$, $A = \{0; 1\}$ a $B = \{0; 1/\gamma\}'$, pak z trojúhelníku OAB neplyne něco jako z Pythagorovy věty, že by $1 + \beta^2$ se rovnalo $1/\gamma'^2$. Čtverec velikosti intervalu OB je roven *rozdílu* čtverců odvěsen, tedy v $\mathcal{S}$ je to $\beta^2 - 1^2 < 0$ a má časový charakter. V $\mathcal{S}'$ vyjde ovšem stejně: $0^2 - (1/\gamma^2) = -(1 - \beta^2) = \beta^2 - 1^2$.

Příloha C

Srážka (ráz)

2016-08-24

C.1 Srážka obecně

Srážka *{collision}* těles (dříve též **ráz** těles; nesouvisí s termínem „rázy“, str. 59), v mikrosvětě také často zvaná **rozptyl** *{scattering}* je děj, při němž se rychlost tělesa (sněrm velikost nbo obojí) podstatně změní za velmi krátkou dobu¹. Představuje velmi důležitou oblast fyziky. V kvantové fyzice je naším nejsilnějším prostředkem k poznávání vlastností elementárních struktur, svůj velký význam má i v klasické fyzice, a to jak v každodenní technice, tak i např. v gravitačním praku, kdy je raketa urychlena průletem gravitačního pole pohybující se planety.

Budou nás zajímat jen dvě situace *systému*² srážejících se těles:

1. stav (dávno) před srážkou, zvaný **počáteční** *{initial}*, index *i*; zpravidla v čase $t \rightarrow -\infty$;
2. stav (dlouho) po srážce, zvaný **koncový** *{final}*, index *f*; zpravidla v čase $t \rightarrow +\infty$,

příčemž v obou těchto stavech jsou tělesa natolik vzdálená, že jejich interakci lze zanedbat.

Vlastní detailní průběh samotné srážky nás co možná nebude zajímat vůbec; bude stačit jen jeho celková charakteristika (srážka pružná nebo nepružná, centrální nebo necentrální apod.) projevující se ve vztahu mezi stavem počátečním a koncovým.

♣ Čtenář znalý Cimmmana jistě poznal, že v popisu srážek vycházíme přímo z jeho filozofie externismu, což je pravý opak solipsismu: podle externismu neexistuje „já“. Naopak existuje všechno, co je kolem tohoto neexistujícího „já“.

Tělesa na sebe při srážce pochopitelně působí. Může to být „na dálku“ – gravitační či elektromagnetické pole, může to být „na blízko“ – kontaktní **nárazové síly** dané materiálem těles: uplatní se drsnost povrchu, pružnost, **vzpruživost** (zvaná též **činitel restituace**, míra, do jaké srážkou zdeformované těleso obnoví svůj původní tvar). Chceme se však vyhnout řešení pohybových rovnic (numerickému, krok po kroku s vzrůstajícím časem o dt , anebo takovému, jak jsme např. řešili v příl. A při parabolickém či hyperbolickém průletu tělesa kolem Slunce). Předpokládáme jen, že síly, kterými lze interakci popsat, jsou pro pružnou srážku konzervativní (zachovávají celkovou energii), nemusí však ubývat se čtvercem vzdálenosti, ani nemusí být centrální, mohou se uplatnit i momenty sil (rozvažte např. silové působení mezi elektrickým nábojem a elektrickým dipólem: síly nejsou centrální, na dipól působí od náboje kroutivý moment, na náboj od dipólu nikoli). Předpokládá se dále, že síly ubývají do nekonečna tak, aby dostatečně vzdálená tělesa na sebe působila jen zanedbatelně málo. Neuvažujeme však žádné *vnější* vlivy, síly ani vazby; pokud by byly, vhodně je odtransformujeme. Rovněž předpokládáme, že „v nekonečnu“ mají srážející se tělesa tutéž potenciální energii a lze ji položit rovnu nule. Systém tvořený srážejícími se tělesy je tedy *izolovaný*.

Pro izolovaný systém platí zákony zachování celkové energie E_0 , hybnosti $\vec{P}$, momentu hybnosti $\vec{B}$ a hmotnosti m . Další aditivní integrály pohybu neexistují.

¹Těleso tedy projde velkým zrychlením, zapůsobí na něj náhlá síla. Toto je sice vymezení subjektivní, většinou antropocentrické, v praxi to však nevadí.

²Pro větší přehlednost mluvíme o *systému* srážejících se těles k odlišení od vztažné *soustavy*.

Zde zjistíme, co lze z těchto zákonů odvodit. Užité přístup připomíná svým použitím integrálů pohybu analytickou mechaniku. Lze ho použít i ve speciální teorii relativity (s relativistickou hmotností a Lorentzovým skládáním rychlosti). Také je použitelný v kvantové teorii pro mikrosvět; proto občas zmíníme jako objekt např. atomy a jejich specifika (vlastní moment hybnosti – spin $\vec{s}$, princip nerozlišitelnosti stejných částic). Výsledky jsou platné pro libovolný počet těles, ale je jich ovšem málo: v této jednoduché a obecné formě však postačí k vyřešení nejjednodušších případů srážky dvou těles. Složitější úlohy (srážka výstředná, šikmá, vrtná) vyžadují další rozbor. A už úloha tří těles může vést na deterministický chaos, změnu vázaných stavů na volné a naopak atp.

C.2 Srážka dvou těles

C.2.1 Strategie

Inerciální vztažnou soustavu $\mathcal{L}$, v níž je úloha zadána, nazýváme **laboratorní**. (Často v ní bývá v klidu některé z těles, zvané v tomto kontextu **terč**; není to však nutné.) V $\mathcal{L}$ má těžiště systému zpravidla nenulovou rychlost $\vec{W}_t$. Pro výpočet proto přejdeme (Galileovou transformací) do té inerciální vztažné soustavy $\mathcal{T}$ zvané **těžišťová soustava** *{center-of-mass frame}*, kde těžiště systému leží v počátku souřadnic O v klidu³, má tedy nulovou rychlost. Vzhledem k zákonu zachování hybnosti zůstane těžiště v bodě O stále, i po srážce.

Při Galileově transformaci s rychlostí $\vec{W}_t$ se všechny rychlosti v $\mathcal{T}$ oproti $\mathcal{L}$ zmenší o $\vec{W}_t$. Rozdíl dvou rychlostí — např. vzájemná rychlost $\vec{W}$ dvou těles — se tedy nezmění. Toho s výhodou využijeme při formulaci úlohy v těžišťové soustavě.

C.2.2 Těžišťová soustava $\mathcal{T}$

V těžišťové soustavě $\mathcal{T}$ má srážka dvou těles tak jasnou symetrii, že řešení je vidět na první pohled: stačí se prostě od srážky v čase vracet — provést inverzi času $t \rightarrow -t$, a celková hybnost systému (rovná nule v $\mathcal{T}$) ani energie se nezmění. Do $\mathcal{L}$ se pak z $\mathcal{T}$ dostaneme zpětnou Galileovou transformací, tj. přičtením rychlosti těžiště systému.

Rovněž geometrie úlohy v $\mathcal{T}$ je podstatně jednodušší než v $\mathcal{L}$: Tečny k trajektoriím těles na počátku („směry výstřelů“)

- buď jsou v $\mathcal{L}$ mimoběžné; pak jsou v $\mathcal{T}$ rovnoběžné, těžiště leží mezi nimi,
- nebo jsou v $\mathcal{L}$ různoběžné; pak v $\mathcal{T}$ splývají, těžiště leží na nich,
- nebo jsou v $\mathcal{L}$ rovnoběžné; pak jsou i v $\mathcal{T}$ rovnoběžné, těžiště leží mezi nimi,
- nebo v $\mathcal{L}$ splývají; pak i v $\mathcal{T}$ splývají a těžiště leží na nich.

C.2.3 Označení

- Vektory značíme šipkou: $\vec{V}$.
 V je velikost vektoru $\vec{V}$ (tedy $V \geq 0$)
 V_x je složka vektoru $\vec{V}$ (tedy $-\infty < V_x < \infty$).

Zabýváme se dále dvěma tělesy: T a t.

- $\vec{V}$ je rychlost⁴ tělesa T
- $\vec{v}$: malé písmeno značí veličinu tělesa t
- $\vec{V}'$: čárka značí veličinu po srážce
- $\vec{V}_{\mathcal{T}}$: index $\mathcal{T}$ značí veličinu měřenou v těžišťové soustavě $\mathcal{T}$

³Striktně vzato, pro určení rychlostí není nutné se starat o polohu těžiště systému těles vůči počátku O soustavy $\mathcal{T}$. Hlavně že má v $\mathcal{T}$ těžiště systému nulovou rychlost.

⁴Přesněji: rychlost těžiště tělesa T.

- $\vec{W} = \vec{V} - \vec{v}$ je vzájemná rychlost těles (je stejná v každé vztažné soustavě, $\mathcal{L}$ i $\mathcal{T}$)
- $\vec{W}_t$ je rychlost těžiště systému těles ($T + t$):

$$\vec{W}_t = \frac{M\vec{V} + m\vec{v}}{M + m} \quad (\text{C.1})$$

- $\vec{P} = M\vec{V}$ je hybnost tělesa T
- E_0 je celková energie tělesa T
- $E_k = \frac{1}{2}MV^2$ je kinetická energie posuvného pohybu tělesa T ,
případně ještě obecněji
- $\vec{B} = \vec{R} \times \vec{P}$ je moment hybnosti T vůči počátku souřadnic
- $\vec{S} = J\vec{\Omega}$ je vlastní moment hybnosti rotujícího tělesa, případně jeho spin

Budeme dále předpokládat srážku netříštivou:

$$M = M' \quad , \quad m = m' \quad . \quad (\text{C.2})$$

Zákony zachování hybnosti, energie a momentu hybnosti celého systému pak znějí

$$M\vec{V} + m\vec{v} = M\vec{V}' + m\vec{v}' \quad (\text{C.3})$$

$$E_0 + e_0 = E'_0 + e'_0 \quad (\text{C.4})$$

$$\vec{B} + \vec{S} + \vec{b} + \vec{s} = \vec{B}' + \vec{S}' + \vec{b}' + \vec{s}' \quad (\text{C.5})$$

Zachováva-li se při srážce i samotná kinetická energie posuvného pohybu, mluvíme o (dokonale) **pružné srážce** a platí

$$\frac{1}{2}MV^2 + \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}MV'^2 + \frac{1}{2}mv'^2 \quad (\text{pružná srážka}) \quad (\text{C.6})$$

Při dokonale **nepružné srážce** se po srážce tělesa od sebe vůbec neodrazí, mají tutéž rychlost:

$$\vec{V}' = \vec{v}' \quad ; \quad W' = 0 \quad (\text{nepružná srážka}) \quad (\text{C.7})$$

Newton zavedl pro charakteristiku reálných, nedokonale pružných srážek **vzpruživost** $\{\text{coefficient of restitution}\}$ neboli **činitel restituce** k definovaný podílem velikosti skutečné vzájemné rychlosti W'_{sk} po srážce ku velikosti vzájemné rychlosti W' po srážce dokonale pružné:

$$k = \frac{W'_{sk}}{W'} \quad (\text{vzpruživost, činitel restituce}) \quad (\text{C.8})$$

U makroskopických těles leží k mezi 1 (srážka dokonale pružná; blíží se jí srážka ocelových koulí) a 0 (srážka dokonale nepružná, např. srážka dvou blátěných koulí).

$\hookleftarrow$ Při klasické srážce se sice může rotační energie E_r i potenciální energie E_p měnit na posuvnou E_k a naopak, ale vnitřní energie E_v se proměnit zpět v mechanickou nemůže, protože její nárůst byl spjat i s nárůstem entropie: $\Delta E_v \leq T\Delta S$, a entropie samovolně neklesne. V kvantových srážkách to však je možné: při srážce excitované částice se excitační energie může uvolnit a urychlit rozptylující se částice. Fenomenologické veličiny jako teplota T či entropie S postrádají svůj makroskopický smysl. Pokud je $k > 1$, mluví se o **superelastické srážce** $\{\text{superelastic}\}$.

Dále použijeme rov. (C.3) a buď rov. (C.6) (pružná srážka), anebo rov. (C.7) (nepružná srážka).

C.3 Srážka dvou hmotných bodů podél přímky

C.3.1 Příklad úlohy

Uvažujme kouli K , která narazí do jiné, rovněž se pohybující koule k . Koule jsou homogenní, nerotují a jejich hmotné středy (těžiště) se pohybují po téže přímce p (srážka je přímá a středová, jak později zavedeme). Koule konají pouze posuvný pohyb a můžeme je tedy modelovat hmotnými body.

C.3.2 Popis v těžišťové soustavě $\mathcal{T}$

V těžišťové soustavě $\mathcal{T}$ platí pro souřadnici těžiště systému podle definice

$$\vec{\xi}_{\mathcal{T}} = \frac{M\vec{X}_{\mathcal{T}} + m\vec{x}_{\mathcal{T}}}{M + m} = \vec{0} \quad (\text{stále}) . \quad (\text{C.9})$$

Rychlost $\vec{W}_{t\mathcal{T}}$ těžiště systému v $\mathcal{T}$ je rovněž nulová:

$$\dot{\vec{\xi}} = \vec{W}_{t\mathcal{T}} = \frac{M\vec{V}_{\mathcal{T}} + m\vec{v}_{\mathcal{T}}}{M + m} = \vec{0} \quad (\text{stále}) , \quad (\text{C.10})$$

a celková hybnost systému také:

$$\vec{P}_{\mathcal{T}} + \vec{p}_{\mathcal{T}} = M\vec{V}_{\mathcal{T}} - m\vec{v}_{\mathcal{T}} = \vec{0} , \quad (\text{C.11})$$

Odtud plyne nepřímá úměra velikosti rychlosti tělesa v $\mathcal{T}$ a jeho hmotnosti. Při znalosti vzájemné rychlosti $\vec{W} = \vec{V}_{\mathcal{T}} - \vec{v}_{\mathcal{T}}$ dostaneme snadno rychlosti každého z těles v $\mathcal{T}$ před srážkou:

$$\vec{V}_{\mathcal{T}} = \frac{m}{M + m}\vec{W} \quad ; \quad \vec{v}_{\mathcal{T}} = -\frac{M}{M + m}\vec{W} . \quad (\text{C.12})$$

Připomeňme, že $\vec{W}$, m i M mají v $\mathcal{L}$ tytéž hodnoty jako v $\mathcal{T}$.

Pružná srážka

Při pružné srážce se zachová úhrnná hybnost $\vec{P} + \vec{p}$ i úhrnná kinetická energie posuvného pohybu. Rov. (C.3),(C.6) dostanou tvar

$$M\vec{V} + m\vec{v} = \vec{0} = M\vec{V}' + m\vec{v}' \quad (\text{C.13})$$

$$\frac{1}{2}MV^2 + \frac{1}{2}mv^2 = E = \frac{1}{2}MV'^2 + \frac{1}{2}mv'^2 \quad (\text{C.14})$$

a zřejmě jim vyhovuje řešení, kdy si každé z těles po srážce zachová svou velikost rychlosti ($V = V'$, $v = v'$ a event. se změnil směr vektorů). Zůstaneme-li podél osy x , jsou jen dvě možnosti:

- Rychlosti i hybnosti každého tělesa zůstanou nezměněny (tělesa se buď netrefila, nebo prošlo jedno skrz druhé): $\vec{V} = \vec{V}'$, $\vec{v} = \vec{v}'$, $\vec{W} = \vec{W}'$, a tedy podle rov. (C.12) platí podél osy x

$$V'_x = V_x = \frac{m}{M + m}W_x \quad (\text{C.15})$$

$$v'_x = v_x = -\frac{M}{M + m}W_x \quad (\text{C.16})$$

- Rychlosti i hybnosti každého tělesa změnil znaménko: $\vec{V}' = -\vec{V}$, $\vec{v}' = -\vec{v}$, $\vec{W} = -\vec{W}'$, což odpovídá inverzi času $t \rightarrow -t$. Podle rov. (C.12) platí podél přímky x

$$V'_x = -V_x = -\frac{m}{M + m}W_x \quad (\text{C.17})$$

$$v'_x = -v_x = \frac{M}{M + m}W_x \quad (\text{C.18})$$

(Znovu připomeňme, že $\vec{W}$, $\vec{W}'$, m i M mají v $\mathcal{L}$ tytéž hodnoty jako v $\mathcal{T}$.)

Nepružná srážka

Při nepružné srážce se vyžaduje zachování úhrnné hybnosti (je v $\mathcal{T}$ nulová) a minimální úhrnná kinetická energie posuvného pohybu; ta bude minimální (nulová), když obě tělesa zůstanou po srážce v těžišti v klidu:

$$V'_x = 0 \quad (\text{C.19})$$

$$v'_x = 0 \quad (\text{C.20})$$

Poznamenejme, že jakýkoliv systém těles má ve své těžišťové soustavě $\mathcal{T}$ celkovou kinetickou energii posuvného pohybu nejmenší (oproti energiím měřeným v jiných inerciálních vztažných soustavách).

C.3.3 Popis srážky v laboratorní soustavě $\mathcal{L}$

Pro popis v $\mathcal{L}$ stačí výsledné rychlosti z $\mathcal{T}$ zvětšit o rychlost $\vec{W}_t = (M\vec{V} + m\vec{v})/(M + m)$ těžiště systému (tedy o rychlost $\mathcal{T}$ vůči $\mathcal{L}$). Následující rovnice jsou platné zcela obecně, nejen v 1D:

$$\vec{V} = \vec{V}_{\mathcal{T}} + \vec{W}_t \quad (\text{C.21})$$

$$\vec{v} = \vec{v}_{\mathcal{T}} + \vec{W}_t \quad (\text{C.22})$$

$$\vec{V}' = \vec{V}'_{\mathcal{T}} + \vec{W}_t \quad (\text{dokonale pružná}) \quad (\text{C.23})$$

$$\vec{v}' = \vec{v}'_{\mathcal{T}} + \vec{W}_t \quad (\text{dokonale pružná}) \quad (\text{C.24})$$

$$\vec{V}' = \vec{v}' = \vec{W}_t \quad (\text{dokonale nepružná}) \quad (\text{C.25})$$

Jednodušeji to snad zapsat nejde.

V dalším 1D postupu opět nahradíme každý vektor (např. $\vec{V}$) jeho složkou (V_x).

Pružná srážka

Jsou opět dvě možnosti, jak zůstat s pohybem na ose x:

Po dosazení za $\vec{V}'_{\mathcal{T}}$ z rov. (C.15) a $\vec{W}_t$ z rov. (C.1) dostaneme triviální řešení

$$V'_x = W_x \frac{m}{M+m} + \frac{MV_x + mv_x}{M+m} = V_x \quad , \quad (\text{C.26})$$

$$v'_x = -W_x \frac{M}{M+m} + \frac{MV_x + mv_x}{M+m} = v_x \quad (\text{C.27})$$

zatímco po dosazení za $\vec{V}'_{\mathcal{T}}$ z rov. (C.15) dostaneme po rozepsání

$$V'_x = -W_x \frac{m}{M+m} + \frac{MV_x + mv_x}{M+m} = \frac{MV_x - mV_x + 2mv_x}{M+m} \quad , \quad (\text{C.28})$$

$$v'_x = W_x \frac{M}{M+m} + \frac{MV_x + mv_x}{M+m} = \frac{mv_x - MV_x + 2MV_x}{M+m} \quad . \quad (\text{C.29})$$

Nepružná srážka

Dosazením z rov. (C.19) dostáváme řešení

$$V'_x = v'_x = W_{tx} = \frac{MV_x + mv_x}{M+m} \quad . \quad (\text{C.30})$$

Obě tělesa se po srážce pohybují společně rychlostí rovnou původní rychlosti těžiště systému.

C.4 Aplikace

C.4.1 Pružná srážka stejných těles

Narazí-li pružné těleso rychlostí V_x do stejného stojícího tělesa ($v = 0$), pak se buď minou, anebo si „vymění rychlosti“: $V'_x = 0$, $v'_x = V_x$. Jde-li v kvantové mechanice o tytéž (tedy nerozlišitelné) částice, pak jde o jediný případ, nikoli o dva.

C.4.2 Kolmý odraz míčku od pevné zdi

Pevnou zeď lze pokládat za nekonečně velkou a těžkou kouli, formálně $V_x = 0$, $M \gg m$, $W = -v_x$. Vzorce z rov. (C.28), (C.29) dávají pak podle očekávání $V'_x \rightarrow 0$ a $v'_x \rightarrow -v_x$; míček jen změní znaménko rychlosti, velikost zůstane stejná.

C.4.3 Kolmý odraz pingpongového míčku od pátky

Pevně vedenou pátku lze podobně jako v předchozím případě nahradit pohybující se nekonečně těžkou koulí, jen tentokrát $V_x > 0$, $M \gg m$, $W = V_x - v_x$. Vzorce z rov. (C.28), (C.29) dávají tentokrát $V'_x \rightarrow V_x$ a $v'_x \rightarrow -v_x + 2V_x$.

K původní velikosti rychlosti míčku se přičte dvojnásobek rychlosti pátky.

C.4.4 Necentrální srážka

Pokud se tělesa pohybovala v $\mathcal{T}$ k sobě po přímce p (procházející těžištěm T systému), mohou se po necentrální srážce rozletět stejnými rychlostmi jako dříve, ale po libovolné jiné přímce p' , rovněž procházející T , a neporuší tím žádný ze zákonů zachování.

C.4.5 Gravitační prak

Tzv. **gravitační prak** *{gravitational slingshot}* umožňuje raketě prolétající kolem planety přijmout část její pohybové energie ke svému urychlení ve směru pohybu planety. Je to zřejmé následující úvahy:

Ekliptiku pokládejme během srážky za inerciální laboratorní soustavu $\mathcal{L}$. Planeta obíhá kolem Slunce posuvnou rychlostí $\vec{W}_t$ a má hmotnost M , proti níž je hmotnost rakety m zanedbatelná: $M \gg m$. Pokládejme proto soustavu spojenou s planetou po dobu „srážky“ (průletu rakety v okolí planety) za rovněž inerciální těžišťovou soustavu $\mathcal{T}$. Raketa přilétá k planetě s rychlostí vůči ekliptice ($\mathcal{L}$) rovnou $\vec{v}$, ovšem vůči planetě $\mathcal{T}$ rovnou $\vec{v}_{\mathcal{T}} = \vec{v} - \vec{W}_t$ a odlétá rychlostí v $\mathcal{T}$ stejně velkou, jakou přiletěla $|\vec{v}'_{\mathcal{T}}| = |\vec{v}_{\mathcal{T}}|$, ale jiným směrem. Vůči $\mathcal{L}$ má ovšem rychlost $\vec{v}' = \vec{v}'_{\mathcal{T}} + \vec{W}_t$, a ta má jinou velikost (i směr), než původní $\vec{v}$.

C.5 Co ovlivňuje srážku

Problematika srážek je rozsáhlý a dosud živý obor, třebaže se studuje už 400 let; zde jsme naznačili a vyřešili jen nejjednodušší úlohy. Pro případné další studium připomínáme faktory, které je nutno uvážit při řešení úloh z reálné praxe.

C.5.1 Geometrie srážky těles

Předpokládejme, že se tělesa srazí tak, že se dotknou v jediném bodě. Obě tělesa pak mají v tomto bodě společnou tečnou rovinu ρ a k ní kolmou normálu ν . Podle nich klasifikujeme srážky:

středová (centrická) srážka nastane, leží-li těžiště obou těles na vektorové přímce nárazových sil. Pokud tomu tak není, jde o srážku **výstřednou (excentrickou)**;

přímá srážka nastane, je-li vzájemná rychlost $\vec{W}$ těles kolmá k ρ (a tedy rovnoběžná s ν). Pokud tomu tak není, jde o srážku **šikmou**.

vrtná srážka nastane, pokud tělesa různě rotují kolem normály ν .

tříštivá srážka nastane, pokud se při ní tělesa mění nebo vznikají nová.

C.5.2 Povrch těles

Pokud tělesa rotují nebo pokud srážka není přímá, mají povrchy těles v místě styku nenulovou složku rychlosti v tečné rovině a záleží i na drsnosti povrchu, např. zda se sdílí vlastní moment hybnosti rotujícího tělesa.

C.5.3 Materiál těles

Jak již bylo řečeno, materiál těles rozhoduje, do jaké míry se kinetická energie E_k posuvného pohybu systému srážkou promění v jiné formy energie (zejména vnitřní). Podle toho pak probíhá srážka (pružná, nepružná; vzpruživost). Uvedme však, že vzpruživost k (str. 145) není úplně konstantní – klesá s rostoucí relativní rychlostí W a naopak pro $W \rightarrow 0$ roste a blíží se obvykle 1.

Příloha D

Jedinečnost Lorentzovy transformace

2017-05-27

D.1 Záměr

V této příloze dokážeme, že Lorentzova transformace je jedinou transformací, která převádí inerciální soustavu $\mathcal{S}$ (s údaji $\{x; t\}$) na jinou inerciální soustavu $\mathcal{S}'$ (s údaji $\{x'; t'\}$) tak, aby v obou soustavách byla světelná rychlost stejná.

Beze ztráty obecnosti předpokládejme, že obě soustavy jsou synchronizovány ve svém prostrovém a časovém počátku, tj. že $\{0; 0\} = \{0; 0'\}$ (kdyby nebyly a platilo $\{0; 0\} = \{R; T'\}$, stačilo by namísto $\mathcal{S}'$ vyštřovat $\mathcal{S}''$ se souřadnicovými údaji posunutými, tedy $\{x; t\}'' = \{x - R; t - T'\}$).

D.2 Odvození Lorentzovy transformace pro 1D prostor

D.2.1 Zachování zákona setrvačnosti

Newtonův zákon setrvačnosti vyžaduje, aby se jakýkoli pohyb bez zrychlení spojitě převáděl opět na pohyb bez zrychlení a naopak. To bude zřejmě splněno právě tehdy, bude-li transformace lineární, se čtyřmi zatím neurčenými koeficienty $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$.

$$\begin{aligned} x' &= \alpha_1 x + \alpha_2 t \\ t' &= \alpha_3 x + \alpha_4 t \end{aligned} \quad (\text{D.1})$$

D.2.2 Soustava $\mathcal{S}'$ má vůči soustavě $\mathcal{S}$ rychlost W

Pak tedy pro libovolné časy t musí prostorový počátek $\{0; t'\}$ soustavy $\mathcal{S}'$ mít souřadnice $\{Wt; t\}$ v $\mathcal{S}$. Nejobecnější transformace tohoto typu je (s koeficienty γ, ϕ, ψ šikovnějšími než a_i)

$$\begin{aligned} x' &= \gamma(x - Wt) \\ t' &= \gamma(\phi x + \psi t); \end{aligned} \quad (\text{D.2})$$

ještě zbývají neurčené tři koeficienty γ, ϕ, ψ .

D.2.3 Soustava $\mathcal{S}$ má vůči soustavě $\mathcal{S}'$ rychlost $-W$.

Pak zase pro libovolné časy t, t' musí počátku $\{0; t\}$ odpovídat bod $\{-Wt'; t'\}$. Dosazením $x = 0$ a vydělením obou rovnic dostáváme

$$x'/t' = v' = -W/\psi, \quad (\text{D.3})$$

odkud zřejmě plyne $\psi = 1$. Transformace dostává tvar

$$\begin{aligned} x' &= \gamma(x - Wt) \\ t' &= \gamma(\phi x + t) \end{aligned} \quad (\text{D.4})$$

se zatím neurčenými dvěma koeficienty γ, ϕ .

D.2.4 Má-li bod v soustavě $\mathcal{S}$ rychlost c , pak má v $\mathcal{S}'$ rovněž rychlost c .

Vydělíme spolu obě rovnice, levou stranu rozšíříme zlomkem $1/t$ a dosadíme $x'/t' = v'$ resp. $x/t = v$. Dostaneme vzorec pro transformaci rychlostí

$$v' = \frac{v - W}{\phi v + 1}, \quad (\text{D.5})$$

odkud po dosazení $v' = v = c$ jednoduše plyne $\phi = -W/c^2$. V transformaci

$$\begin{aligned} x' &= \gamma \left(x - Wt \right) \\ t' &= \gamma \left(-\frac{W}{c^2}x + t \right) \end{aligned} \quad (\text{D.6})$$

zbývá již jen určit γ .

D.2.5 Inverzní transformace k Lorentzově transformaci je rovněž Lorentzova.

Řešením předchozí soustavy rovnic dostáváme

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{\gamma(1-(W^2/c^2))} (x' + Wt') \\ t &= \frac{1}{\gamma(1-(W^2/c^2))} \left(\frac{W}{c^2}x' + t' \right). \end{aligned} \quad (\text{D.7})$$

Je zřejmé, že tato soustava rovnic je opět Lorentzovou transformací odpovídající rychlosti $-W$ za předpokladu, že platí

$$\gamma = \frac{1}{\gamma(1-(W^2/c^2))}. \quad (\text{D.8})$$

To je splněno, pokud je $\gamma = \pm \frac{1}{\sqrt{1-(W^2/c^2)}}$. Protože pro $W = 0$ musí přejít transformace v identitu, zvolíme řešení s kladným znaménkem, tj.

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-(W^2/c^2)}} \quad (\text{D.9})$$

a dostáváme konečně **speciální Lorentzovu transformaci**

$$\begin{aligned} x' &= \frac{1}{\sqrt{1-(W^2/c^2)}} (x - Wt) \\ t' &= \frac{1}{\sqrt{1-(W^2/c^2)}} \left(-\frac{W}{c^2}x + t \right). \end{aligned} \quad (\text{D.10})$$

Jak jsme již uvedli (str. 100), symetrie těchto rovnic vynikne zavedením veličiny $x_0 := ct$ namísto času t , a dále $\beta := \frac{W}{c}$, $\gamma := \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$:

$$\begin{aligned} x' &= \gamma(x - \beta x_0) \\ x'_0 &= \gamma(x_0 - \beta x). \end{aligned} \quad (\text{D.11})$$

Úkol: Ověřte výpočtem, že speciální Lorentzovy transformace (podél téže osy) tvoří grupu.

Příloha E

Veličina, měření, zápis hodnot

2018-06-10

E.1 Veličina: pojem, hodnota veličiny

Normy definují **veličinu** jako takovou *vlastnost jevu* (např. zvuk), *tělesa* (např. tento list papíru) nebo *materiálu* (mosaz daného složení), kterou lze vyjádřit *číslem* a **referencí**. Toto číslo nazýváme **číselnou hodnotou** (dané veličiny); referencí bývá nejčastěji *jednotka* (např. milimetr za sekundu, značka $\text{mm}\cdot\text{s}^{-1}$ nebo mm/s), může to být též např. měřicí¹ postup (tvrdost podle Rockwella C se zátěží 150 kg, značka HRC(150 kg)).

Podle dřívějšího pojetí (VIM 2; pojetí „chybové“ či „tradiční“) se předpokládalo, že pro konkrétní objekt (např. pro tento list papíru) má konkrétní veličina (např. jeho tloušťka l_0) jistou zcela *přesnou*, ale *neznámou* hodnotu (např. $l_0 = 0,119\,827\,654\,376\dots\text{mm}$). Měříme-li ji, dostaneme vždy nějakou náhodnou hodnotu jinou (např. $l = 0,116\text{mm}$), nejspíše blízkou, ale vždy zatíženou principiálně neznámou *chybou* (zde je tedy $\Delta l = 0,003\,827\,654\,376\dots\text{mm}$).

Současné pojetí (VIM 3; pojetí „nejistotové“) je jiné: předpokládá samotnou *definici hodnoty* veličiny pomocí *intervalu* (např. $0,115\text{mm}$ až $0,121\text{mm}$, tedy $l_0 = 0,118(3)\text{mm}$) s nenulovou **nejistotou** (zde $0,003\text{mm}$), přičemž *libovolná* hodnota (např. $l_1 = 0,116\,425\,76\text{mm}$ anebo $l_2 = 0,120\,05\text{mm}$) uvnitř tohoto intervalu může stejně dobře sloužit pro daný účel (hodnota tloušťky papíru).

E.2 Zápis číselných hodnot veličin

Zápis číselných hodnot doporučují normy ISO/IEC 80000 (Quantities and units) takto:

$$s = 23,386(12)\text{ mm} \quad (\text{doporučuje se}) \quad (\text{E.1})$$

Tento zápis má stejný význam jako dřívější

$$s = 23,386\text{ mm} \pm 0,012\text{ mm}, \text{ nebo} \quad (\text{E.2})$$

$$s = (23,386 \pm 0,012)\text{ mm}, \quad (\text{E.3})$$

ale se dvěma výhodami:

- je kratší a přehlednější (odpadají úvodní nuly v nejistotě)
- je věcně správný, zatímco zápisy podle rov. (E.2) či (E.3) vlastně správné nejsou: znamenaly by totiž jen dvě krajní hodnoty, nikoli celý interval mezi nimi (srv. obvyklý zápis řešení kvadratické rovnice zápisem $x_{1,2} = (-b \pm \sqrt{D})/2a$).

Rozměrově chybné jsou zápisy bez závorek typu

$$s = 23,386 \pm 0,012\text{ mm} \quad (\text{chybně}). \quad (\text{E.4})$$

¹Rozlišujte „měřicí“ = určený k měření, od „měřící“ = ten, který právě měří. Podobně odlišujte čtecí, řídící, kropicí od čtoucí, řídící, kropicí atp.

E.3 Popis os grafu, nadpis sloupce tabulky

Pro veličinu Q značí $[Q]$ její rozměr a $\{Q\}$ její číselnou hodnotu (jednotku lze též udat jako index u složené závorky). Správné označení v nadpisu číselných hodnot v tabulce či na ose grafu je např.

$$s/\text{mm}, \quad v/(\text{m} \cdot \text{s}^{-1}), \quad v/(\text{m/s}), \quad \frac{v}{\text{m/s}}.$$

Je také správné, ale méně praktické, psát

$$\{s\}_{\text{mm}}, \quad \{v\}_{\text{m} \cdot \text{s}^{-1}}, \quad \{v\}_{\text{m/s}}.$$

Dříve občas užívaný zápis typu $s[\text{mm}]$ je nesprávný a navíc nelogický (platí totiž $[s] = \text{mm}$).

E.4 Měření – základní pojmy

Význam měření pro fyziku coby exaktní vědu jsme zmínili už na str.9. Měření spojitých veličin nikdy není (a z principu ani nemůže být) absolutně přesné. Dvě naměřené hodnoty téže veličiny, ať už po sobě či současně dvěma měřicími přístroji, nedají proto absolutně stejný výsledek — už proto, že každý měřicí přístroj má jen konečnou přesnost a zobrazovací možnost.

Předpokládejme nejjednodušší případ, že jde o opakované měření jediné veličiny, s nejistotou typu A (tj. získanou z opakovaných měření). Nechť je naměřeno stejnou metodou (tedy i se stejnou vahou) n veličin $\{x_i\}_{i=1}^n$.

Nejistotou měření u se rozumí parametr charakterizující rozsah hodnot, tedy interval od $x - u$ do $x + u$ okolo výsledku měření x ; tento interval můžeme důvodně přiřadit hodnotě měřené veličiny.

Výběrový průměr $\bar{x}$ je definován vztahem

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i. \quad (\text{E.5})$$

Standardní nejistota $u = s_{\bar{x}}$ je v tom případě rovna výběrové směrodatné odchylce výběrového průměru, tedy

$$u = s_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}. \quad (\text{E.6})$$

Výsledek x leží v mezích $\bar{x} \pm u$, číselný zápis provedeme podle rov. (E.1). Pravděpodobnost P , že odchylka skutečné hodnoty od udávané nepřekročí u , závisí na typu rozdělení. Pro normální (Gaussovo) je to 68,3 %, pro rovnoměrné 57,7 %, pro trojúhelníkové 65 %. Pravděpodobnost, že odchylka nepřekročí $2u$, je pro normální rozdělení 95,5 %, pro rovnoměrné plných 100 %, pro trojúhelníkové 96,6 %.

Rozšířená nejistota $U = k_U \cdot u$ se zavádí tam, kde se vyžaduje vysoká spolehlivost. Koeficient rozšíření intervalu pokrytí (stručně koeficient pokrytí) k_U se stanovuje zpravidla konvenčně (předpisem normy apod.). Zpravidla bývá od **2 (nejčastěji)** do 3, anebo se určí výpočtem pro známý typ rozdělení.

Pro velký počet ($n > 30$) opakovaných měření vycházejí pro různá P různé hodnoty k :

$$k_{0,9} = 1,645 \quad \text{pro } P = 90\%, \quad (\text{E.7})$$

$$k_{0,95} = 1,96 \quad \text{pro } P = 95\%, \quad (\text{E.8})$$

$$k_{0,99} = 2,576 \quad \text{pro } P = 99\%. \quad (\text{E.9})$$

Pro malá n předepisuje norma ISO vztah $U = 2k_n u$, kde k_n pro $n = 2$ až 9 je rovno

$$k_2 = 7,0; \quad k_3 = 2,3; \quad k_4 = 1,7; \quad k_5 = 1,4; \quad k_6 = 1,3; \quad k_7 = 1,3; \quad k_8 = k_9 = 1,2.$$

Zde byly pro jednoduchost zanedbány chyby typu B (tedy ty, které se nevypočítávají, ale jsou známy odjinud, jiným způsobem); s nimi se mění vztah pro rozšířenou nejistotu U na vztah

$$U = 2\sqrt{k_n^2 u_A^2 + u_B^2} \quad \text{a výsledek zapíšeme} \quad (\text{E.10})$$

$$x = \bar{x} \pm U \quad \text{nebo číselně se závorkou jako výše, viz rov. (E.1).} \quad (\text{E.11})$$

Rejstřík

- Cartesian frame of reference, 29
- Einstein convention, 24
- Kelvin-Stokes theorem, 28
- Kronecker delta, 24
- Lagrange's formula, 25
- Laplacian, 28
- Levi-Civita symbol, 24
- Newtonian mechanics, 20
- acceleration, 30
- addition, 24
- amount of matter, 19
- analytical mechanics, 20
- angular momentum, 39
- antisymmetric tensor, 26
- area, 18
- associativity, 23
- axial vector, 23
- axis; *pl.* axes, 29
- base vectors, 26
- binormal, 30
- body, 19
- calculus, 17
- cartesian coordinate system, 23
- center of mass, 76
- center-of-mass frame, 142
- coefficient of restitution, 143
- coefficient, 43
- collision, 141
- commutativity, 23
- completely antisymmetric tensor, 26
- completely symmetric tensor, 26
- component, 23
- condensed matter, 19
- constrain, 20, 83
- consumption, 41
- continuum, 18, 20
- contravariant coordinate, 26
- coordinate, 23
- covariant coordinate, 26
- critical state, 19
- cross product, 24
- curl, 28
- curl $\vec{v}$, 28
- curl theorem, 28
- curve, 29
- date, 18
- deformable, 20
- del operator, 27
- density, 17
- derivative, 17
- dimensionless, 22
- direct product, 24
- direction, 24
- displacement, 29
- distributivity, 23
- divergence, 28
- divergence theorem, 28
- domain, 17
- dot product, 24
- dry friction, 42
- dummy index, 24
- duration, 18
- dyadic product, 24
- elastic, 20
- equality, 23
- factor, 43
- field, 20, 23
- final, 141
- final time, 18
- flight path, 29
- fluid, 19
- fluid friction, 42
- force, 20, 35
- force density, 39
- force field, 20, 39
- force line, 24
- frame of reference, 29
- free index, 24
- friction, 42
- full derivative, 27
- gas, 19
- gradient, 27, 28
- gravitational slingshot, 146
- ideal gas, 19
- ideal liquid, 19
- impulse, 40
- indiscernible, 19
- indistinguishability, 19
- indistinguishable, 19
- inertial frame, 37
- initial, 141
- initial time, 18
- inner product, 24
- instant, 18
- internal friction, 42
- interval, 18
- kinetic friction, 43
- law of conservation of energy, 42
- laws of motion, 20
- length of curve, 30
- liquid, 19
- magnitude, 24

- mass, 18, 19, 35
- mass point, 20
- matter, 18
- medium, 18
- metacenter, 87
- moment, 39
- moment of force, 39
- moment of momentum, 39
- momentum, 35
- motion, 35
- multiplication, 24
- nabla, 27
- net force, 36
- non-ideal gas, 19
- normal, 30
- normal line, 30
- origin, 23
- partial derivative, 27
- phase, 18
- plastic, 20
- polar vector, 23
- position vector, 23, 29
- potential, 40, 41
- power, 41
- principle, 20
- pseudoscalar, 23
- pseudovector, 23
- quantity calculus, 22
- rate, 17
- reference frame, 29
- reference points, 29
- rigid body, 20, 78
- rolling resistance, 42, 43
- scalar, 22
- scalar function, 23
- scalar product, 24
- scalar triple product, 25
- scattering, 141
- secant, 30
- secant line, 30
- set of basis vectors, 29
- solid, 18
- solid state, 78
- space, 17
- spacetime, 18
- special principle of relativity, 39
- speed, 17, 30
- state, 18, 35
- static friction, 43
- statics, 35
- substance, 18
- subtraction, 24
- summation index, 24
- superelastic, 143
- superfluid state, 19
- surface, 18
- symmetric tensor, 26
- synchronisation, 32
- tangent, 30
- tangent line, 30
- tangent vector, unit, 30
- tensor contraction, 26
- tidal force, 36
- tides, 36
- time, 18
- time derivative, 17
- torque, 39
- total derivative, 27
- totally antisymmetric tensor, 26
- totally symmetric tensor, 26
- trajectory, 29
- unit vectors, 23
- unit with dimension 1, 22
- vector, 23
- vector algebra, 17, 22
- vector calculus, 27
- vector field, 24
- vector product, 24
- vector triple product, 25
- velocity, 17, 30
- vis viva, 40
- volume, 18, 19
- work, 41
- zero tensor, 26
- zero vector, 23
- 2D-doména, 18
- 3D-doména, 17
- 3D-prostor, 17

- asociativita, 25

- bezrozměrný, 22
- bezrozměrový, 22
- binormála, 30
- bod, hmotný, 20, 63

- charakter intervalu, 100

- datum, 18
- deformovatelný, 20
- delta, Kroneckerovo, 24
- derivace místní, 28
- derivace, konvekční, 28
- derivace, lokální, 28
- derivace, proudová, 28
- derivace, totální, 27
- derivace, úplná, 27
- diagram, silový, 36
- divergence, 28
- doba, 18
- doba trvání, 18
- dráha, 30
- dynamika, 35
- délka, vlastní, 102

- Einstein, konvence, 24
- ekviskalární, 27
- elastický, 20
- energie mechanická, celková, 41
- energie, kinetická, 41
- energie, potenciální, 40

- forma, neintegrabilní, 40

- fáze, 18
- fáze, kondenzovaná, 19
- gradient, 27, 28
- gravitační prak, 146
- hladina, 18
- hmota, 18
- hmotnost, 19, 35
- hmotnost, klidová, 108
- hmotnost, redukovaná, 129
- hodiny, synchronizované, 95
- hodnota, číselná, 151
- hustota síly, 39
- hybnost, 35
- impulz síly, 40
- index, sčítací, 24
- index, volný, 24
- individualita, 19
- intenzita, 40
- intenzita pole, 39
- interakce, 35
- interval, 18, 100
- interval prostorupodobný, 100
- interval časupodobný, 100
- kalkul, veličinový, 22
- kapalina, 19
- kapalina, ideální, 19
- kapka vody, 35
- kinematika, 29
- kmity, relaxační, 62
- komutativita, 25
- kontinuum, 18, 20
- kontrakce délek, 102
- křivka, 29
- laplacián, 28
- linie, vektorová, 24
- látka, 18
- látka, pevná, 18
- metacentrum, 77, 87
- metrika, 100
- metrika, pseudoeuklidovská, 101
- množství, látkové, 19
- moment hybnosti, 39
- moment síly, 39
- míra pohybu, 35
- nabla, 27
- natočení, 31
- nejistota, 151
- nerozlišitelnost, 19
- nerozlišitelný, 19
- normála, 30
- nábojový střed, 77
- objem, 18, 19
- oblast, 17
- obsah, 18
- odpor prostředí, 42, 43
- odpor, valivý, 42, 43
- okamžik, 18
- operátor Laplaceův, 28
- otočení, 31
- plastický, 20
- plocha, 18
- plyn, 19
- plyn, ideální, 19
- plyn, neideální, 19
- pohyb, 35
- pokus, Kennedy-Thorndike, 105
- pokus, Michelson-Morley, 105
- pole, 20
- pole, silové, 20, 39
- pole, vektorové, 24
- poloha, úhlová, 31
- posunutí, 29
- posunutí, elementární, 29
- posunutí, infinitezimální, 29
- posunutí, virtuální, 21
- potenciál, 41
- povrch, 18
- prekurzor, 106
- princip relativity, Einsteinův, 39
- princip relativity, Galileův, 39
- princip relativity, mechanický, 39
- princip relativity, speciální, 39
- princip virtuální práce, 21, 22
- proměnné, zobecněné, 21
- prostor, 17
- prostor, absolutní, 37
- prostorocas, 18
- prostředí, 18
- práce, 41
- pseudoskalár, 23
- pseudovektor, 23
- pád, volný, 47
- příkon, 41
- přímka, vektorová, 83
- působíště vektoru, 26
- reference, 151
- rotace, 28
- rovnice vektorové, řešení, 25
- rovnice, charakteristická, 45
- rozměr, charakteristický, 43
- rozptyl, 141
- rychlost, 30
- rychlost, plošná, 32
- rychlost, posuvná, 30
- rychlost, unášivá, 68
- rychlost, úhlová, 31
- ráz - viz srážka, 141
- sečna, 30
- silový diagram, 36
- siločára, 24
- skalár, 22
- skupenství, 18
- slapy, 36

- směr, vektoru, 23
- soustava, inerciální, 37
- soustava, kartézská, 23
- soustava, laboratorní, 142
- soustava, těžišťová, 86, 142
- soustava, vztažná, 29, 95
- soustava, vztažná, kartézská, 29
- součin, direktní, 24
- součin, dyadický, 24
- součin, příčný, 24
- součin, skalární, 24
- součin, smíšený, 25
- součin, tenzorový, 24
- součin, vektorový, 24
- součin, vektorový, dvojnásobný, 25
- součinitel, 43
- součinitel valivého odporu, 43
- souřadnice kontravariantní, 26
- souřadnice kovariantní, 26
- spin, 75
- srážka, 141
- srážka tříštivá, 146
- srážka vrtná, 146
- srážka, centrická, 146
- srážka, excentrická, 146
- srážka, nepružná, 143
- srážka, pružná, 143
- srážka, přímá, 146
- srážka, středová, 146
- srážka, superelastická, 143
- srážka, výstředná, 146
- srážka, šikmá, 146
- statika, 35
- stav, 35
- stav, koncový, 141
- stav, kritický, 19
- stav, počáteční, 141
- stav, superfluidní, 19
- stálce, 37
- střed hmotnosti, 76, 86
- střed náboje, 77
- střed, hmotnostní, 76
- střed, hmotný, 76
- substance, 18
- symbol, Levi-Civita, 24
- synchronizace, 32
- synchronizace dvou soustav, 95
- synchronizace hodin, 95
- systém, referenční, 29
- síla, 20, 35
- síla, Coriolisova, 69
- síla, Eulerova, 69
- síla, konzervativní, 42
- síla, nárazová, 141
- síla, odstředivá, 69
- síla, potenciálová, 40
- síla, různé typy, 36
- síla, třecí, 42
- síla, unášivá, 69
- síla, unášivá, posuvná, 69
- síla, vazbová, 87
- síla, živá, 40
- síly, slapové, 36
- tekutina, 19
- tenzor, antisymetrický, 26
- tenzor, metrický, 26, 100
- tenzor, nulový, 26
- tenzor, symetrický, 26
- tenzor, řád, 26
- tenzor, úplně antisymetrický, 26
- tenzor, úplně symetrický, 26
- terč, 142
- tečna, 30
- točivost, 39
- trajektorie, 29
- transformace, Galileova, 32
- transformace, speciální, 95
- těleso, 19
- těleso, referenční, 29
- těžiště, 77, 86
- těžnice, 86
- tření, 42
- tření za pohybu, 43
- tření, dynamické, 43
- tření, kinematické, 43
- tření, klidové, 43
- tření, smykové, 42
- tření, statické, 43
- tření, suché, 42
- tření, valivé, 43
- tření, vnitřní, 42, 43
- událost, 95
- události souměstné, 95
- události současné, 95
- umístění, 83
- vazba, 20
- vektor, 23
- vektor báze, kontravariantní, 26
- vektor báze, kovariantní, 26
- vektor, axiální, 23
- vektor, jednotkový, 23
- vektor, klouzavý, 26, 83
- vektor, nulový, 23
- vektor, násobení skalárem, 24
- vektor, odčítání, 24
- vektor, pojetí geometrické, 24
- vektor, pojetí složkové, 24
- vektor, polohový, 23, 29
- vektor, polární, 23
- vektor, rovnost, 23
- vektor, skládání, 24
- vektor, složka, 23
- vektor, souřadnice, 23
- vektor, sčítání, 24
- vektor, tečný, 30
- vektor, umístění, 26
- vektor, volný, 25, 83
- vektor, vázaný, 26, 83
- vektory, báze, 26
- velikost, vektoru, 23

veličina, 151
vrh, svislý, 47
vzorec, Newtonův (odpor), 43
vzpruživost, 141, 143
věta o střední hodnotě, 28
věta Stokesova, 28
věta, d'Alembertova, 80
věta, Gaussova, 28
věta, Königova, 77
výkon, 41
výslednice sil, 36, 38

zrychlení, 30
zrychlení, Coriolisovo, 69
zrychlení, dostředivé, 69
zrychlení, Eulerovo, 69
zrychlení, plošné, 32
zrychlení, unášivé, 69
zrychlení, unášivé, postupné, 69
zrychlení, úhlové, 31
zákon akce a reakce, 38
zákon Newtonův, druhý, 38
zákon Newtonův, nultý, 37
zákon Newtonův, první, 37
zákon Newtonův, třetí, 38
zákon setrvačnosti, 37
zákon síly, 38
zákon zachování mechanické energie, 42
zákon, distributivní, 25

šroub, dynamický, 85
šroub, kinematický, 67, 68, 80

čas, 18
čas, absolutní, 37
čas, koncový, 18
čas, počáteční, 18
činitel klidového tření, 43
činitel odporu, 43
činitel restituace, 141, 143
činitel smykového tření, 43
činitel valivého odporu, 43
čtverec intervalu, 100
částice, 63
částice, volná, 63

řešení vektorových rovnic, 25
řád tenzoru, 26

údaj, časový, 18
úžení vektoru, 26